



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
SECRETARIA DE EDUCAÇÃO PROFISSIONAL E TECNOLÓGICA
INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DE RONDÔNIA
CAMPUS PORTO VELHO CALAMA
PRONATEC

MATEMÁTICA APLICADA

CURSO TÉCNICO EM INFORMÁTICA CONCOMITANTE



Prof. Vlademir Fernandes

Porto Velho - RO
2016

*Não há ramo da Matemática,
por mais abstrato que seja,
que não possa um dia vir a ser aplicado
aos fenômenos do mundo real.*

Nikolai Lobachevsky

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	4
CAPÍTULO I: INDUÇÃO MATEMÁTICA	5
CAPÍTULO II: RECURSÃO E RELAÇÕES DE RECORRÊNCIA	9
2.1- Recorrências lineares de primeira ordem	10
2.2- Recorrências lineares de primeira ordem não homogêneas.....	11
2.3- Recorrências lineares de segunda ordem	18
CAPÍTULO III: INTRODUÇÃO À LÓGICA MATEMÁTICA.....	25
CAPÍTULO IV: OPERADORES BOOLEANOS E PORTAS LÓGICAS	34
CAPÍTULO V: ÁLGEBRA DE BOOLE.....	45
REFERÊNCIAS	49

INTRODUÇÃO

Não é redundante reafirmar a importância da Matemática em carreiras acadêmicas e tecnológicas. Basicamente toda estrutura técnico-científica está fundamentada em alguma lógica ou princípio matemático além de ser expressa por meio dessa linguagem.

Nos cursos técnicos de nível médio ela se mostra imprescindível. Na maioria deles não há como se compor o curso sem oferecer a possibilidade de se estudar Matemática, em nível fundamental ou mais avançado, a título de revisão ou aprofundamento. O fato é que ela está lá.

O desafio contínuo para os professores é tornar o ensino e aprendizagem da Matemática uma ação mais palpável, ou, poderíamos mesmo dizer, mais humana, acessível a todos e com um enfoque contextual e prático. Agora, no raiar do século XXI não basta termos a Matemática presente em nossas ações, em nosso currículo. É preciso mais. É necessário que ela seja apreendida, absorvida por meio de abordagens contemporâneas e suprimindo as necessidades de nossa época, quais sejam, de um ensino mais significativo, contextualizado e prático.

Este material é fruto da tentativa de propor justamente uma Matemática nestes moldes. Uma que esteja baseada na interdisciplinaridade, ou seja, que dialogue com outras disciplinas. Que esteja mais contextualizada à realidade e às demandas próprias do perfil do curso; neste caso, o de técnico em informática.

Assim, estratégias foram adotadas para concretizar este intento. Algumas delas estão relacionadas à metodologia de ensino. Optamos por trabalhar por vezes a partir da resolução de problemas, uma metodologia que tem auxiliado muito no aprendizado. Também foi previsto a utilização das TIC's, ou seja, das ferramentas da própria informática como softwares que podem complementar o aprendizado, bem como proporcionar a interação dos alunos. Outras estratégias são direcionadas ao currículo. Desta forma, conseguimos sair do lugar comum e avançar com a proposta de um currículo mais condizente com as necessidades daqueles que lidam com os dilemas da informática. Destarte, optamos por omitir alguns conteúdos em benefício de outros não usuais, mas de extrema importância para área como: *Indução e Lógica Matemática, Recorrências e Álgebra Booleana*. Para completar a série, as atividades propostas seguiram igualmente o mesmo contexto, sendo baseadas não em memorização e fixação de conteúdo, mas sim sustentadas na participação, envolvimento e desenvolvimento dos alunos a partir de diversas propostas.

Por fim, estamos diante de um material que se propõe ser significativo para a proposta do curso, interativo em suas relações e profundo em sua abordagem.

CAPÍTULO I

INDUÇÃO MATEMÁTICA

Indução é um método de raciocínio que procura generalizar uma proposição a partir de poucas observações. Ele avança da “parte” para o “todo”. De modo geral, é um raciocínio útil e quando empregado de forma correta, produz bons resultados. O problema se dá justamente na má aplicação de indução, o que, pode produzir resultados catastróficos. Vejamos o exemplo seguinte que mostra o equívoco de fazermos uma indução com pequenas quantidades de evidência.

Vamos analisar a raiz quadrada de alguns números. 2025, 3025 e 9801.

Observemos um fato muito interessante entre a estrutura de cada um desses números e sua respectiva raiz quadrada. A raiz quadrada de 2025 é 45. Observe que se somarmos os dois primeiros algarismos do número com os dois últimos também teremos do resultado 45, ou seja, $20 + 25 = 45$.

Assim, observamos que $\sqrt{2025} = 45 \rightarrow 20 + 25 = 45$.

Isso é fascinante e talvez estejamos diante de uma descoberta!

Então, vamos testar com nossos outros números para ver se a “descoberta” se comprova.

Raiz quadrada de 3025 é 55. E $30 + 25 = 55$. Também deu certo!

Nosso último caso trabalhará com o número 9801. Tal número é interessante, pois é diferente da categoria dos outros que eram múltiplos de 5.

Logo, temos:

$$\sqrt{9801} = 99 \rightarrow 98 + 01 = 99.$$

Se tomarmos apenas estes três testes, podemos enunciar uma teoria mais ou menos assim:

“A raiz quadrada de qualquer número de quatro algarismos pode ser obtida através da soma dos dois primeiros algarismos desse número com os dois últimos”.

Poderíamos, ainda, escrever isso em notação matemática.

$$\sqrt{abcd} = ab + cd$$

Pronto, temos uma generalização a partir do uso da indução!

O problema é que o uso da indução foi, o que diríamos, vulgar, ou seja, não usou uma formalização matemática mais eficiente. O perigo desses generalizações é que elas podem falhar com outros valores!

Testemos, a “nova descoberta” com o número 1024, por exemplo.

$$\text{Temos, } \sqrt{1024} = 32 \neq 10 + 24 = 34.$$

Basta um teste para que toda teoria seja refutada, pois a mesma diz que QUALQUER NÚMERO, ou TODO NÚMERO, mas isso não funcionou para o número 1024. Também não funciona para os números: 2500, 5929, 4040 e para uma infinidade de outros.

Iezzi ainda nos afirma que “a indução vulgar (generalização de propriedade após verificação de que a propriedade é válida em alguns casos particulares) pode conduzir a sérios enganos na Matemática” (1977, p. 53).

Ele mostra dois exemplos clássicos:

1- Consideremos a relação $y = 2^{2^n} + 1$ definida para $n \in \mathbb{N}$. Temos,

$$n = 0 \rightarrow y = 2^{2^0} + 1 = 2^1 + 1 = 3$$

$$n = 1 \rightarrow y = 2^{2^1} + 1 = 2^2 + 1 = 5$$

$$n = 2 \rightarrow y = 2^{2^2} + 1 = 2^4 + 1 = 17$$

$$n = 3 \rightarrow y = 2^{2^3} + 1 = 2^8 + 1 = 257$$

$$n = 4 \rightarrow y = 2^{2^4} + 1 = 2^{16} + 1 = 65.537$$

Os números y encontrados são primos. Fermat (1601-1665) acreditou que a fórmula acima daria números primos qualquer que fosse o valor inteiro positivo atribuído a n . Esta indução é falsa, pois Euler (1707-1783) mostrou que para $n=5$ resulta:

$$y = 2^{2^5} + 1 = 2^{32} + 1 = 4.294.967.297 = 641 \times 6700417$$

Isto é, resulta um número divisível por 641 e, que, portanto, não é primo.

2- Dada a relação

$$y = -\frac{n^3}{6} + \frac{3n^2}{2} - \frac{7n}{3} + 3, \text{ definida para todo } n \in \mathbb{N}^*. \text{ Temos:}$$

$$n = 1 \rightarrow y = -\frac{1^3}{6} + \frac{3 \cdot 1^2}{2} - \frac{7 \cdot 1}{3} + 3 = 2$$

$$n = 2 \rightarrow y = -\frac{2^3}{6} + \frac{3 \cdot 2^2}{2} - \frac{7 \cdot 2}{3} + 3 = 3$$

$$n = 3 \rightarrow y = -\frac{3^3}{6} + \frac{3 \cdot 3^2}{2} - \frac{7 \cdot 3}{3} + 3 = 5$$

$$n = 4 \rightarrow y = -\frac{4^3}{6} + \frac{3 \cdot 4^2}{2} - \frac{7 \cdot 4}{3} + 3 = 7$$

Poderíamos tirar a conclusão precipitada: “ y é número primo, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.”

Esta indução também é falsa, pois:

$$n = 5 \rightarrow y = -\frac{5^3}{6} + \frac{3 \cdot 5^2}{2} - \frac{7 \cdot 5}{3} + 3 = 8, \text{ de acordo com (IEZZI, 1977).}$$

Ilustração: Cuidado com a indução galinácea!

Havia uma galinha nova no quintal de uma velha senhora. Diariamente, ao entardecer, a boa senhora levava milho às galinhas. No primeiro dia, a galinha, desconfiada, esperou que a senhora se retirasse para se alimentar. No segundo dia, a galinha, prudentemente, foi se alimentando enquanto a senhora se retirava. No nonagésimo dia, a galinha, cheia de intimidade, já não fazia caso da velha senhora. No centésimo dia, ao se aproximar a senhora, a galinha, por indução, foi ao encontro dela para reclamar o seu milho. Qual não foi a sua surpresa quando a senhora pegou-a pelo pescoço com a intenção de pô-la na panela. – Bertrand Russel. (HEFEZ, 2006).

Para termos condições matemáticas adequadas de provar proposições e realmente estabelecer sua generalidade, precisamos de um método matemático que nos auxilie. Este método é conhecido como “Axioma da Indução” ou “Princípio da Indução Finita” e tem o seguinte enunciado.

Uma proposição $P(n)$, aplicável aos números naturais n , é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}^, n \geq n_0$, quando:*

- 1) $P(n_0)$ é verdadeira, isto é, a propriedade é válida para $n = n_0$,
- 2) Se $k \in \mathbb{N}, K \geq n_0$ e $P(k)$ é verdadeira, então $P(k+1)$ também é verdadeira.

Exemplo:

Vamos provar a validade da proposição que calcula a soma dos n números naturais ímpares.

$$P(n) = 1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2n - 1) = n^2$$

1) Precisamos escolher um $n_0 = 1$, assim, $n = n_0 = 1$ e verificamos se é verdadeira $P(1)$:

$$n = 1 \rightarrow 1 = 1^2 \text{ (verdadeiro)}$$

2) Supondo $P(n)$ verdadeira, ou seja:

$$P(n) = 1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2n - 1) = n^2 \text{ (hipótese de indução)}.$$

Provemos que decorre a validade de $P(n+1)$.

$$\begin{aligned} P(n+1) &= 1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2n - 1) + (2(n+1) - 1) \rightarrow \\ &1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2n - 1) + (2n + 2 - 1) \rightarrow \\ &\underbrace{1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2n - 1)}_{=n^2 \text{ (conforme hipótese de indução)}} + (2n + 1) \rightarrow \\ &n^2 + 2n + 1 \rightarrow (n+1)^2 \end{aligned}$$

Este último valor é $P(n) \rightarrow P(n+1)$. $P(n)$ vale para todo $n \in \mathbb{N}^*$. Podemos, então, afirmar que a soma dos n primeiro números ímpares é igual ao quadrado de n . (LIMA, 2012).

Exemplo:

Demonstre, usando o Princípio de Indução Finita que:

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

1) Escolhemos um $n_0 = 1$, assim, $n = n_0 = 1$ e verificamos se é verdadeira $P(1)$:

$$n = 1 \rightarrow 1 = \frac{1(1+1)}{2} \text{ (verdadeiro)}$$

2) Supondo $P(n)$ verdadeira, ou seja:

$$P(n) = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} \text{ (hipótese de indução)}.$$

Provemos que decorre a validade de $P(n+1)$.

$$P(n+1) = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots + n + (n+1) \rightarrow$$

$$P(n+1) = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots + n + (n+1) \rightarrow$$

$$\underbrace{1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots + n}_{=\frac{n(n+1)}{2} \text{ (conforme hipótese de indução)}} + (n+1) \rightarrow$$

$$\begin{aligned} &\frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \rightarrow \\ &\frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} \rightarrow \end{aligned}$$

$$\frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Este último valor é $P(n) \rightarrow P(n+1)$. $P(n)$ vale para todo $n \in N^*$.

ATIVIDADES

Prove a validade das proposições abaixo para todo número natural, usando o Princípio da Indução Finita.

- 1) $1 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \forall n \in N^*$
- 2) $2 + 5 + 8 + \dots + (2 + 3n) = \frac{(n+1)(4+3n)}{2}, \forall n \in N$
- 3) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2, \forall n \in N^*$
- 4) $8 | (3^{2n} - 1), \forall n \in N^*$
- 5) $6 | n(n+1)(n+2), \forall n \in N^*$
- 6) $2 | (n^2 + n), \forall n \in N^*$
- 7) $(1 + 1) \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \left(1 + \frac{1}{3}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) = n + 1, \forall n \in N^*$
- 8) $\left(\frac{1}{1.2}\right) + \left(\frac{1}{2.3}\right) \cdot \left(\frac{1}{3.4}\right) \cdot \dots \cdot \left(\frac{1}{n(n+1)}\right) = \frac{n}{(n+1)}, \forall n \in N^*$
- 9) $1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}, \forall n \in N^*$
- 10) $2n \geq n + 1, \forall n \in N^*$

►►► COMPLEMENTO

Recomendamos que o aluno assista às seguintes vídeo aulas:

Indução Matemática – Aula 1 – Princípio da Indução Finita. PIC OBMEP, disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=bhfhmre-QxU>

Indução Matemática – Aula 2 – Soma de quadrados perfeitos. PIC OBMEP, disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=tkSkVtZmhxE>

Indução Matemática – Aula 3 – Exercícios. PIC OBMEP, disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=ZS2kxQeXfz4>

CAPÍTULO II

RECURSÃO E RELAÇÕES DE RECORRÊNCIA

Uma sequência de números reais é uma função $f: N \rightarrow R$, em que cada $n \in N$ associa um número f_n pertencente aos reais chamado n -ésimo termo.

