



21080

MATEMÁTICA APLICADA À GESTÃO I

TEXTO DE APOIO

MARIA ALICE FILIPE

ÍNDICE

NOTAS PRÉVIAS3

ALGUNS CONCEITOS SOBRE SÉRIES.....6

NOTAS PRÉVIAS

As notas seguintes referem-se ao manual adoptado:

Cálculo, Vol. I

James Stewart, Pioneira, Thomson Learning

1. A maior parte dos assuntos tratados no livro até ao capítulo 4 (inclusivé), consideram-se como sendo já dos conhecimentos dos alunos, constituindo revisões.
2. **Não são objecto de avaliação** os seguintes assuntos tratados no manual:
 - 2.1. Funções hiperbólicas (cap. 3 - 3.9, pag. 246)
 - 2.2. O método de Newton (cap. 4 - 4.9, pag. 345)
 - 2.3. Volumes (cap. 6 - 6.2, pag. 440)
 - 2.4. Cálculo de volumes por cascas cilíndricas (cap. 6 - 6.3, pag. 451)
 - 2.5. Trabalho (cap. 6 - 6.4, pag. 456)
 - 2.6. Integração usando tabelas e sistemas algébricos computacionais (cap. 7 - 7.6, pag. 505)
 - 2.7. Integração aproximada (cap. 7 - 7.7, pag. 512)
 - 2.8. Mais aplicações de integração (cap. 8, pag. 540 até ao fim do capítulo)
3. Nos exames **não é permitida** a utilização de qualquer tipo de calculadora nem de qualquer formulário. Como o livro adoptado tem no final de cada capítulo exercícios que utilizam calculadora e/ou programas informáticos específicos da Matemática, o aluno pode não os fazer.

4. Como o manual está escrito em português do Brasil, convém ter em atenção que há termos e expressões que em português se dizem de outra forma.
Por exemplo, "sequência" corresponde em português a "sucessão"; "integral", em português, é uma palavra masculina, etc.
5. Há também algumas notações e designações que usaremos de forma diferente. Por exemplo, para intervalo aberto, em vez de (a,b) , usaremos $]a,b[$. Em vez de "antiderivada" de uma função $f(x)$, falaremos em primitiva de $f(x)$ e representaremos por $Pf(x)$ ou $\int f(x) dx$. Representaremos as funções trigonométricas inversas por, por exemplo, $\arcsen x$, em vez de $\sin^{-1}x$, etc..
6. Sugere-se o estudo cuidadoso das aplicações do Cálculo, principalmente à Economia.
7. O assunto das séries, abordado na pag. 7 do manual, está mais desenvolvido no Vol. II do livro com os mesmos título e autor do manual indicado. Como não se considera ser de avaliação um estudo exaustivo das séries, mas apenas o que é indicado no programa, seguem em anexo uns apontamentos sobre o referido assunto.

Pré-requisitos básicos:

1. Ter bom domínio de cálculo mental (lembra-se que não é permitida a utilização da máquina de calcular nos exames, nem tabelas ou formulários);
2. Saber resolver equações e inequações, em particular as que contém o operador módulo;
3. Ter conhecimentos de trigonometria (incluindo o conhecimento das funções trigonométricas inversas: $\arcsen x$, $\arccos x$, $\arctg x$, $\operatorname{arccot} x$);
4. Saber calcular limites de funções reais de variável real (incluindo sucessões);
5. Conhecer e aplicar bem as regras de derivação;

6. Conhecer as representações gráficas de algumas funções básicas, tais como, polinomiais (pelo menos até ao 3º grau), exponencial, logarítmica e trigonométricas.

Nota: Todos estes conhecimentos são considerados como já adquiridos a nível do ensino secundário (12º ano). No entanto, para se iniciar o estudo desta cadeira, considera-se que previamente deve rever os assuntos referidos. A maior parte deles vai ser novamente tratada, mas de uma forma mais um pouco mais aprofundada e alargada.

Alguns conceitos sobre SÉRIES

Consideremos uma **sucessão** de termos $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$

O termo a_n é designado por **termo geral** da sucessão. Muitas vezes identificamos a sucessão pelo seu termo geral, isto é, simplificamos a linguagem, dizendo que estamos a tratar de uma sucessão a_n , em vez de dizer que a sucessão referida tem por termo geral a_n .