Muitas sequências são definidas por recorrência, ou seja, por intermédio de uma regra que permite calcular qualquer termo em função do(s) antecessor(es) imediato(s). (LIMA, 2012b). Em outras palavras, podemos dizer que uma relação de recorrência é tal que determina cada termo de uma dada sequência, a partir de certo termo, em função dos termos anteriores.

A sequência a_n dos números naturais ímpares (1, 3, 5, 7,...), que é uma Progressão Aritmética (PA), pode ser definida como $a_{n+1} = a_n + 2$ e $a_1 = 1$.

De modo especial, toda PA representa uma recorrência definida da seguinte maneira: “PA é uma sequência em que cada termo, a partir do segundo, é igual à soma do termo anterior com uma constante r ”, ou, $x_{n+1} = x_n + r$ e $x_1 = a$.

A sequência dos números (2, 4, 8, 16, 32,...), que é uma Progressão Geométrica (PG) é outro exemplo de sequência definida recursivamente. Notemos que cada termo, a partir do segundo, é o termo anterior multiplicado por uma razão q . Ou seja, um termo é definido recorrendo-se ao anterior. Desta forma, podemos escrever a PG como $b_{n+1} = b_n \cdot q$ e $b_1 = a$.

Exemplo:

Seja uma sequência definida por $x_{n+2} = 2x_{n+1} + x_n$, com $x_1 = x_2 = 1$. Determine os cinco primeiros termos desta sequência.

Para descobrirmos o terceiro termo, temos que $n = 1$.

Para $n = 1$, temos:

$$\begin{aligned}x_{n+2} &= 2x_{n+1} + x_n \\x_{1+2} &= 2x_{1+1} + x_1 \\x_3 &= 2x_2 + x_1 \text{ (substituindo } x_1 = x_2 = 1) \\x_3 &= 2 \cdot 1 + 1 \\x_3 &= 3\end{aligned}$$

Para o quarto termo, temos que $n = 2$.

Para $n = 2$, temos:

$$\begin{aligned}x_{n+2} &= 2x_{n+1} + x_n \\x_{2+2} &= 2x_{2+1} + x_2 \\x_4 &= 2x_3 + x_2 \text{ (substituindo } x_2 = 1 \text{ e } x_3 = 3) \\x_4 &= 2 \cdot 3 + 1 \\x_4 &= 7\end{aligned}$$

Para o quinto termo, temos que $n = 3$.

Para $n = 3$, calculamos:

$$\begin{aligned}x_{n+2} &= 2x_{n+1} + x_n \\x_{3+2} &= 2x_{3+1} + x_3 \\x_5 &= 2x_4 + x_3 \text{ (substituindo } x_3 = 3 \text{ e } x_4 = 7)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x_3 &= 2.7 + 3 \\x_3 &= 17\end{aligned}$$

Logo, a sequência procurada é (1, 1, 3, 7, 17)

Exemplo:

Resolva a recorrência $a_{n+1} = n \cdot a_n$

$$\begin{aligned}a_2 &= 1 \cdot a_1 \\a_3 &= 2 \cdot a_2 \\a_4 &= 3 \cdot a_3 \\a_5 &= 4 \cdot a_4 \\&\dots = \dots \\a_{n+1} &= n \cdot a_n\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdot a_5 \cdot \dots \cdot a_n \cdot a_{n+1} &= 1 \cdot a_1 \cdot 2a_2 \cdot 3a_3 \cdot 4a_4 \cdot \dots \cdot na_n \\a_{n+1} &= a_1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \dots \cdot n\end{aligned}$$

Ou, usando produtório:

$$a_{n+1} = a_1 \cdot \prod_{k=1}^n k$$

$$\text{Mas, } \prod_{k=1}^n k = n! \text{ (por definição)}$$

Então,

$$\begin{aligned}a_{n+1} &= a_1 \cdot n! \\a_n &= a_1 \cdot (n-1)!\end{aligned}$$

ATIVIDADES

- 1- Seja a sequência definida por $x_{n+2} = 2x_{n+1} - x_n$, com $x_1 = 0$ e $x_2 = 1$. Determine seus cinco primeiros termos.
- 2- Seja x_n o número máximo de regiões em que n retas podem dividir o plano. Caracterize x_n recursivamente.
- 3- Determine os quatro primeiros termos da sequência $x_{n+1} = 3x_n + 1$, sendo $x_0 = 3$.
- 4- Se $x_{n+1} = 2x_n$ e $x_1 = 3$, determine x_n .
- 5- Se $x_{n+1} = x_n + 3$ e $x_1 = 2$, determine x_n .

2.1- RECORRÊNCIAS LINEARES DE PRIMEIRA ORDEM

Uma relação de recorrência é dita *linear* quando a regra que relaciona cada termo com os anteriores também é *linear*. Ela é dita de *primeira ordem* quando ocorre quando cada termo é obtido em função unicamente do termo precedente, ou seja, quando a_{n+1} está em função de a_n .

Vale lembrar que resolver uma recorrência não é apenas descrever a recorrência, mas encontrar uma regra (fórmula fechada) que forneça cada termo a_n da sequência em função apenas de n e não dos termos anteriores. Essa regra será a solução da recorrência.

Como comparativo podemos citar o caso de uma PA. Sabemos que numa PA, cada termo é o anterior adicionado a uma razão r . Esta é a descrição da recorrência que existe, ou seja, estamos dizendo que para toda PA, temos:

$$a_{n+1} = a_n + r$$

Contudo, esta não é uma regra fechada que nos dê o valor de cada termo um função unicamente de n . Logo, resolver esta recorrência seria encontrar tal lei de formação em função de n . Para a PA, temos que tal lei é definida como:

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$$

Precisamos diferir as recorrências lineares em duas categorias. As homogêneas e as não homogêneas. As recorrências lineares homogêneas são aquelas que não possuem termo independente de a_n . O caso contrário define as não homogêneas.

Exemplo:

Resolva $x_{n+1} = nx_n$, $x_1 = 1$.

$$x_2 = 1x_1$$

$$x_3 = 2x_2$$

$$x_4 = 3x_3$$

$$\dots = \dots$$

$$x_n = (n - 1) \cdot x_{n-1}$$

Multiplicando todas as igualdades, temos:

$$x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot \dots \cdot x_n = 1x_1 \cdot 2x_2 \cdot 3x_3 \cdot \dots \cdot (n - 1) \cdot x_{n-1}$$

$$x_n = (n - 1)! x_1, \text{ como } x_1 = 1, \text{ finalizamos:}$$

$$x_n = (n - 1)!$$

ATIVIDADES

- 1- Resolva $x_{n+1} = 2x_n$, com $x_1 = 2$.
- 2- Determine o número máximo de regiões em que n retas podem dividir o plano.
- 3- Determine o produto dos n primeiros números pares positivos.

2.2- RECORRÊNCIAS LINEARES DE PRIMEIRA ORDEM NÃO HOMOGÊNEAS

Uma recorrência linear de primeira ordem é do tipo:

$$a_{n+1} = g(n)a_n + f(n), \text{ onde } g(n) \text{ e } f(n) \text{ são funções não nulas.}$$

Analisemos primeiramente o caso em que $g(n) = 1$, ou seja, da forma $a_{n+1} = a_n + f(n)$, que representa o tipo de recorrência mais fácil de resolver.

Com efeito, temos:

$$\begin{aligned}x_2 &= x_1 + f(1) \\x_3 &= x_2 + f(2) \\x_4 &= x_3 + f(3) \\&\dots = \dots \\x_n &= x_{n-1} + f(n-1)\end{aligned}$$

Somando, obtemos:

$$x_n = x_1 + \sum_{k=1}^{n-1} f(k). \quad (\text{LIMA, 2012b}).$$

Exemplo:

Resolva $x_{n+1} = x_n + 2^n, x_1 = 1$

$$\begin{aligned}x_2 &= x_1 + 2^1 \\x_3 &= x_2 + 2^2 \\x_4 &= x_3 + 2^3 \\&\dots = \dots \\x_n &= x_{n-1} + 2^{n-1} \\x_{n+1} &= x_n + 2^n\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x_2 + x_3 + x_4 + \dots + x_n &= x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + \dots + x_{n-1} + (2^1 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{n-1}) \\x_n &= x_1 + (2^1 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{n-1}), \text{ substituindo } x_1 = 1, \text{ temos:} \\x_n &= 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{n-1}, \text{ ou seja, a soma de uma PG de razão } q = 2 \text{ e } a_1 = 1.\end{aligned}$$

Logo, usando a fórmula da soma de PG, que é $S_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$, temos a solução.

$$\begin{aligned}x_n &= 1 \cdot \frac{2^n - 1}{2 - 1} \\x_n &= 2^n - 1\end{aligned}$$

ATIVIDADES

- 1- Resolva $x_{n+1} = x_n + n, x_1 = 0$.
- 2- Resolva $x_{n+1} = x_n + 3, x_1 = 2$.

Analisemos agora o caso em que $g(n) \neq 1$, ou seja, a recorrência seja da forma $a_{n+1} = g(n) \cdot a_n + f(n)$. Neste caso, mais complicado, precisaremos lançar mão de um teorema para nos dar suporte para solução. Vejamos este teorema conforme Lima (2012b).

Teorema 1. Se a_n é uma solução não nula de $x_{n+1} = g(n)x_n$, então, a substituição $x_n = a_n y_n$ transforma a recorrência

$$x_{n+1} = g(n)x_n \text{ em } y_{n+1} = y_n + h(n) \cdot [g(n) \cdot a_n]^{-1}$$

Prova. S substituição de $x_n = a_n y_n$ transforma

$$x_{n+1} = g(n) + h(n) \text{ em } a_{n+1} y_{n+1} = g(n) \cdot a_n y_n + h(n)$$

Mas, $a_{n+1} = g(n) \cdot a_n$, pois a_n é solução de $x_{n+1} = g(n)x_n$.

Portanto, a equação se transforma em

$$g(n) \cdot a_n \cdot y_{n+1} = g(n) \cdot a_n y_n + h(n) \\ \text{ou seja, } y_{n+1} = y_n + h(n) \cdot [g(n) \cdot a_n]^{-1} \blacksquare$$

Exemplo:

Resolva $x_{n+1} = 2x_n + 1$, com $x_1 = 2$.

Uma solução não nula de $x_{n+1} = 2x_n$ pode ser obtida com o uso de técnicas mostradas anteriormente. Assim, temos: $a_n = 2^{n-1}$. Pelo teorema, uma boa ideia será substituir $x_n = a_n y_n$ para transformar a recorrência. Portanto, fazemos:

$$x_n = a_n y_n$$

$$x_n = 2^{n-1} y_n$$

E substituímos este resultado na recorrência original.

$$x_{n+1} = 2x_n + 1 \\ 2^n y_{n+1} = 2(2^{n-1} y_n) + 1 \\ 2^n y_{n+1} = 2^n y_n + 1 \\ y_{n+1} = y_n + 2^{-n}$$

A nova recorrência pode ser resolvida, pois é mais simples. Resolvendo $y_{n+1} = y_n + 2^{-n}$, temos:

$$y_2 = y_1 + 2^{-1}$$

$$y_3 = y_2 + 2^{-2}$$

$$y_4 = y_3 + 2^{-3}$$

$$\dots = \dots$$

$$y_n = y_{n-1} + 2^{-(n-1)}$$

Somando, temos:

$$y_n = y_1 + 2^{-1} + 2^{-2} + 2^{-3} + \dots + 2^{-(n-1)}$$

$$y_n = y_1 + 2^{-1} \frac{(2^{-1})^{n-1} - 1}{2^{-1} - 1}$$

$$y_n = y_1 - 2^{1-n} + 1.$$

Como $x_n = 2^{n-1} y_n$ e $x_1 = 2$, temos $y_1 = 2$ e $y_n = 3 - 2^{1-n}$. Portanto,

$$x_n = 2^{n-1} y_n \rightarrow x_n = 2^{n-1} \cdot (3 - 2^{1-n}) \rightarrow x_n = 3 \cdot 2^{n-1} - 1.$$

ATIVIDADE

1- Resolva $x_{n+1} = 3x_n + 3^n$, com $x_1 = 2$.

2- **Torre de Hanói, indução e as recorrências matemáticas.**

A Torre de Hanói é bastante conhecida e pode facilmente ser fabricada ou mesmo encontrada em papelarias ou lojas de brinquedos pedagógicos. É um jogo formado por discos com um furo no centro e por uma base com três hastes verticais. Os discos de diâmetros diferentes se encaixam nas hastes. O jogo começa com os discos dispostos numa mesma haste de tal forma que discos

maiores sempre fiquem abaixo dos menores. O objetivo é transportar todos os discos para outra haste seguindo as regras:

- 1) Mexe-se uma única peça por vez;
- 2) Peças menores sempre ficam acima de peças maiores;
- 3) Não é permitido movimentar uma peça que esteja abaixo de outra.

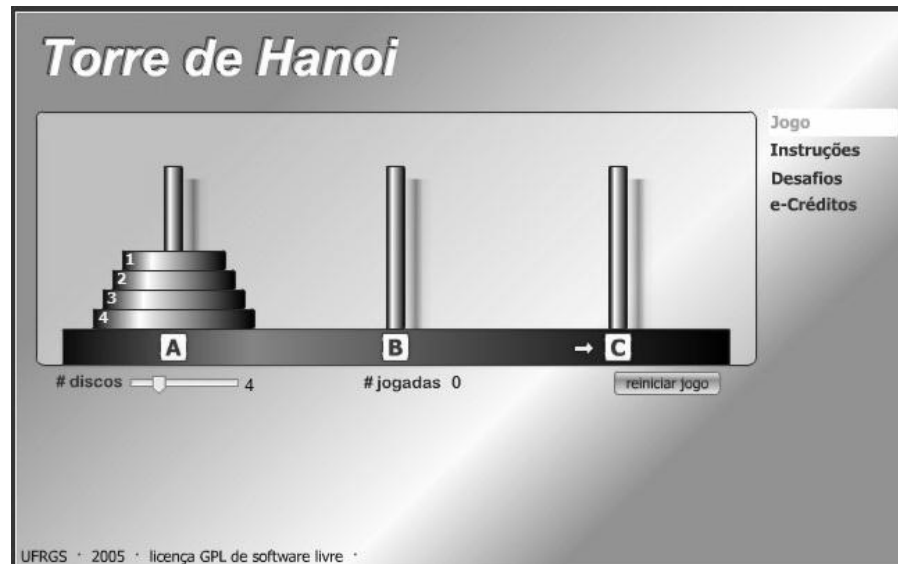


Figura 1. Torre de Hanói. Jogo Online.
Fonte: <http://www.ufrgs.br/psicoeduc/hanoi/>

Assim, definido o jogo, tente resolvê-lo utilizando 3 discos. Quantos lances você realizou? Quantos lances outra pessoa realizou para resolver o mesmo problema? Qual foi o menor número de lances encontrados para resolver a Torre com 3 discos?

O próximo passo é fazer o mesmo agora com 4 discos. Quantos lances você realizou? Quantos lances outra pessoa realizou para resolver o mesmo problema? Qual foi o menor número de lances encontrados para resolver a Torre com 4 discos?

Faça ainda com 5 discos. Quantos lances você realizou? Quantos lances outra pessoa realizou para resolver o mesmo problema? Qual foi o menor número de lances encontrados para resolver a Torre com 5 discos?

Pela sua observação, você pode dizer se o jogo tem solução para qualquer número “ n ” de discos?

Qual o número mínimo L_n de lances para resolver a Torre de Hanói com n discos? Essa questão não é tão óbvia assim.

Para encontrar um modelo que solucione a questão anterior precisamos primeiramente fazer algumas observações.

Para resolver o problema com 3 discos podemos seguir os seguintes passos: 1C, 2B, 1B, 3C, 1A, 2C, 1C. Como mostra a figura 2, sendo “1C” o disco 1 na haste C e a sequência expressando a ordem das jogadas.

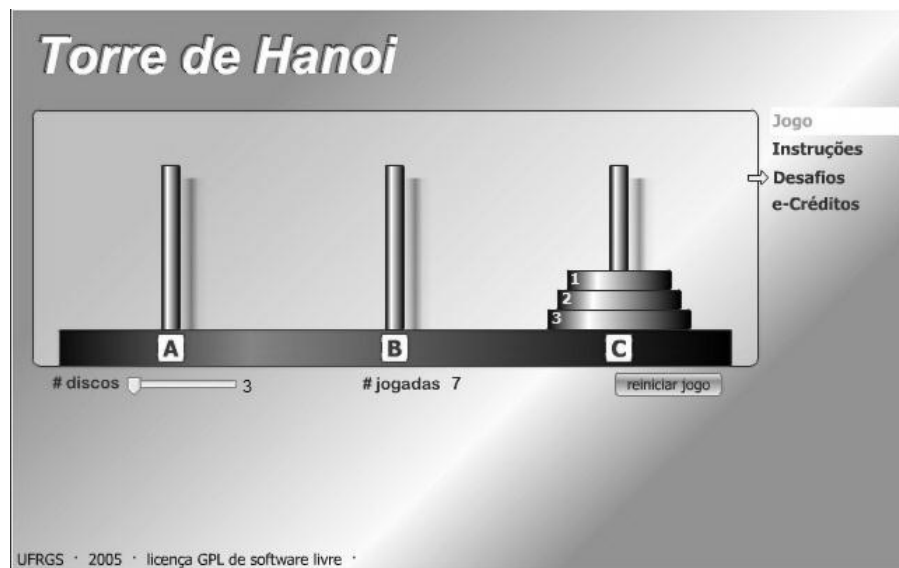


Figura 2. Torre de Hanói. Jogo Online.
Fonte: <http://www.ufrgs.br/psicoeduc/hanoi/>

No caso de aumentarmos um disco o processo pode ser realizado de modo similar ao primeiro, ou seja, transportamos os três discos iniciais para haste C como feito anteriormente. Daí, temos que realizar mais um lance transportando o disco 4 para a haste B. Depois realizamos todo o processo de deslocar os três discos de C para B.

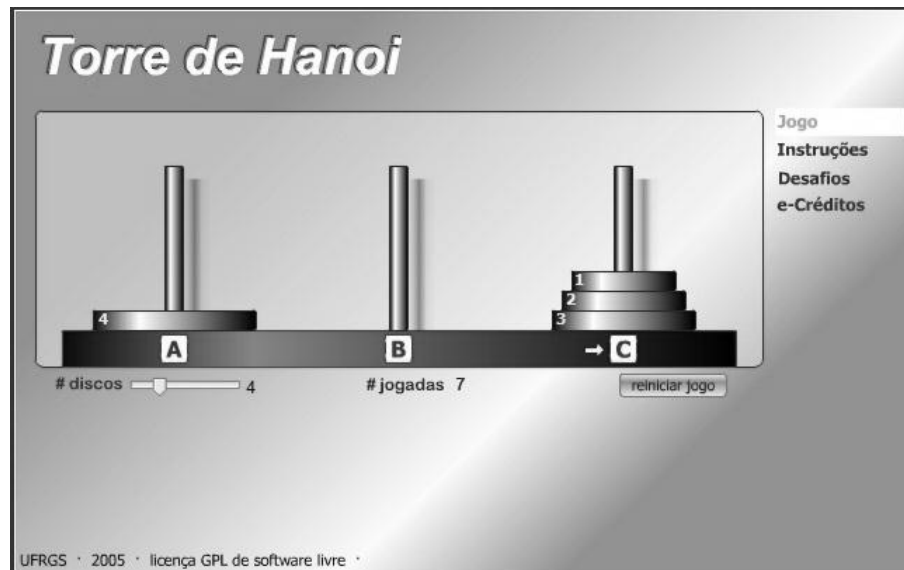


Figura 3. Torre de Hanói. Jogo Online.
Fonte: <http://www.ufrgs.br/psicoeduc/hanoi/>

Assim, estamos diante de uma recorrência, ou seja, para resolver o problema com 4 discos temos que resolver para 3 discos primeiramente, realizarmos mais um lance e depois resolvermos novamente para 3 discos. Logo, o número de lances para resolver a Torre com 4 discos é dado por $L_4 = L_3 + 1 + L_3$, ou seja, $L_4 = 2L_3 + 1$. De igual forma, temos: $L_5 = 2L_4 + 1$. De modo geral, $L_n = 2L_{n-1} + 1$. Isso significa que para resolver o problema para um número n de peças, devemos “passar” duas vezes pela solução do problema com um número de $n - 1$ peças e adicionar uma unidade. Isso pode dar origem a uma sequência numérica das soluções $L_3, L_4, L_5, \dots, L_n$. A propósito, você sabe o que é uma sequência numérica?

Até agora vimos que as soluções são dadas por meio de recorrências. Tente encontrar o modelo L_n em função de n a partir dos conhecimentos de recorrência linear de 1º ordem estudados até o momento.

Qual é o modelo L_n encontrado?

Use o Princípio da Indução Finita para comprovar que o modelo L_n é válido para todo $n \in \mathbb{N}^*$.

►►► **COMPLEMENTO**

Para saber mais sobre a Torre de Hanoi e sua solução, assista à seguinte vídeo aula:

Álgebra (Torre de Hanoi) – Nível 2.
 disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=9eLkdUFzCG8>

Solução Torre de Hanoi

Vamos transformar a recorrência $L_{n+1} = 2L_n + 1$ em uma mais simples de ser resolvido aplicando o teorema visto neste capítulo.

Seja a_n uma solução não nula de $L_{n+1} = 2L_n$. Aplicando as técnicas vistas anteriormente, encontramos: $a_n = 2^{n-1}$. Pelo teorema 1, uma boa ideia será substituir $L_n = a_n y_n$ para transformar a recorrência. Portanto, fazemos:

$$\begin{aligned} L_n &= a_n y_n \\ L_n &= 2^{n-1} y_n \end{aligned}$$

E substituímos este resultado na recorrência original.

$$\begin{aligned} L_{n+1} &= 2L_n + 1 \\ 2^n y_{n+1} &= 2(2^{n-1} y_n) + 1 \\ 2^n y_{n+1} &= 2^n y_n + 1 \\ y_{n+1} &= y_n + 2^{-n} \end{aligned}$$

A nova recorrência pode ser resolvida, pois é mais simples. Resolvendo $y_{n+1} = y_n + 2^{-n}$, temos:

$$\begin{aligned} y_2 &= y_1 + 2^{-1} \\ y_3 &= y_2 + 2^{-2} \\ y_4 &= y_3 + 2^{-3} \\ &\dots = \dots \\ y_n &= y_{n-1} + 2^{-(n-1)} \end{aligned}$$

Somando, temos:

$$\begin{aligned} y_n &= y_1 + 2^{-1} + 2^{-2} + 2^{-3} + \dots + 2^{-(n-1)} \\ y_n &= y_1 + 2^{-1} \frac{(2^{-1})^{n-1} - 1}{2^{-1} - 1} \\ y_n &= y_1 - 2^{1-n} + 1. \end{aligned}$$

Como $L_n = 2^{n-1} y_n$ e $L_1 = 1$, temos $y_1 = 1$ e $y_n = 2 - 2^{1-n}$. Portanto, $L_n = 2^{n-1} y_n \rightarrow L_n = 2^{n-1} \cdot (2 - 2^{1-n}) \rightarrow L_n = 2^n - 1$. ■

Usando o Princípio da Indução Finita, podemos mostrar a validade da lei $L_n = 2^n - 1$ para todo $n \in \mathbb{N}^*$.

1) Verificamos se é verdadeira L_1 :

$$L_1 = 2^1 - 1 = 1 \text{ (verdadeiro)}$$

2) Supondo L_n verdadeira, ou seja:

$$L_n = 2^n - 1 \text{ (hipótese de indução).}$$

Mostremos que isso implica a validade de L_{n+1} .

Sabemos, pela lei de recorrência, que $L_{n+1} = 2L_n + 1$. Esta relação está bem estabelecida. Assim, substituímos nela nossa *hipótese de indução*. Temos:

$$\begin{aligned} L_{n+1} &= 2L_n + 1 \\ L_{n+1} &= 2(2^n - 1) + 1 \\ L_{n+1} &= 2^{n+1} - 2 + 1 \\ L_{n+1} &= 2^{n+1} - 1 \end{aligned}$$

Isso mostra que se a regra vale para L_n ela também vale para L_{n+1} . ■



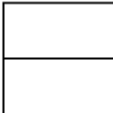

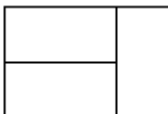


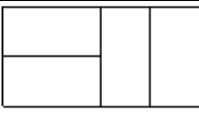
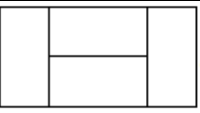
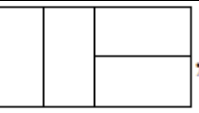
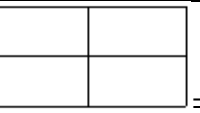
2.3- RECORRÊNCIAS LINEARES DE SEGUNDA ORDEM

Uma relação de recorrência é dita de *segunda ordem* quando ocorre que cada termo é obtido em função dos dois termos precedentes, ou seja, quando a_{n+2} está em função de a_{n+1} e a_n .

Vamos tentar ilustrar e desenvolver o raciocínio a partir da resolução do seguinte problema:

De quantas maneiras podemos guardar n dominós 2x1 em uma caixa 2xn?

Vamos chamar de x_n o número de maneiras de distribuir os n dominós na caixa. Vejamos alguns casos.

n	x_n
1	 =1
2	 ,  =2
3	 ,  ,  =3
4	 ,  ,  ,  ,  =5
...	...
n	$x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$, com $x_1 = 1$ e $x_0 = 1$ (por convenção)

Notemos que há uma lei de recorrência que define a sequência. Se observarmos, para cada novo “espaço” na caixa, temos que a quantidade de posicionar os dominós são a soma das quantidades das duas possibilidades anteriores. Ou seja, se a caixa for 2x5, teremos $5+3=8$ possibilidades. Se a caixa for 2x6, teremos $8+5=13$ possibilidades e assim por diante.

Em símbolos, podemos ilustrar assim. Tirando a peça final de $n = 4$, temos que o resultado são as possibilidades de $n = 3$ somado com $n = 2$.