Com os termos de uma sucessão a_n , podemos construir outra sucessão, procedendo da seguinte forma:

$$s_1 = a_1$$

$$s_2 = a_1 + a_2$$

$$s_3 = a_1 + a_2 + a_3$$

.

.

.

$$s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{i=1}^n a_i$$

.

.

A esta sucessão, de termo geral s_n , daremos o nome de **sucessão das somas parciais**.

Se a sucessão tiver infinitos termos, é chamada de **série infinita** ou simplesmente **série**,

podendo ser representada por $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ ou por $\sum a_n$.

Diz-se que o **termo geral da série** $\sum a_n$ é a_n . Os limites inferior e superior do símbolo somatório (Σ) são, respectivamente, $n=1$ e $+\infty$. Sem perda de generalidade, também se pode considerar que a série pode não começar em $n=1$, mas num outro valor inteiro, tal como 0.

Como a sucessão das somas parciais, s_n , pode ter ou não limite, diremos, respectivamente, que a série é **convergente** ou **divergente**. Se a série for convergente, isto é, se existir $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n$, diremos que $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = s$ é a **soma** da série.

Exemplos:

- 1) Seja a série $\sum_{n=1}^{+\infty} n = 1+2+3+ \dots +n+ \dots$

Esta série é **divergente**, porque é impossível encontrar um limite finito para s_n . Note-se que os termos da sucessão que é termo geral da série, $a_n=n$, estão em progressão aritmética de razão 1.

Numa progressão aritmética tem-se $a_n = a_1 + (n-1)r$.

A soma dos n primeiros termos consecutivos de uma progressão aritmética de razão r , cujo primeiro termo é a_1 , é dada por $s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$.

Como em relação à série dada se tem $a_1=1$, $r=1$, então, s_n , é dada por $\frac{n(n+1)}{2}$.

Como, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+1)}{2} = \infty$, concluímos então que a série é divergente.

- 2) Seja a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$. Vamos mostrar que esta série é convergente.

Começemos por escrever s_n :

$$s_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}$$

Esta expressão pode ser simplificada se decomposermos $\frac{1}{n(n+1)}$ na diferença de duas fracções:

$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{a}{n} - \frac{b}{n+1}$. Desembaraçando de denominadores vem $1=a(n+1)-bn$, ou seja,

$1=(a-b)n+a$. Donde $a=b=1$.

Assim, $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

Então tem-se
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$$

Donde,
$$s_n = \left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \dots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = 1 - \frac{1}{n+1}$$

Logo,
$$s = \lim s_n = \lim \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = 1$$

Portanto a série dada é convergente e
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$$

Todas as séries $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, cujo termo geral a_n , se possa decompor na diferença de dois termos gerais, tais que $a_n = u_n - u_{n+p}$, $p \in \mathbb{N}$, são chamadas **séries telescópicas, redutíveis** ou de **Mengoli**.

Tem-se então
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (u_n - u_{n+p}).$$

Mostra-se $s_n = u_1 - p \cdot u_{n+p}$.

Assim, estas séries são convergentes se existir $\lim u_{n+p}$ (ou seja, se existir $\lim u_n$, pois o limite de uma sucessão, quando existe, é único). Caso não exista o limite, as séries são divergentes.

Assim, a soma da série é $s = u_1 - p \cdot \lim u_n$.

3) Seja a série
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots + \dots$$

Vamos mostrar que esta série é convergente e calcular a sua soma.

Começemos por notar que o termo geral da série é uma progressão geométrica de razão $1/2$.

O termo geral de uma progressão geométrica de primeiro termo a_1 , de razão r é $a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$.