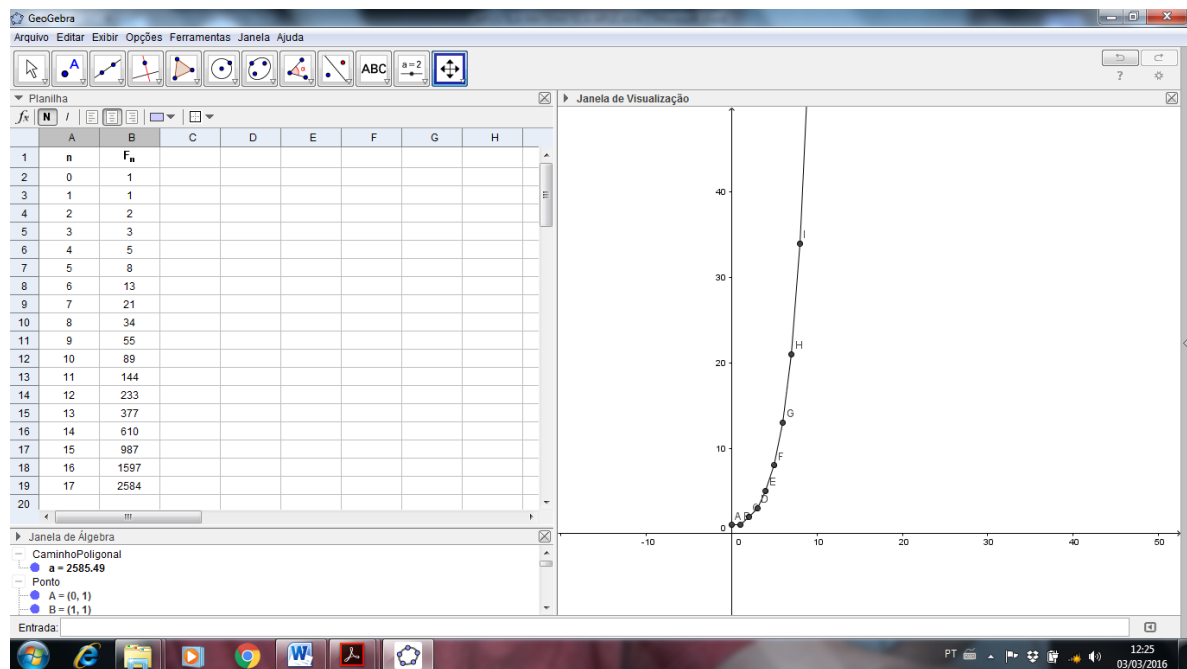
$$\left\{ \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline & & \\ \hline \end{array} , \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array} , \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline & & \\ \hline \end{array} \right\} \cup \left\{ \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array} , \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array} \right\}$$

Assim, a situação apresentada segue a seguinte recorrência:

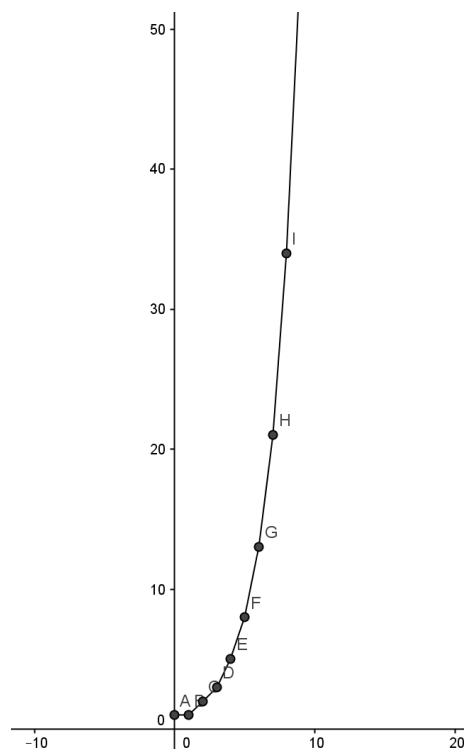
$$\begin{cases} x_0 = 1, x_1 = 1 \\ x_{n+2} = x_{n+1} + x_n \end{cases}$$

Para buscar um meio de resolver a recorrência, analisaremos o comportamento da sequência em questão que pode ser escrita como (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34,...). Trata-se da famosa sequência de Fibonacci. Vamos construí-la usando o recurso do programa *geogebra* para visualizar uma espécie de ajuste de

curva que nos possibilite identificar o tipo de função que pode modelar adequadamente a recorrência.



**Figura 4. Fibonacci em tabela e caminho poligonal no *geogebra*.
Fonte: autor.**



**Figura 4. Fibonacci em caminho poligonal no *geogebra*.
Fonte: autor.**

Observando o comportamento da sequência podemos “arriscar” que sua curva se aproxima consideravelmente de uma curva exponencial. Podemos traçar, para comparação, no mesmo plano cartesiano, o gráfico de uma função

exponencial de base a e observar seu gráfico quando a é um número próximo ao número e (de Euler).

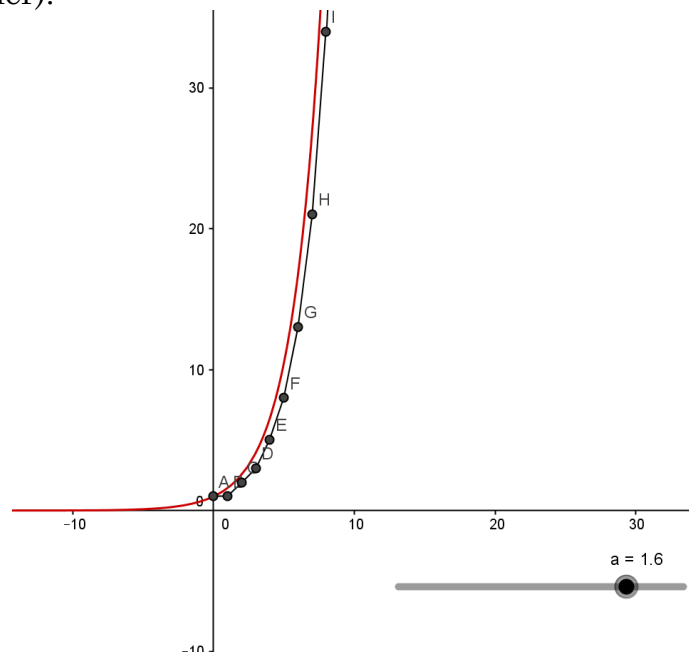


Figura 5. Função $y = a^x$, com a próximo de “ e ” e Fibonacci.
Fonte: autor.

Notamos que a função, pelo menos no intervalo observado, pode modelar adequadamente a situação. De fato, uma função exponencial ou uma PG podem modelar uma recorrência de segunda ordem.

Uma função exponencial ou PG pode ser obtida mediante uma fórmula como $y = a \cdot q^n$. Assim, tomando y como solução da recorrência $x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$ com $x_0 = 1, x_1 = 1$, temos:

$$\begin{aligned} a \cdot q^{n+2} &= a \cdot q^{n+1} + a \cdot q^n \\ q^{n+2} &= q^{n+1} + q^n \\ q^2 &= q + 1 \\ q^2 - q - 1 &= 0 \\ q &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ q' &= \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \\ q'' &= \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

Contudo, nenhum dessas raízes isoladas quando substituídas em $y = a \cdot q^n$ nos dá um valor de a adequado, e, portanto, um modelo adequado para recursão. Neste ponto, precisamos usar mais uma técnica para concluirmos o processo. Sabemos que a soma dos elementos de duas recorrências lineares de segunda ordem também gera uma de segunda ordem.

Vejamos na tabela um exemplo em que teremos nossa sequência F_n que é recursiva de segunda ordem e R_n também recursiva de segunda ordem. Mostraremos que a soma $F_n + R_n$ igualmente é uma recorrência de segunda ordem.

n	F _n	R _n	F _n + R _n
0	1	1	2
1	1	3	4
2	2	4	6
3	3	7	10
4	5	11	16
5	8	18	26
6	13	29	42
7	21	47	68
8	34	76	110
9	55	123	178
10	89	199	288
11	144	322	466
12	233	521	754
13	377	843	1220

Figura 6. $F_n + R_n$.

Fonte: autor.

Utilizando tal informação, faremos nosso modelo mediante a soma de duas funções usando como base q' e q'' .

$$y = a \cdot (q')^n + b \cdot (q'')^n$$

$$y = a \cdot \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^n + b \cdot \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^n$$

Quais são os valores de a e b ? Podemos descobrir sabendo que quando $n = 0$, $y = 1$ e $n = 1$, $y = 1$. Substituindo na equação acima, temos:

$$\begin{cases} a + b = 1 \\ \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \cdot a + \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \cdot b = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a + b = 1 & (1) \\ (1 + \sqrt{5}) \cdot a + (1 - \sqrt{5}) \cdot b = 2 & (2) \end{cases}$$

$$a = 1 - b \quad (3)$$

Substituindo (3) em (2), temos:

$$\begin{aligned} (1 + \sqrt{5}) \cdot (1 - b) + (1 - \sqrt{5}) \cdot b &= 2 \\ (1 + \sqrt{5}) - b(1 + \sqrt{5}) + (1 - \sqrt{5}) \cdot b &= 2 \\ (1 + \sqrt{5}) + b(-1 - \sqrt{5} + 1 - \sqrt{5}) &= 2 \\ \sqrt{5} - 2\sqrt{5}b &= 1 \\ -2\sqrt{5}b &= 1 - \sqrt{5} \\ 2\sqrt{5}b &= \sqrt{5} - 1 \\ b &= \frac{\sqrt{5} - 1}{2\sqrt{5}} \end{aligned}$$

Como $a = 1 - b$, temos:

$$\begin{aligned} a &= 1 - \left(\frac{\sqrt{5} - 1}{2\sqrt{5}}\right) \\ a &= \frac{2\sqrt{5} + 1 - \sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \\ a &= \frac{1 + \sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \end{aligned}$$

Logo, temos nosso modelo procurado.

$$\begin{aligned} y &= a \cdot \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^n + b \cdot \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^n \\ y &= \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\right) \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\right) \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^n \end{aligned}$$

Ou ainda:

$$y = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}$$

O problema serviu para ilustrar que a cada recorrência linear de segunda ordem homogênea da forma $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$ está associada a uma equação do segundo grau $r^2 + pr + q = 0$, chamada de equação característica. Completaremos mostrando um teorema e sua prova de acordo com Lima (2012b).

Teorema 2. Se as raízes de $r^2 + pr + q = 0$ são r_1 e r_2 , então, $a_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n$ é solução da recorrência $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$, quaisquer que sejam os valores das constantes C_1 e C_2 .

Prova. Substituindo $a_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n$ na recorrência $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$, obtemos, agrupando convenientemente os termos,

$$\begin{aligned} C_1 r_1^n (r_1^2 + pr_1 + q) + C_2 r_2^n (r_2^2 + pr_2 + q) \\ = C_1 r_1^n 0 + C_2 r_2^n 0 \end{aligned}$$

Exemplo:

Resolver a recorrência $a_n = -3a_{n-1} + 10a_{n-2}$, com $a_1 = 2$ e $a_2 = 1$

A equação característica $r^2 + 3r - 10 = 0$ tem raízes $r_1 = 2$ e $r_2 = -5$

De acordo com o teorema 2, as soluções da recorrência são da forma $a_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n$, ou seja, $a_n = C_1 2^n + C_2 (-5)^n$ como $a_1 = 2$ e $a_2 = 1$ podemos encontrar o valor de C_1 e C_2 .

$$\begin{cases} 2 = C_1 \cdot 2 + C_2 \cdot (-5) & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 = C_1 \cdot 4 + C_2 \cdot 25 & (2) \end{cases}$$

$$C_2 = \frac{2C_1 - 2}{5} \quad (3)$$

Substituindo (3) em (2), temos:

$$\begin{aligned}1 &= C_1 \cdot 4 + \frac{2C_1 - 2}{5} \cdot 25 \\1 &= C_1 \cdot 4 + (2C_1 - 2) \cdot 5 \\1 &= 4C_1 + 10C_1 - 10 \\11 &= 14C_1 \\C_1 &= \frac{11}{14} \quad (4)\end{aligned}$$

Substituindo (4) em (3), temos:

$$\begin{aligned}C_2 &= \frac{2C_1 - 2}{5} \\C_2 &= \frac{2 \cdot \frac{11}{14} - 2}{5} \\C_2 &= \frac{\frac{11}{7} - 2}{5} \\C_2 &= \frac{\frac{11 - 14}{7}}{5} \\C_2 &= \frac{-3}{35}\end{aligned}$$

Substituindo C_1 e C_2 em nossa equação de recorrência, temos:

$$a_n = \frac{11}{14} 2^n + \frac{-3}{35} (-5)^n$$

Observação: Se as raízes de $r^2 + pr + q = 0$ são r_1 e r_2 , além disso, $r_1 = r_2 = r$ então, toda solução da recorrência $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$ é da forma $a_n = C_1 r_1^n + C_2 n r_2^n$ quaisquer que sejam os valores das constantes C_1 e C_2 . O processo de solução torna-se análogo ao que foi visto anteriormente. (LIMA, 2012b).

ATIVIDADES

- 1- Determine as soluções da recorrência $a_{n+2} + 3a_{n+1} - 4a_n$; $a_1 = 1$ e $a_2 = 4$
- 2- Determine a lei de recorrência da sequência com primeiro e segundo termos, respectivamente 1 e 2, tal que o termo geral é obedecido por $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}$.
- 3- Resolva a relação de recorrência $a_n + 5a_{n-1} + 6a_{n-2} = 0$, com $a_1 = 0$ e $a_2 = 2$
- 4- Resolva a relação de recorrência $a_n - 2a_{n-1} - a_{n-2} = 0$ com $a_0 = 1$ e $a_1 = 2$
- 5- De quantas maneiras uma pessoa pode subir n degraus se ela tiver a opção de subir um ou dois degraus por vez?

►►► **COMPLEMENTO**

Para complementar o aprendizado de recorrência, recomendamos que o aluno assista às seguintes vídeo aulas:

PAPMEM – Janeiro de 2015 – Recorrência. IMPA.

disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=YE6K7SNrcRY>

MA12 – Matemática discreta – Recorrências Lineares de Primeira Ordem I.

disponível em: [http://www.profmat-sbm.org.br/images/videos/ma12 -
_matematica_discreta/Recorrencias_Lineares_de_Primeira_Ordem_I.mp4](http://www.profmat-sbm.org.br/images/videos/ma12_-_matematica_discreta/Recorrencias_Lineares_de_Primeira_Ordem_I.mp4)

MA12 – Matemática discreta – Recorrências Lineares de Primeira Ordem II.

disponível em: [http://www.profmat-sbm.org.br/images/videos/ma12 -
_matematica_discreta/Recorrencias_Lineares_de_Primeira_Ordem_II.mp4](http://www.profmat-sbm.org.br/images/videos/ma12_-_matematica_discreta/Recorrencias_Lineares_de_Primeira_Ordem_II.mp4)

MA12 – Matemática discreta – Recorrências Lineares de Primeira Ordem III.

disponível em: [http://www.profmat-sbm.org.br/images/videos/ma12 -
_matematica_discreta/Recorrencias_Lineares_de_Primeira_Ordem_III.mp4](http://www.profmat-sbm.org.br/images/videos/ma12_-_matematica_discreta/Recorrencias_Lineares_de_Primeira_Ordem_III.mp4)

MA12 – Matemática discreta – Recorrências Lineares de Primeira Ordem IV.

disponível em: [http://www.profmat-sbm.org.br/images/videos/ma12 -
_matematica_discreta/Recorrencias_Lineares_de_Primeira_Ordem_IV.mp4](http://www.profmat-sbm.org.br/images/videos/ma12_-_matematica_discreta/Recorrencias_Lineares_de_Primeira_Ordem_IV.mp4)

MA12 – Matemática discreta – Recorrências Lineares de Segunda Ordem I.

disponível em: [http://www.profmat-sbm.org.br/images/videos/ma12 -
_matematica_discreta/Recorrencias_Lineares_de_Segunda_Ordem_I.mp4](http://www.profmat-sbm.org.br/images/videos/ma12_-_matematica_discreta/Recorrencias_Lineares_de_Segunda_Ordem_I.mp4)

MA12 – Matemática discreta – Recorrências Lineares de Segunda Ordem II.

disponível em: [http://www.profmat-sbm.org.br/images/videos/ma12 -
_matematica_discreta/Recorrencias_Lineares_de_Segunda_Ordem_II.mp4](http://www.profmat-sbm.org.br/images/videos/ma12_-_matematica_discreta/Recorrencias_Lineares_de_Segunda_Ordem_II.mp4)

MA12 – Matemática discreta – Recorrências Lineares de Segunda Ordem III.

disponível em: [http://www.profmat-sbm.org.br/images/videos/ma12 -
_matematica_discreta/Recorrencias_Lineares_de_Segunda_Ordem_III.mp4](http://www.profmat-sbm.org.br/images/videos/ma12_-_matematica_discreta/Recorrencias_Lineares_de_Segunda_Ordem_III.mp4)

CAPÍTULO III

INTRODUÇÃO A LÓGICA MATEMÁTICA

*O pensamento lógico pode levar você de A a B,
mas a imaginação te leva a qualquer parte do
Universo – Albert Einstein*

Lógica (do grego – λογική – logos) tem dois significados principais: discute o uso de raciocínio em alguma atividade e é o estudo normativo, filosófico do raciocínio válido. No segundo sentido, a lógica é discutida principalmente nas disciplinas de filosofia, matemática e ciência da computação. (WIKIPÉDIA, 2016).