Mostra-se que a soma dos n primeiros termos consecutivos de uma progressão geométrica, de primeiro termo a_1 e razão r é, s_n , dada por

$$s_n = a_1 \cdot \frac{1 - r^n}{1 - r}.$$

Se aplicarmos esta fórmula para calcular o termo geral da sucessão das somas parciais da série dada, tem-se:

$$s_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Atendendo a que $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = \begin{cases} 0 & \text{se } |r| < 1 \\ 1 & \text{se } r = 1 \\ \pm 1 & \text{se } r = -1 \\ \infty & \text{se } |r| > 1 \end{cases}$, tem-se

$$s = \lim s_n = \lim \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \right) = 1 - 0 = 1.$$

Fica desta forma provado que a série dada é convergente e pode escrever-se

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 1.$$

De um modo geral, uma série da forma $\sum_{n=p}^{\infty} r^n$, ($p \in N_0$, $r \in \Re$) é chamada **série geométrica**.

Uma série geométrica é convergente se $|r| < 1$ e a sua soma é $s = r^p \cdot \frac{1}{1-r}$.

Se $|r| \geq 1$, a série é divergente.

Estas séries têm muitas aplicações, nomeadamente em Economia.

- 4) Seja a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$. Vamos mostrar que esta série, conhecida como **série harmónica**, é divergente.

Vamos escrever alguns termos da sucessão das somas parciais:

$$s_1 = 1$$

$$s_2 = 1 + \frac{1}{2}$$

$$s_4 = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) > 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) = 1 + \frac{2}{2}$$

$$\begin{aligned} s_8 &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) > 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) = \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 + \frac{3}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s_{16} &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{16}\right) > \\ &> 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{16}\right) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 + \frac{4}{2} \end{aligned}$$

De modo análogo, pode mostrar-se que $s_{32} > 1 + \frac{5}{2}$, $s_{64} > 1 + \frac{6}{2}$ e em geral

$$s_{2^n} > 1 + \frac{n}{2}. \text{ Logo, } \lim_{n \rightarrow \infty} s_{2^n} = +\infty.$$

Como s_{2^n} é o termo geral de uma subsucessão de s_n , então s_n não tem limite e a série harmónica é divergente.

As séries da forma $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ são chamadas **séries de Dirichlet**. A série

harmónica é uma série de Dirichlet em que $\alpha=1$.

Mostra-se que as séries de Dirichlet são convergentes para $\alpha > 1$ e divergentes para $\alpha \leq 1$.

Em resumo, até agora, estudámos 3 tipos particulares de séries:

As séries de Mengoli (redutíveis ou telescópicas)

As series geométricas

As séries de Dirichlet

Dada uma qualquer destas séries, sabemos dizer qual a sua natureza, isto é, se é convergente ou divergente. Em relação às duas primeiras, caso sejam convergentes, sabemos calcular as suas somas.

Vamos agora enunciar três teoremas importantes.

Teorema 1 - Critério geral de convergência

Se a série $\sum a_n$ for convergente, então $\lim a_n = 0$.

A recíproca deste teorema não é verdadeira. Por exemplo, $\lim \frac{1}{n} = 0$ e a série harmónica é divergente.

Podemos utilizar este teorema para fazer o teste de divergência para várias séries.

Por exemplo, a série $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2}{5n^2 + 4}$ é divergente, porque $\lim \frac{n^2}{5n^2 + 4} = \frac{1}{5} \neq 0$.

Teorema 2 - A natureza de uma série não se altera se lhe modificarmos (suprimindo ou acrescentando, por exemplo) um número finito de parcelas.

Demos já alguns exemplos de séries, cujo primeiro termo não correspondia a $n=1$. Consideremos ainda o exemplo seguinte:

Pretende-se saber qual a natureza da série $\sum_{n=4}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$.

Comecemos por considerar a série de Dirichlet $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3} = 1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{27} + \frac{1}{64} + \sum_{n=4}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$.

Esta série é convergente ($3 > 1$). Assim, $\sum_{n=4}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$ é convergente, pois as quatro primeiras parcelas representam um número real.

Teorema 3 - Se $\sum a_n$ e $\sum b_n$ forem séries convergentes, então também são convergentes

$$\sum ca_n, \text{ em que } c \text{ é uma constante real}$$

$$\sum (a_n + b_n)$$

$$\sum (a_n - b_n)$$

e tem-se

$$\sum ca_n = c \sum a_n$$

$$\sum (a_n + b_n) = \sum a_n + \sum b_n$$

$$\sum (a_n - b_n) = \sum a_n - \sum b_n$$

Também se pode mostrar, por exemplo, que a soma de duas séries divergentes é uma série divergente, que a soma de uma série convergente com uma divergente é uma série divergente.