Proposição. Chama-se proposição ou sentença toda declaração que pode ser classificada como verdadeira ou falsa. Também chamamos uma proposição de sentença fechada. São proposições: $5 < 7$, $-1 \in \mathbb{Z}$, a lua é um satélite da Terra, Porto Velho é a capital de Rondônia. Por outro lado, não são proposições: $(5+4) \times 3$ (pois não pode ser classificada em verdadeiro ou falso), $\sqrt{5} \in \mathbb{Q}$? (é uma frase interrogativa), $4x+1=3$ (depende do valor de x).

Segundo Alencar Filho (2002), a Lógica Matemática adota como regras fundamentais do pensamento dois princípios básicos: 1) Princípio da não contradição afirmando que uma proposição não pode ser verdadeira (V) e falsa (F) ao mesmo tempo. 2) Princípio do terceiro excluído que afirma toda proposição ser verdadeira (V) ou falsa (F), isto é, verifica-se sempre um dos dois casos e não há a possibilidade de um terceiro.

Valor lógico. Chama-se valor lógico de uma proposição a afirmação quando a sua validade ou falsidade. Representaremos abreviadamente os valores lógicos verdadeiro ou falso pelas respectivas letras V ou F.

Conectivos. São palavras usadas para formar (conectar) novas proposições a partir de outras. Os conectivos mais usuais são: “e”, “ou”, “não”, “se...então...”, “...se e somente se...”.

Negação. A partir de uma proposição p podemos construir sua negação que será indicada com o símbolo $\sim p$.

Exemplo:

Seja p a proposição: Quito é a capital do Brasil. A negação, $\sim p$, ficaria, Quito não é a capital do Brasil. p : O sol é uma estrela. $\sim p$: O sol não é uma estrela. p : $5 \neq 3$. $\sim p$: $5 = 3$. p : $8 > 5$. $\sim p$: $8 \leq 5$.

Vamos fazer o que chamamos de *tabela-verdade* da proposição p e $\sim p$.

P	$\sim p$
V	F
F	V

ATIVIDADES

- 1- Qual das sentenças abaixo são proposições?
 - a) $5.4 = 20$
 - b) $2 + 7.3 = 5.4 + 3$
 - c) $3+4 > 0$
 - d) $11 - 5. 8$
 - e) $3x - 8 = 19$

- 2- Determine o valor lógico (V ou F) de cada uma das seguintes proposições.
 - a) O número 17 é primo.
 - b) Fortaleza é a capital do maranhão.
 - c) $(3 + 5)^2 = 3^2 + 5^2$.
 - d) 0,131313...é uma dízima periódica simples.
 - e) A expressão $n^2 - n + 41$, ($n \in \mathbb{N}$) só produz números primos.
 - f) Todo número divisível por 5 termina em 5.
 - g) O produto de dois número ímpares é um número ímpar.
 - h) $1+3+5+\dots+(2n-1) = n^2$.

- 3- Qual é a negação de cada uma das seguintes proposições?
 - a) $3. 8 = 24$.
 - b) Carlos é mecânico.
 - c) O Sol é um cometa.
 - d) $4.3.2.1 > 20$.
 - e) $3 \mid 9$.

A partir de proposições dadas podemos construir novas proposições mediante o emprego de dois símbolos lógicos chamados conectivos: conectivo \wedge (lê-se e) e o conectivo \vee (lê-se ou). (IEZZI, 2004).

Conjunção. Colocando o conectivo \wedge entre duas proposições, obtemos uma nova proposição $p \wedge q$ denominada *conjunção* das sentenças p e q . Alguns exemplos podem nos ilustrar o uso da proposição.

Exemplo:

$$\underbrace{\begin{cases} p: A \text{ neve é branca} \\ q: 2 < 5 \end{cases}}_{p \wedge q: A \text{ neve é branca e } 2 < 5}$$

Como p é V e q é V, e $p \wedge q$ também V, tivemos o seguinte resultado:
 $V \wedge V = V$.

$$\underbrace{\begin{cases} p: \text{um quadrado de lado } a \text{ tem diagonal medindo } 2a \\ q: \text{um quadrado de lado } a \text{ tem área } a^2 \end{cases}}_{p \wedge q: \text{um quadrado de lado } a \text{ tem diagonal medindo } 2a \text{ e área } a^2}$$

Como p é F e q é V, e $p \wedge q$ é F, tivemos o seguinte resultado: $F \wedge V = F$. Podemos construir a tabela verdade da conjunção e da seguinte forma:

P	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Há um critério para nos auxiliar a estabelecer o valor lógico da conjunção a partir dos valores das proposições. “A conjunção $p \wedge q$ é verdadeira se p e q são ambas verdadeiras; se ao menos uma delas for falsa, então $p \wedge q$ é falsa”. (IEZZI, 2004, p. 4).

Disjunção. Colocando o conectivo \vee entre duas proposições, obtemos uma nova proposição $p \vee q$ denominada *disjunção* das sentenças p e q .

Exemplo:

$$\underbrace{\left\{ \begin{array}{l} p: \text{Paris é a capital da França} \\ q: 9 - 4 = 5 \end{array} \right.}_{p \vee q: \text{Paris é a capital da França ou } 9 - 4 = 5}$$

Como p é V e q é V, e $p \vee q$ também V, temos o seguinte resultado: $V \vee V = V$.

$$\underbrace{\left\{ \begin{array}{l} p: \text{Carlos Gomes nasceu na Bahia} \\ q: \sqrt{-1} = 1 \end{array} \right.}_{p \vee q: \text{Carlos Gomes nasceu na Bahia ou } \sqrt{-1} = 1}$$

Como p é F e q é F, e $p \vee q$ também F, temos o seguinte resultado: $F \vee F = F$.

Há um critério para nos auxiliar a estabelecer o valor lógico da disjunção a partir dos valores das proposições. “A disjunção $p \vee q$ é verdadeira se ao menos uma das proposições p ou q é verdadeira; se p e q são ambas falsas, então $p \vee q$ é falsa”. (IEZZI, 2004, p. 5).

Abaixo mostraremos a tabela verdade da disjunção.

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

ATIVIDADE

- 1- Classificar em verdadeira ou falsa cada uma das seguintes proposições compostas.
- $3 > 1$ e $4 > 2$
 - $3 > 1$ ou $3 = 1$
 - $2 \mid 4$ ou $2 \mid (4+1)$
 - $3(5+2) = 3 \cdot 5 + 3 \cdot 2$ e $3 \mid 7$
 - $\frac{1}{2} < \frac{3}{4}$ ou $5 \mid 11$
 - $(-1)^6 = -1$ e $2^5 < (-2)^7$
 - $\sqrt{16} = 6$ ou $\text{mdc}(4, 7) = 2$.

Conjunção exclusiva. Uma leve variação da disjunção ou é a conhecida como “ou exclusivo”. Colocando o conectivo \simeq entre duas proposições, obtemos uma nova proposição $p \simeq q$ denominada *disjunção exclusiva* das sentenças p e q .

Alencar Filho (2002) nos mostra que, de modo geral, $p \simeq q$ representa “ou p ou q ” ou “ p ou q , mas não ambos”, cujo valor lógico é verdade somente quando p é verdadeira ou q é verdadeira, mas não quando p e q são ambas verdadeiras; e falso quando p e q são ambas verdadeiras ou ambas falsas. Veja a tabela verdade abaixo.

p	q	$p \simeq q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Condicionais. Podemos construir outras proposições a partir de outros símbolos lógicos chamados de condicionais. O condicional “se...então...” cujo símbolo é \rightarrow , e o condicional “...se e somente se...” cujo símbolo é \leftrightarrow .

Condicional “se...então...”. Colocando a condicional \rightarrow entre duas proposições p e q obtemos uma nova proposição $p \rightarrow q$, que se lê: “se p então q ”, “ p é condição necessária para q ”, “ q é condição suficiente para p ”.

Exemplo:

$$\underbrace{\begin{cases} p: \text{Galois morreu em duelo} \\ q: \pi \text{ é um número real} \end{cases}}_{p \rightarrow q: \text{Se Galois morreu em duelo, então } \pi \text{ é um número real}}$$

Como p é V e q é V, e $p \rightarrow q$ também V, temos o seguinte resultado: $V \rightarrow V = V$.

Iezzi (2004, p. 6) nos mostra um critério para nos auxiliar a estabelecer o valor lógico da condicional a partir dos valores das proposições. “O condicional $p \rightarrow q$ é falso somente quando p é verdadeiro e q é falsa; caso contrário, $p \rightarrow q$ é verdadeiro. Vamos resumir o critério na tabela verdade da proposição.

P	q	$p \rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Condicional “...se e somente se...”. Colocando a condicional \leftrightarrow entre duas proposições p e q obtemos uma nova proposição $p \leftrightarrow q$, que se lê: “ p se e somente se q ”, “ p é condição necessária e suficiente para q ”, “ q é condição necessária e suficiente para p ” ou “se p então q e reciprocamente”.

Exemplo:

$$\underbrace{\begin{cases} p: \text{Lisboa é a capital de Portugal} \\ q: \text{Vasco da Gama descobriu o Brasil} \end{cases}}_{p \leftrightarrow q: \text{Lisboa é a capital de Portugal se e somente se Vasco da Gama descobriu o Brasil}}$$

Como p é V, q é F, e $p \leftrightarrow q$ é F, temos o seguinte resultado: $V \leftrightarrow F = F$.

Iezzi (2004, p. 7) nos mostra um critério para nos auxiliar a estabelecer o valor lógico da condicional a partir dos valores das proposições. “O condicional \leftrightarrow é verdadeiro somente quando p e q são ambas verdadeiras ou ambas falsas; se isso não acontecer o condicional \leftrightarrow é falso.”

Assim, a tabela verdade da proposição $p \leftrightarrow q$ é a que está abaixo.

P	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

ATIVIDADES

- 1- Seja as proposições p : Está frio e q : Está chovendo. Traduzir para a linguagem corrente as seguintes proposições:
 - a) $\sim p$
 - b) $\sim \sim p$
 - c) $p \wedge q$
 - d) $p \vee q$
 - e) $q \leftrightarrow p$
 - f) $p \rightarrow \sim q$
 - g) $p \vee \sim q$
 - h) $\sim p \wedge \sim q$
 - i) $p \leftrightarrow \sim q$
 - j) $p \wedge \sim q \rightarrow p$

- 2- Sejam as proposições p : Marcos é alto e q : Marcos é elegante. Traduzir para a linguagem simbólica as seguintes proposições:
 - a) Marcos é alto e elegante.
 - b) Marcos é alto, mas não é elegante.
 - c) Não é verdade que Marcos é baixo ou elegante.
 - d) Marcos não é nem alto e nem elegante.
 - e) Marcos é alto ou é baixo e elegante.
 - f) É falso que Marcos é baixo ou que não é elegante.

- 3- Classificar em verdadeira ou falsa cada uma das proposições abaixo.
 - a) $2 - 1 = 1 \rightarrow 5 + 7 = 3 \cdot 4$
 - b) $2^2 = 4 \leftrightarrow (-2)^2 = 4$
 - c) $5 + 7.1 = 10 \rightarrow 3.3 = 9$
 - d) $\text{mdc}(3, 6) = 1 \leftrightarrow 4$ é número primo
 - e) $p \rightarrow (q \vee r)$, (Sabendo que p e q são verdadeiras e r é falsa).

Tautologias. Seja v uma proposição formada a partir de outras (p , q , r , ...), mediante o emprego de conectivos (\wedge ou \vee) ou de modificador (\sim) ou de condicionais (\rightarrow ou \leftrightarrow). Dizemos que v é uma tautologia ou proposição logicamente verdadeira, quando v tem o valor lógico V (verdadeiro) independente dos valores lógicos de p , q , r , etc. (IEZZI, 2004, p. 8).

Assim, na tabela verdade só pode aparecer V na coluna do v . Vejamos o exemplo de uma tautologia abaixo.

$$(p \wedge \sim p) \rightarrow (q \vee p)$$

p	q	$\sim p$	$p \wedge \sim p$	$q \vee p$	$(p \wedge \sim p) \rightarrow (q \vee p)$
V	V	F	F	V	V
V	F	F	F	V	V
F	V	V	F	V	V
F	F	V	F	F	V

Proposições logicamente falsas (contradições). Seja f uma proposição formada a partir de outras (p, q, r, \dots), mediante o emprego de conectivos (\wedge ou \vee) ou de modificador (\sim) ou de condicionais (\rightarrow ou \leftrightarrow). Dizemos que f é uma proposição logicamente falsa ou contradição, quando f tem o valor lógico F (falso) independente dos valores lógicos de $p, q, r, \text{ etc.}$ (IEZZI, 2004, p. 9). No exemplo anterior, podemos analisar a parte $(p \wedge \sim p)$ e veremos que é uma proposição logicamente falsa. Vejamos sua tabela verdade.

P	Q	$\sim p$	$p \wedge \sim p$
V	V	F	F
V	F	F	F
F	V	V	F
F	F	V	F

Relação de implicação. Dadas as proposições p e q , dizemos que “ p implica q ” quando na tabela de p e q não ocorro VF em nenhuma linha, isto é, quando não temos simultaneamente p verdadeira e q falsa. (IEZZI, 2004, p. 10).

Exemplo:

$$2 \mid 4 \Rightarrow 2 \mid 4.5$$

Podemos trocar a implicação \Rightarrow pelo condicional \rightarrow . Assim, se o condicional \rightarrow for verdadeiro, então a implicação \Rightarrow também será.

$2 \mid 4 \rightarrow 2 \mid 4.5$. Seja p : $2 \mid 4$, e q : $2 \mid 4.5$, temos: $p \rightarrow q$. Como p é (V) e q é (V), temos $V \rightarrow V$, o que é verdadeiro.

Relação de equivalência. Dadas as proposições p e q , dizemos que “ p é equivalente a q ” quando p e q tem tabelas verdade iguais, isto é quando p e q tem sempre o mesmo valor lógico. (IEZZI, 2004, p. 11).

Podemos trocar a equivalência \Leftrightarrow pelo condicional \leftrightarrow . Assim, notamos que p equivale a q quando o condicional \leftrightarrow for verdadeiro. Vejamos o exemplo abaixo.

$$(p \rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q \rightarrow \sim p)$$

P	q	$p \rightarrow q$	$\sim p$	$\sim q$	$\sim q \rightarrow \sim p$	$(p \rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q \rightarrow \sim p)$
V	V	V	F	F	V	V
V	F	F	F	V	F	V
F	V	V	V	F	V	V
F	F	V	V	V	V	V

ATIVIDADES

- 1- Construir as tabelas verdade das seguintes proposições:
 - a) $\sim(p \vee \sim q)$
 - b) $\sim(p \rightarrow \sim q)$
 - c) $p \wedge q \rightarrow p \vee q$
 - d) $\sim p \rightarrow (q \rightarrow p)$
 - e) $(p \rightarrow q) \rightarrow p \wedge q$
 - f) $q \leftrightarrow \sim q \wedge p$
 - g) $(p \leftrightarrow \sim q) \leftrightarrow q \rightarrow p$
 - h) $(p \leftrightarrow \sim q) \rightarrow \sim p \wedge q$
- 2- Verificar, através das tabelas verdade, a validade das equivalências abaixo.
 - a) $p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$
 - b) $(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r)$
- 3- Sabendo que os valores lógicos das proposições p e q são respectivamente F e V, determinar o valor lógico (V ou F) da proposição:

$$(p \wedge (\sim q \rightarrow p)) \wedge \sim((p \leftrightarrow \sim q) \rightarrow q \vee \sim p)$$
- 4- Mostre que as proposições são tautológicas.
 - a) $\sim(p \vee \sim p) \vee (q \vee \sim q)$
 - b) $(p \leftrightarrow p \wedge \sim p) \rightarrow \sim p$

Sentenças abertas, quantificadores. Como dissemos no início, uma proposição ou sentença fechada é toda declaração que pode ser classificada como verdadeira ou falsa. As sentenças que não podem ser classificadas como verdadeira ou falsa são as abertas. $x + 1 = 7$ é um exemplo. É uma sentença aberta, pois o valor lógico da sentença depende do valor da variável.

Há duas maneiras de transformar sentenças abertas em proposições:

- 1) Atribuindo valor à variável;
- 2) Usando quantificadores.

Dispomos basicamente de dois quantificadores, o universal e o existencial. O quantificador universal é indicado pelo símbolo \forall que se lê: “para todo”, “qualquer que seja”.

Exemplos:

$(\forall x)(x + 1 = 7)$ que se lê: “para todo x , temos que $x + 1 = 7$ ”. (Falsa).

$(\forall x)((x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1)$ que se lê: “qualquer que seja o número x , temos $(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$ ”. (Verdadeira).

O quantificador existencial é indicado pelo símbolo \exists que se lê: “existe”, “existe pelo menos um”.

Exemplos:

$(\exists x)(x + 1 = 7)$ que se lê: “existe um número x , tal que $x + 1 = 7$ ”. (Verdadeira).

$(\exists x)(x + 2 > 0)$ que se lê: “existe um só número x , tal que $x + 2 > 0$ ” (Falsa).

ATIVIDADES

1- Transforme as seguintes sentenças abertas em proposições verdadeiras usando quantificadores.

a) $x^2 - 5x + 4 = 0$

b) $(a + 1)(a - 1) = a^2 - 1$

c) $\frac{y}{3} + \frac{y}{4} \neq \frac{y}{7}$

d) $\sqrt{m^2 + 9} \neq m + 3$

e) $-(-x) = x$

f) $5a + 4 \leq 11$

g) $\sqrt{x^2} = x$

h) $\frac{a^2 - a}{a} = a - 1$

►►► COMPLEMENTO

Para complementar o aprendizado de lógica Matemática, recomendamos que o aluno assista às seguintes vídeo aulas:

Aula 45 Noções de Lógica Parte I. Professor lucianoshowmat.

disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=SsJ8d7Pnpfo>. Acesso em: 04 de abr. 2016.

Aula 46 Noções de Lógica Parte II. Professor lucianoshowmat.

disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=YQzaKrusrz4>. Acesso em: 04 de abr. 2016.

Aula 47 Noções de Lógica Parte III. Professor lucianoshowmat.

disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=FJh9C0oqGu4>. Acesso em: 04 de abr. 2016.

CAPÍTULO IV

OPERADORES BOOLEANOS E PORTAS LÓGICAS

Faremos o estudo dos principais operadores Booleanos derivados dos postulados da Álgebra de Boole que será vista mais à frente. Caso o estudante tenha algum conhecimento de lógica matemática verá que os operadores Booleanos compartilham de alguma semelhança com os operadores lógicos, o que, facilitará a aprendizagem, uma vez que será necessário apenas uma pequena adaptação em termos de nomenclatura. Contudo, uma vez que o assunto abordado seja novo, também não será difícil sua assimilação visto que o tema é simples e com um aspecto bastante prático.

Trabalharemos com apenas dois valores distintos para as variáveis, 0 e 1. O valor 0 indica, por exemplo, “portão fechado, aparelho desligado, ausência de tensão, chave aberta, não, etc” (IDOETA 2007, p. 42). Já o estado 1 representa o contrário, ou seja, “portão aberto, aparelho ligado, presença de tensão, chave fechada, sim, etc.” (IDOETA 2007, p. 42). Comparativamente com a lógica, poderíamos afirmar que o 0 indicaria falso e o 1, verdadeiro.

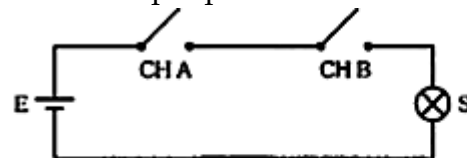
Faremos, na medida do possível, comparações entre os operadores Booleanos, as expressões Booleanas e as portas lógicas com a lógica matemática a fim de conectar os temas de modo a facilitar a compreensão, uma vez que a lógica matemática é, talvez, o primeiro contato do estudante com uma teoria do mesmo campo conceitual da álgebra em questão.

1- OPERADORES E PORTAS LÓGICAS

1.1- Operador E ou AND.

A operação E ou AND (nome derivado do inglês) é aquela conhecida na lógica como conjunção. Na perspectiva Booleana, ela executa a multiplicação de duas ou mais variáveis booleanas. Sua representação algébrica para suas variáveis seria $A.B$. Lê-se A e B.

Vejam os um exemplo prático da característica do operador.



Convenções: chave aberta = 0 chave fechada = 1
 lâmpada apagada = 0 lâmpada acesa = 1

Figura 1 – Circuito ilustrativo operação E.
 Fonte: IDOETA 2007, p. 42.

Observemos que se a chave A estiver aberta (0) e a chave B aberta (0), logo não haverá condução de corrente elétrica no circuito, e a lâmpada não se acende

(0). Podemos ilustrar o fato como: $S = A.B = 0$ quando A e B são (0). Por outro lado, quando a chave A estiver aberta (0) e a B, fechada (1), ainda assim, não haverá corrente para acender a lâmpada, e teremos como resultado a lâmpada apagada (0). Representando a situação teremos: $S = A.B = 0$ quando A é (0) e B é (1). Situação análoga ocorre quando A é (1) e B é (0). Na última análise, quando ambos, A e B, são (1) temos que a lâmpada se acende. Assim, $S = A.B = 1$ quando A e B são (1). Resumindo, só teremos a lâmpada acesa quando as chaves A e B estiverem fechadas.

Podemos representar as possibilidades vistas acima numa tabela verdade da seguinte forma:

A	B	S
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Para comparar com a função de conjunção da lógica matemática, podemos também apresentar a tabela verdade no caso em que A e B recebem os valores verdadeiro e falso e S será a conjunção.

A	B	$A \wedge B$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

As operações Booleanas também podem ser representadas de forma gráfica, onde cada operador está associado a um símbolo específico. Estes símbolos são conhecidos como **portas lógicas**.

A porta E é o símbolo que indica a operação E sendo representada pela figura abaixo.

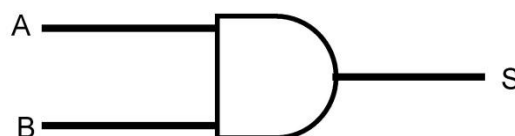


Figura 2 – Porta lógica E.
Fonte: autor.

Como a porta lógica realiza a função E, teremos que a saída só será (1) se, e somente se, A e B forem (1), caso contrário a saída será (0).

Vejamos agora um exemplo da operação E realizada com três variáveis. Mostraremos a porta lógica, ilustraremos a operação na tabela e com uma expressão booleana.

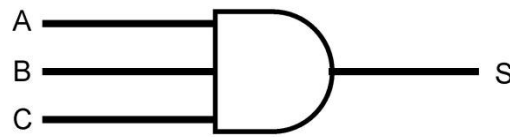


Figura 3 – Porta lógica E com três variáveis.
Fonte: autor.

A	B	C	S
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

$$S = A.B.C$$

Notemos que a tabela apresenta oito possibilidades de combinações das variáveis de entrada com seus resultados de saída. Para calcular o número de combinações dependendo da quantidade de variáveis basta fazermos 2^n , em que n é o número de variáveis. No caso anterior, teríamos $2^3 = 8$. E se tivermos quatro variáveis, quantas serão as combinações? $2^4 = 16$.

1.2- Operador OU ou OR

A operação OU ou OR (nome derivado do inglês) é aquela conhecida na lógica como disjunção. Na perspectiva Booleana, ela executa a soma lógica de duas ou mais variáveis booleanas. Sua representação algébrica para suas variáveis seria $A + B$. Lê-se A ou B.

Vejamos um exemplo prático para compreendermos melhor o operador.

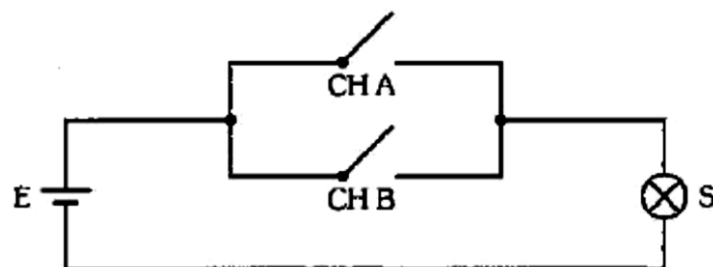


Figura 4 – Circuito ilustrativo operação OU.
Fonte: IDOETA 2007, p. 45.

As mesmas convenções da figura 1 do exemplo anterior serão mantidas.

Analisando o circuito, temos que quando a chave A estiver aberta (0) e a chave B aberta (0), o circuito não recebe corrente, logo a lâmpada não se acende (0). Assim, $S = A + B = 0$ quando $A = 0$ ou $B = 0$. Se tivermos A aberta (0) e B fechada (1), o circuito recebe corrente e a lâmpada se acende (1). $S = 1$, quando $A = 0$ e $B = 1$. Se a chave A estiver fechada (1) e a B aberta (0), ainda assim circula corrente. Logo, a lâmpada se acende (1). $S = 1$, quando $A = 1$ e $B = 0$. Por fim, quando A e B estiverem fechadas (1), circula corrente pelas duas chaves e a lâmpada se acende (1). $S = 1$ quando $A = 1$ e $B = 1$.

Não estranhe o fato de $A = 1$ e $B = 1$ e a soma lógica $A + B = 1$. No caso, temos uma soma lógica não aritmética. Tal soma está baseada nos postulados da Álgebra Booleana.

Podemos representar as possibilidades vistas acima numa tabela verdade da seguinte forma:

A	B	S
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Para comparar com a função de disjunção da lógica matemática, podemos também apresentar a tabela verdade no caso em que A e B recebem os valores verdadeiro e falso e S será a disjunção.

A	B	$A \vee B$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

A porta OU é o símbolo que indica a operação OU sendo representada pela figura abaixo.

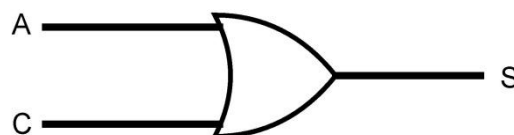


Figura 5 – Porta lógica OU.
Fonte: autor.

A porta lógica OU executa a operação lógica OU, ou seja, teremos saída (1) quando $A = 1$ ou $B = 1$. E teremos saída (0), quando $A = 0$ e $B = 0$.

Podemos estender o conceito da operação quando tivermos mais de duas variáveis de entrada. Fica como atividade mostrar uma porta OU com três variáveis, fazer a tabela verdade e escrever uma expressão booleana da operação.

1.3- Operação NÃO ou NOT

A operação NÃO ou NOT (nome derivado do inglês) é aquela que inverte (ou complementa) o estado lógico da variável. Assim, se tivermos uma entrada 0 ela será invertida para 1 e vice versa. Algebricamente representamos a negação com os seguintes símbolos: \bar{A} ou A' ou $\neg A$. Onde se lê A barra ou NÃO A.