Exemplo: Calcular a soma da série $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{n(n+1)} + \frac{1}{2^n} \right)$.

Pelo teorema 3, tem-se

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{n(n+1)} + \frac{1}{2^n} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n(n+1)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$$

Como já vimos em exemplos anteriores as duas séries em que se decompôs a série dada,

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n}$ são convergentes, sendo a soma de cada uma delas 1.

Assim, a soma de $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{n(n+1)} + \frac{1}{2^n} \right)$ é $s = 3 \times 1 + 1 = 4$.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Estude a natureza das seguintes séries

1.1. $\sum_{n=0}^{+\infty} 2^{2n} 3^{1-n}$

Resolução:

Vamos mostrar que a série $\sum_{n=0}^{+\infty} 2^{2n} 3^{1-n}$ é uma série geométrica.

$\sum_{n=0}^{+\infty} 2^{2n} 3^{1-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4^n}{3^{n-1}} = 3 \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{4}{3}\right)^n$. À parte a constante 3, que não afecta a natureza da série, trata-se de uma série geométrica de razão $4/3 > 1$. Logo, a série é divergente.

1.2. Escrever como um número fraccionário de termos inteiros o número 2,3(17).

Resolução:

Este número é uma dízima infinita periódica

$$2,3(17) = 2,3171717 \dots = 2,3 + 0,017 + 0,00017 + \dots = \frac{23}{10} + \frac{17}{10^3} + \frac{17}{10^5} + \dots =$$

$$= \frac{23}{10} + \frac{17}{1000} \left(\frac{1}{10^0} + \frac{1}{10^2} + \dots + \frac{1}{10^{2n}} + \dots \right) = \frac{23}{10} + \frac{17}{1000} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{10} \right)^{2n} =$$

$$= \frac{23}{10} + \frac{17}{1000} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{100} \right)^n$$

Vamos calcular a soma da série $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{100} \right)^n$. Como $1/100 < 1$, a série é convergente e

$$\text{tem-se } s = \left(\frac{1}{100} \right)^0 \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{100}{99}$$

$$\text{Donde, } 2,3(17) = \frac{23}{10} + \frac{17}{1000} \cdot \frac{100}{99} = \frac{1147}{495}$$

1.3. Calcular, se possível, a soma da série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2 + 4n + 3}$.

Resolução:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2 + 4n + 3} &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 4n + 4 - 1} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)^2 - 1} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2-1)(n+2+1)} = \\ &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+3)}.\end{aligned}$$

Vamos mostrar que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+3)}$ é uma série de Mengoli.

$$\frac{1}{(n+1)(n+3)} = \frac{a}{n+1} - \frac{b}{n+3}$$

Desembarçando de denominadores, vem sucessivamente:

$$1 = a(n+3) - b(n+1)$$

$$1 = (a-b)n + 3a - b$$

$$a-b=0 \quad \text{e} \quad 3a-b=1$$

Donde, $a=b=1/2$.

$$\text{Assim, } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+3)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1/2}{n+1} - \frac{1/2}{n+3} \right) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+3} \right)$$

$$\text{Fazendo } u_n = \frac{1}{n+1}, \text{ vem } u_{n+2} = \frac{1}{n+3}.$$

$$\text{A soma de } \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+3} \right) \text{ é } s = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \right) = \frac{1}{4}$$

A soma da série dada é

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2 + 4n + 3} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+3)} = 2 \cdot \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+3} \right) = 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

1.4. Estudar a natureza da série $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n}{2n+5}\right)$.

Resolução:

Vamos começar por calcular o limite do termo geral.

$$\lim \ln\left(\frac{n}{2n+5}\right) = \ln\left(\lim \frac{n}{2n+5}\right) = \ln \frac{1}{2} \neq 0$$

Como o limite do termo geral é diferente de 0, então a série é divergente.

2. Ache os valores de x para os quais convergem as seguintes séries. Se possível, para esses valores de x calcule a soma de cada uma das séries.