Novamente utilizaremos um exemplo de circuito para ilustrar a operação. Vejamos:

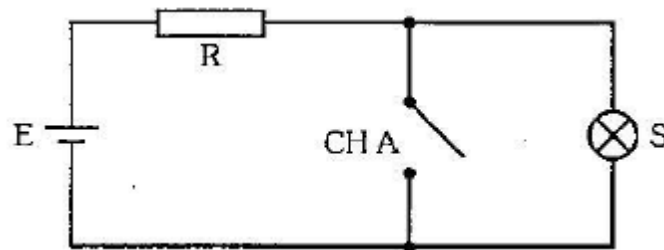


Figura 6 – Circuito ilustrativo operação NÃO.

Fonte: IDOETA 2007, p. 47.

Observemos que quando a chave A está aberta (0), passará corrente e a lâmpada estará acesa (1). Assim, $S = \bar{A}$ quando $A = 0$. Pelo contrário, quando A estiver fechada (1) haverá um curto circuito e a lâmpada se apagará (0). Logo, teremos novamente a lâmpada com o estado lógico oposto ao de A. Assim, quando $A = 1$, teremos $S = \bar{A} = 0$.

A tabela verdade da operação será mostrada abaixo.

A	S
0	1
1	0

Podemos comparar o NOT com a função de negação da lógica matemática, apresentaremos a tabela verdade para A e \bar{A} .

A	\bar{A}
V	F
F	V

A porta NÃO ou NOT é o símbolo que indica a operação NÃO sendo representada pela figura abaixo e denominada de inversor.



Figura 7 – Porta lógica NÃO.

Fonte: autor.

1.4- Operação NÃO E, NE ou NAND

O próprio nome NÃO E ou NAND (nome derivado do inglês) é indicativo da função da operação. Na verdade ela é uma composição das operações NÃO e E. Assim, teremos a operação E invertida. Algebricamente é representada assim: $S = \overline{A \cdot B}$, onde o traço indica a inversão de $A \cdot B$.

A saída, na tabela verdade, assume os valores inversos daqueles apresentados na operação E. Vejamos:

A	B	S
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Como fizemos antes, podemos observar a tabela verdade da operação na lógica matemática.

A	B	$\overline{(A \wedge B)}$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	V

A porta NE ou NAND é o símbolo que indica a operação NE sendo representada pela figura abaixo

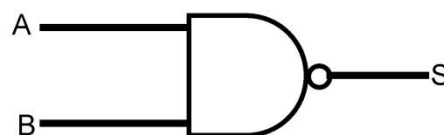


Figura 8 – Porta lógica NE.

Fonte: autor.

Também podemos formar a porta NE a partir da porta E com um inversor ligado a sua saída.

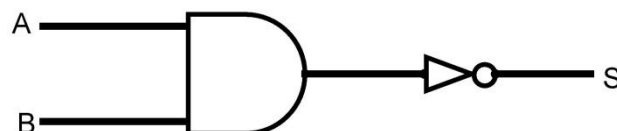


Figura 9 – Porta lógica E com inversor.

Fonte: autor.

1.5- Operação NÃO OU, NOU ou NOR

O próprio nome NÃO OU, NOU ou NOR (nome derivado do inglês) é indicativo da função da operação. Na verdade ela é uma composição das operações NÃO e OU. Assim, teremos a operação OU invertida. Algebricamente é representada assim: $S = \overline{A + B}$, onde o traço indica a inversão de $A+B$.

A saída, na tabela verdade, assume os valores inversos daqueles apresentados na operação OU. Vejamos:

A	B	S
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

A tabela verdade da operação na lógica matemática ficaria assim:

A	B	$(\overline{A \vee B})$
V	V	F
V	F	F
F	V	F
F	F	V

A porta NOU ou NOR é o símbolo que indica a operação NOU sendo representada pela figura abaixo.

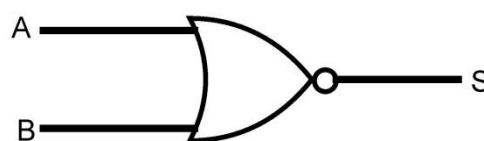


Figura 10 – Porta lógica NOU.
Fonte: autor.

Também podemos formar a porta NOU a partir da porta OU com um inversor ligado a sua saída.

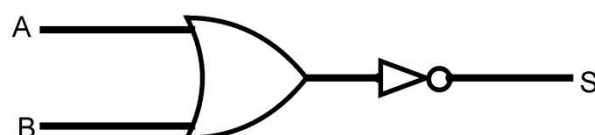


Figura 11 – Porta lógica OU com inversor.
Fonte: autor.

1.6- Operação OU EXCLUSIVO ou EXCLUSIVE OR

A operação OU EXCLUSIVO ou EXCLUSIVE OR (EXOR) (termo derivado do inglês) é aquela que fornece valor (1) à saída quando as variáveis de entrada assumem valores diferentes entre si e fornece valor (0) aos demais casos.

Com tais informações, apresentaremos sua tabela verdade.

A	B	S
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Conforme Idoeta (2007, p. 69), sua expressão característica é $S = \bar{A}.B + A.\bar{B}$. Tal expressão pode ser representada pelo seguinte circuito lógico:

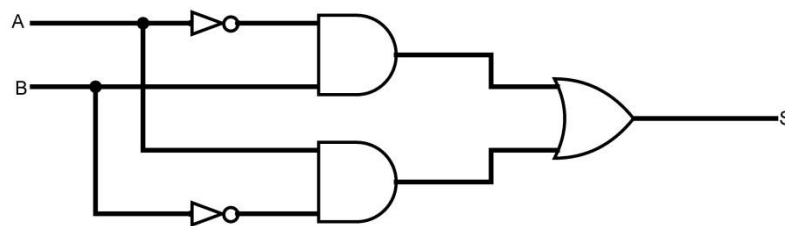


Figura 12 – Circuito lógico OU EXCLUSIVO.

Fonte: autor.

Podemos utilizar uma notação algébrica para representar o OU EXCLUSIVO. $S = A \oplus B$

Lê-se A OU Exclusivo B. Sendo $S = A \oplus B = \bar{A}.B + A.\bar{B}$.

Há uma porta lógica para representar, de modo mais simples, essa operação.

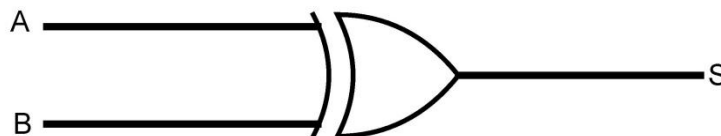


Figura 13 – Porta lógica OU EXCLUSIVO.

Fonte: autor.

“Uma importante observação é que, ao contrário de outros blocos lógicos básicos, o circuito OU Exclusivo só pode ter 2 variáveis de entrada, fato este devido à sua definição básica”. (IDOETA, 2007, p. 70).

1.7- Operação COINCIDÊNCIA ou EXCLUSIVE NOR (EXNOR)

A operação, como o próprio nome sugere, retorna uma saída (1) quando há coincidência de valores nas variáveis de entrada e valor (0) nos outros casos. Vejamos a tabela verdade.

A	B	S
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Se observarmos bem, tal operador é, na verdade, a negação do OU EXCLUSIVO. Pela tabela podemos escrever a expressão: $S = \bar{A} \cdot \bar{B} + A \cdot B$. Vejamos o circuito lógico da expressão.

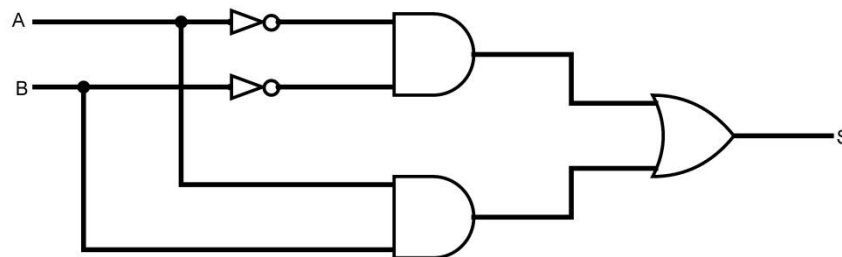


Figura 14 – Circuito lógico COINCIDÊNCIA.

Fonte: autor.

A notação algébrica da operação pode ser expressa da seguinte forma: $S = A \odot B$ e se lê: A COINCIDÊNCIA B. Sendo $S = A \odot B = \bar{A} \cdot \bar{B} + A \cdot B$. Vejamos o símbolo da porta lógica que simplifica o circuito.

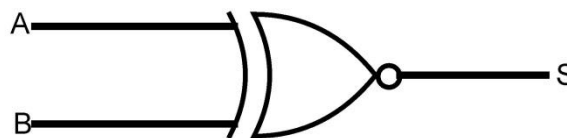


Figura 15 – Porta lógica COINCIDÊNCIA.

Fonte: autor.

Como dissemos anteriormente, a COINCIDÊNCIA é o complemento ou negação do OU EXCLUSIVO. Logo, vale a seguinte equivalência: $A \oplus B = \overline{A \odot B}$. “Da mesma forma que o OU EXCLUSIVO, o bloco COINCIDÊNCIA é definido apenas para 2 variáveis de entrada”. (IDOETA, 2007, p. 71).

2- EXPRESSÕES BOOLEANAS, CIRCUITOS LÓGICOS E TABELA VERDADE, OBTENDO UM A PARTIR DO OUTRO.

2.1- Expressões Booleanas a partir de circuitos lógicos

“Todo circuito lógico executa uma expressão booleana e, por mais complexo que seja, é formado pela interligação das portas lógicas básicas”. (IDOETA, 2007,

p. 51). Assim, é possível encontrar a expressão booleana que existe oculta em cada circuito lógico. Vejamos um exemplo. Vamos obter a expressão que executa o circuito.

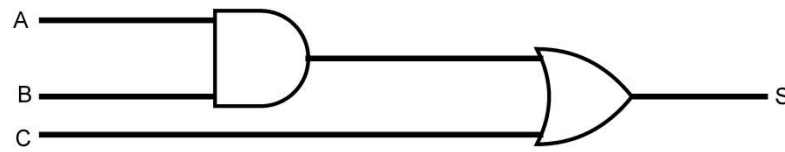


Figura 16 – Circuito lógico-1.
Fonte: autor.

Num primeiro passo, podemos analisar a figura e escrever, na saída superior esquerda o resultado de seu operador, bem como na saída inferior a própria variável C, que não sofreu nenhuma alteração.

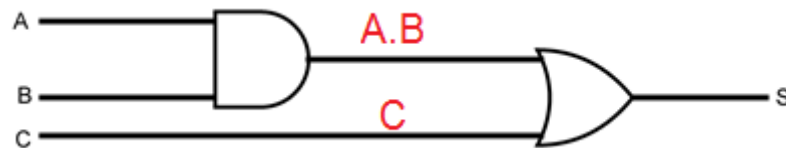


Figura 17 – Circuito lógico-2.
Fonte: autor.

A.B porque as variáveis entraram numa porta E, ou seja, num multiplicador lógico. Como o circuito é simples, podemos concluir no próximo passo. Temos, entrando numa porta OU as variáveis A.B e C, logo a saída será $A.B + C$.

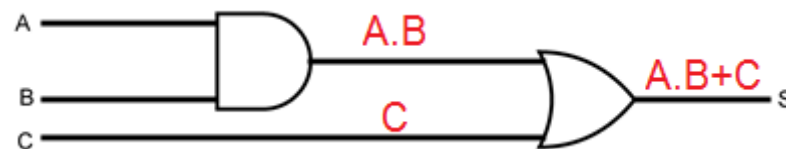


Figura 18 – Circuito lógico-3.
Fonte: autor.

Assim, podemos escrever a expressão do circuito como $S = A.B + C$.

Outro exemplo. Determine a expressão booleana característica do circuito abaixo.

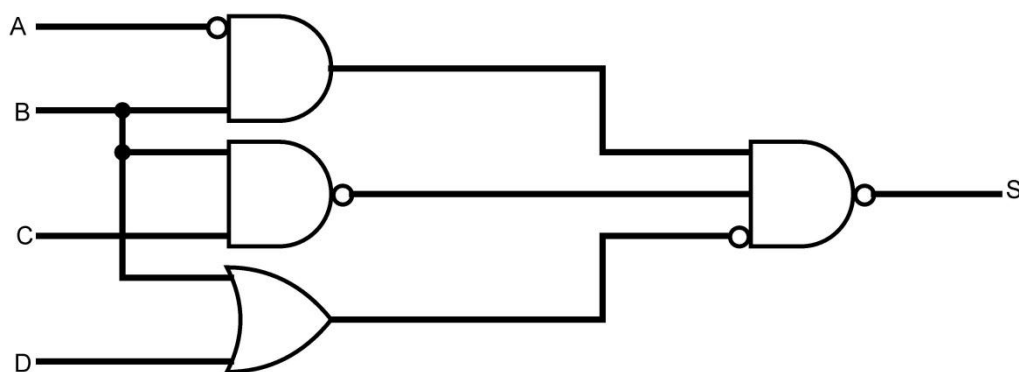


Figura 19 – Circuito lógico-4.
Fonte: autor.

Vamos escrever nas saídas das portas lógicas, os respectivos valores das variáveis. Convém informarmos que os círculos colocados nas entradas das portas lógicas representam uma inversão também. Assim, temos:

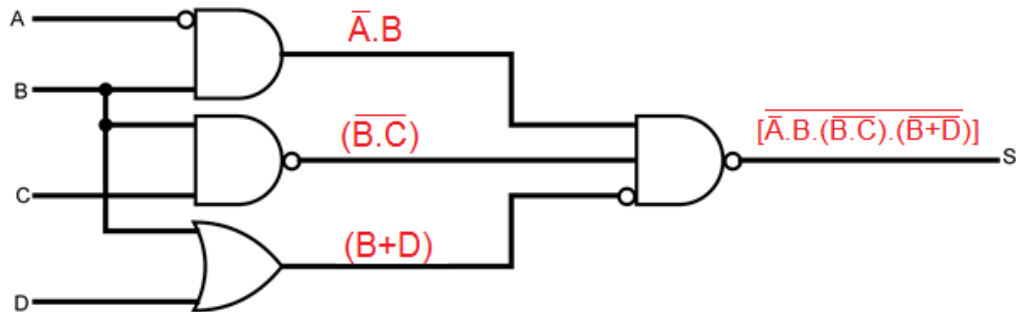


Figura 20 – Circuito lógico-5.

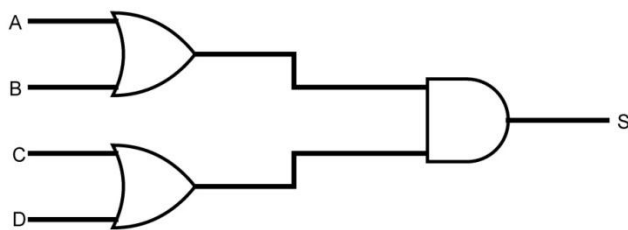
Fonte: autor.

$$\text{Logo, } S = \overline{[A.B.(B.C).(B+D)]}$$

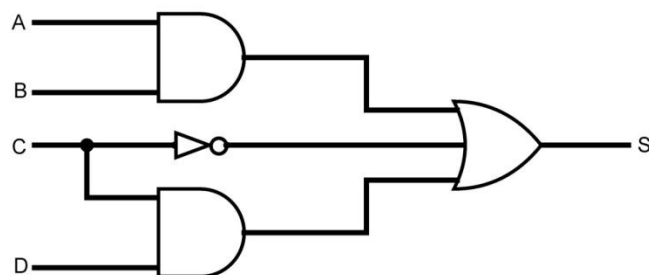
ATIVIDADES

Escreva a expressão booleana executada pelos seguintes circuitos abaixo.

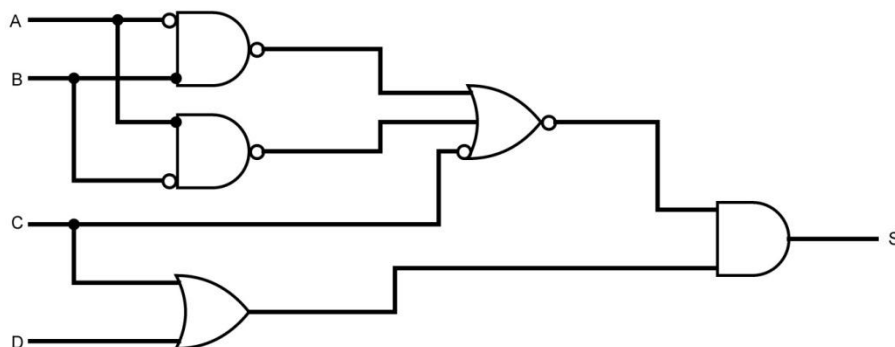
a)



b)



c)



CAPÍTULO V

ÁLGEBRA DE BOOLE

Para falar de Álgebra Booleana é imprescindível citar a figura daquele que foi seu precursor, ou seja, o matemático inglês George Boole (1815-1864). Ele foi o responsável por apresentar formalmente um sistema matemático de análise lógica. Em 1938, o engenheiro americano C. E. Shannon, em sua dissertação de mestrado no MIT, mostrou que a descoberta de Boole poderia ser utilizada para descrever a operação de sistemas de telefonia, conforme Idoeta (2007).

Diferentemente da Álgebra ordinária, as variáveis Booleanas só podem assumir um número finito de valores. Na Álgebra Booleana de dois valores, cada variável pode assumir um dentre dois possíveis que podem ser denotados por $[F, V]$ ou $[0, 1]$ o qual é utilizado também em eletrônica digital e é a notação adotada neste material.

Este breve estudo de Álgebra de Boole irá abordar os principais postulados, propriedades, teoremas fundamentais e identidades a fim de fundamentar melhor o conhecimento. O capítulo anterior já nos trouxe uma ideia geral do Álgebra em questão. Estaremos voltados, neste momento, em formalizá-la um pouco mais.

Postulados. Basicamente apresentaremos os postulados da complementação, da adição e da multiplicação.

Postulado da complementação. Numa linguagem da lógica poderíamos dizer que o complemento de uma proposição A representa o inverso de A que indicaremos como \bar{A} . Assim, $\bar{\bar{A}}$ é o complemento de \bar{A} .

Se $A = 0$ então $\bar{A} = 1$; Se $A = 1$ então $\bar{A} = 0$. Podemos concluir que $\bar{\bar{A}} = A$.

O bloco lógico que executa o postulado da complementação é o inversor.

Postulado da adição. As regras da adição, dentro da Álgebra de Boole, funcionam basicamente da seguinte forma:

$$0 + 0 = 0$$

$$0 + 1 = 1$$

$$1 + 0 = 1$$

$$1 + 1 = 1$$

Identidade 1- $A + 0 = A$. (A demonstração ficará como atividade)

Identidade 2- $A + 1 = 1$. (A demonstração ficará como atividade)

Identidade 3- $A + A = A$. (A demonstração ficará como atividade)

Identidade 4- $A + \bar{A} = 1$. (A demonstração ficará como atividade)

O bloco lógico que executa a adição é o OU.

Postulado da multiplicação. É o postulado que determina as regras de multiplicação.

$$0 \cdot 0 = 0$$

$$0 \cdot 1 = 0$$

$$1 \cdot 0 = 0$$

$$1 \cdot 1 = 1$$

Identidade 1- $A \cdot 0 = 0$. (A demonstração ficará como atividade).

Identidade 2- $A \cdot 1 = A$. (A demonstração ficará como atividade).

Identidade 3- $A \cdot A = A$. (A demonstração ficará como atividade).

Identidade 4- $A \cdot \bar{A} = 0$. (A demonstração ficará como atividade).

O bloco lógico que executa a multiplicação é o E.

Propriedades. Podemos nos valer de algumas propriedades para simplificarmos expressões booleanas. As principais são: comutativa, associativa e distributiva.

Comutativa

Adição: $A + B = B + A$

Multiplicação: $A \cdot B = B \cdot A$

Associativa

Adição: $A + (B + C) = (A + B) + C$

Multiplicação: $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$

Distributiva

$A \cdot (B + C) = AB + AC$ (Verifique esta propriedade através da tabela verdade).

Teoremas de De Morgan. Tais teoremas são muito empregados na prática para simplificação de expressões.

1º Teoremas de De Morgan. O complemento do produto é igual à soma dos complementos.

$$\overline{A \cdot B} = \bar{A} + \bar{B}$$

Para comprovar o teorema iremos montar a tabela verdade de ambos os membros da equação e comparar os resultados.

A	B	$\overline{A \cdot B}$	$\bar{A} + \bar{B}$
0	0	1	1
0	1	1	1
1	0	1	1
1	1	0	0

Notamos a igualdade. O teorema pode ser expandido para mais de duas variáveis:

$$\overline{A \cdot B \cdot C \cdot D \dots N} = \bar{A} + \bar{B} + \bar{C} + \bar{D} + \dots + \bar{N}$$

2º Teoremas de De Morgan. O complemento da soma é igual ao produto dos complementos.

$$\overline{\bar{A} + \bar{B}} = A \cdot B$$

Este teorema pode ser mostrado a partir do primeiro. Assim, temos:

$$\overline{\bar{A} + \bar{B}} = A \cdot B$$

$$\overline{\bar{A} + \bar{B}} = A \cdot B$$

$$\overline{\bar{A} + \bar{B}} = A \cdot B$$

Para concluir, vamos mudar as variáveis, ou seja, afirmaremos que $\bar{A} = x$ e $\bar{B} = y$. Assim sendo, temos:

$$\overline{x + y} = \bar{x} \cdot \bar{y} \quad \blacksquare$$

O teorema pode ser expandido para mais de duas variáveis:

$$\overline{\bar{A} + \bar{B} + \bar{C} + \bar{D} + \dots + \bar{N}} = A \cdot B \cdot C \cdot D \cdot \dots \cdot N$$

Identities auxiliares. Mostraremos três identidades úteis.

Identidade 1- $A + A.B = A$.

Vejamos:

$$\begin{aligned} A + A.B &= A \\ A(1+B) &= A \text{ (Propriedade distributiva)} \\ A.1 &= A \text{ (1 + B = 1, postulado da soma)} \\ A &= A \\ \text{Logo, } A + A.B &= A \end{aligned}$$

Identidade 2- $(A + B) . (A + C) = A + B.C$

Vejamos:

$$\begin{aligned} (A + B) . (A + C) &= A + B.C \\ A.A + A.C + B.A + B.C &\text{ (Propriedade distributiva)} \\ A + A.C + B.A + B.C &= A \text{ (A.A = A, postulado do produto)} \\ A(1+C+B) + B.C &= A \text{ (Propriedade distributiva)} \\ A + B.C &= A \text{ (1 + C = 1; 1 + B = 1 postulado da soma)} \\ \text{Logo, } (A + B) . (A + C) &= A + B.C \end{aligned}$$

Identidade 3- $A + \bar{A}.B = A + B$

Vejamos:

$$\begin{aligned} A + \bar{A}.B &= A + B \\ \overline{A + \bar{A}.B} &\text{ (Identidade } \bar{\bar{x}} = x) \\ \bar{A}.(\bar{\bar{A}.B}) &\text{ (2º Teorema de De Morgan)} \\ \bar{A}.(\bar{A} + \bar{B}) &\text{ (1º Teorema de De Morgan)} \\ \bar{A}.A + \bar{A}.\bar{B} &\text{ (Propriedade distributiva e identidade } \bar{A}.A = 0) \\ \bar{A}.\bar{B} &\text{ (1º Teorema de De Morgan)} \\ A+B & \\ \text{Logo, } A + \bar{A}.B &= A + B \end{aligned}$$

Simplificação de expressões booleanas. Utilizaremos todos os recursos anteriores para simplificarmos expressões booleanas. Simplificar uma expressão significa transformá-la, por meio de recursos válidos, em outra mais simples, ou seja, com menos operações e estas, se existirem, que seja o mais simples possível.

Exemplo:

$$\begin{aligned} S &= ABC + A\bar{C} + A\bar{B} \\ S &= A(BC + \bar{C} + \bar{B}) \text{ (Propriedade distributiva)} \\ S &= A(BC + (\bar{C} + \bar{B})) \text{ (Propriedade associativa)} \\ S &= A(BC + \overline{(\bar{C} + \bar{B})}) \text{ (Identidade } \bar{\bar{x}} = x) \\ S &= A(BC + \overline{BC}) \text{ (Teorema de De Morgan)} \\ S &= A(\bar{Y} + Y) \text{ (}\overline{BC} = Y, \text{ mudança de variável)} \\ S &= A \end{aligned}$$

ATIVIDADES

- 1- Demonstre, utilizando os postulados da Álgebra Booleana, as seguintes identidades:
 - a) $A + 0 = A$
 - b) $A + 1 = 1$
 - c) $A + A = A$
 - d) $A + \bar{A} = 1$
 - e) $A \cdot 0 = 0$
 - f) $A \cdot 1 = A$
 - g) $A \cdot A = A$
 - h) $A \cdot \bar{A} = 0$
- 2- Verifique a propriedade distributiva, $A \cdot (B + C) = AB + AC$, por mais de uma tabela verdade.
- 3- Simplifique as expressões:
 - a) $\bar{A}\bar{B}\bar{C} + \bar{A}B\bar{C} + A\bar{B}C$
 - b) $\bar{A}\bar{B}\bar{C} + \bar{A}BC + \bar{A}\bar{B}C + A\bar{B}\bar{C} + ABC$
 - c) $(A + B + C) \cdot (\bar{A} + \bar{B} + \bar{C})$

►►► COMPLEMENTO

Para complementar o aprendizado de Álgebra Booleana, recomendamos que o aluno assista às seguintes vídeo aulas:

Álgebra de Boole – 01 – Introdução. disponível em:

<https://www.youtube.com/watch?v=EcKYaKt8AdY>. Acesso em: 04 de abr. 2016.

Álgebra de Boole – 02 – Exercício 01. disponível em:

<https://www.youtube.com/watch?v=CfpZ2JusSE>. Acesso em: 04 de abr. 2016.

Álgebra de Boole – 03 – Exercício 02. disponível em:

<https://www.youtube.com/watch?v=hjIY81XtpeM>. Acesso em: 04 de abr. 2016.

REFERÊNCIAS

- ALENCAR FILHO, E. **Iniciação à lógica matemática**. São Paulo: Nobel, 2008.
- BIGNELL, James. **Eletrônica digital**. São Paulo: Cengage Learning, 2009.
- DAGHLIAN, Jacob. **Lógica e Álgebra de Boole**. São Paulo: Atlas, 1990.
- HAZZAN, Samuel; IEZZI, Gelson. **Fundamentos de Matemática Elementar**. 7 ed. São Paulo: Atual, 2004.
- HEFEZ, Abramo. **Elementos de Aritmética**. 2 ed. Rio de Janeiro-RJ: SBM, 2006,
- HETEM JÚNIOR, Annibal. **Fundamentos de informática: eletrônica digital**. Rio de Janeiro: LTC, 2010.
- IDOETA, Ivan Valeije. **Elementos de Eletrônica Digital**. 40. ed. São Paulo: Érica, 2007.
- IEZZI, Gelson; MURAKAMI, Carlos. **Fundamentos de Matemática Elementar**, conjuntos funções. 8. ed. São Paulo: Atual, 2004.
- LIMA, Elon Lages. **A matemática do ensino médio – volume 1**. 10. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012a.
- LIMA, Elon Lages. **A matemática do ensino médio – volume 2**. 10. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012b.
- WIKIPÉDIA. **Lógica**. Disponível em: <
https://pt.wikipedia.org/wiki/L%C3%B3gica#cite_note-PopkinStroll1993-2>.
 Acesso em: 04 de abr. 2016.
- MENDELSON, Elliott. **Álgebra Booleana e circuitos de chaveamento**. São Paulo: McGraw Hill, 1977.
- PEDRONI, Volnei. **Eletrônica digital moderna com VHDL**. Rio de janeiro: Elsevier, 2010.
- TOCCI, Ronald J. **Sistemas digitais: princípios e aplicações**. 11. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2011.