2.1. $\sum_{n=0}^{\infty} (x-4)^n$

2.3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{2^n}$

2.2. $\sum_{n=0}^{\infty} tg^n x$

2.4. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{x^n}$

Resolução:

Todas as séries dadas são geométricas. Vamos escrevê-las na forma $\sum r^n$ e determinar a razão r de cada uma, determinando os valores de x para os quais o módulo de r é menor que 1, para que as séries sejam convergentes.

Estas séries, cuja soma, quando existe, é função de x, são designadas por **séries de potências** e desempenham um papel muito importante no Cálculo.

$$2.1. \sum_{n=0}^{\infty} (x-4)^n$$

A razão desta série é $x-4$. Donde para a série ser convergente tem que sucessivamente verificar-se

$$\begin{aligned} |x-4| &< 1 \\ -1 &< x-4 < 1 \\ 3 &< x < 5 \end{aligned}$$

Para os valores de x no intervalo $]3,5[$, a soma da série é

$$s = (x-4)^0 \frac{1}{1-x+4} = \frac{1}{5-x}$$

$$2.2. \sum_{n=0}^{\infty} tg^n x = \sum_{n=0}^{\infty} (tgx)^n$$

A razão desta série é tgx . Para a série ser convergente tem que ter-se $|tgx| < 1$ ou $-1 < tgx < 1$. Tendo em atenção a função tgx , as condições verificam-se para

$$-\frac{\pi}{4} + k\pi < x < \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Para estes valores de x , a soma da série é

$$s = (tgx)^0 \frac{1}{1-tgx} = \frac{1}{1-tgx}$$

$$2.3. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x+3}{2} \right)^n$$

A razão desta série é $\frac{x+3}{2}$. Para que a série seja convergente tem que ter-se

$$\begin{aligned} |x+3| &< 2 \\ \left| \frac{x+3}{2} \right| &< 1. \text{ Sucessivamente vem } -2 < x+3 < 2 \\ &-5 < x < -1 \end{aligned}$$

Para os valores de x de $]-5,-1[$, a soma da série é

$$s = \frac{x+3}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{x+3}{2}} = -\frac{x+3}{x+1}$$

$$2.4. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{x^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{x}\right)^n$$

A razão desta série é $1/x$. Para a série ser convergente tem que ter-se $\left|\frac{1}{x}\right| < 1$ ou

$|x| > 1$. Ou ainda $x < -1$ ou $x > 1$. Para estes valores de x a soma da série é

$$s = \left(\frac{1}{x}\right)^0 \frac{1}{1 - \frac{1}{x}} = \frac{x}{x-1}.$$

3. As reservas mundiais de certo minério estimam-se em 1000 milhões de toneladas. No ano de 2003, são consumidos 9 milhões de toneladas do minério em causa.

3.1. Supondo que o nível de consumo se mantém constante, quantos anos durará a reserva?

3.2. Quantos anos durará a reserva, se o consumo aumentar 5% em cada ano?

3.3. Quantos anos durará a reserva, se o consumo diminuir 1% em cada ano?

Resolução:

3.1. Se as reservas de minério são 1000 milhões de toneladas e se o consumo for de 9 milhões em cada ano, então o número de anos que a reserva deverá durar, obtém-se calculando $\frac{1000}{9} \approx 111$. Assim, a reserva durará cerca de 111 anos.

3.2. Vejamos o seguinte quadro em que se registam os anos de consumo e os respectivos consumos (em milhões de toneladas).

1º ano	9
2º ano	$9 + 0,05 \times 9 = 9 \times 1,05$
3º ano	$9 \times 1,05 + 0,05 \times (9 \times 1,05) = 9 \times 1,05^2$
4º ano	$9 \times 1,05^2 + 0,05 \times (9 \times 1,05^2) = 9 \times 1,05^3$
n-ésimo ano	$9 \times 1,05^{n-1}$

A reserva esgotar-se-á quando o consumo total for igual a 1000 milhões de toneladas, isto é, ao fim de n anos em que $9 \times 1,05^{n-1} = 1000$. Por tentativas, chega-se a $n=38$ (aproximadamente).

- 3.3.** Vamos fazer um quadro idêntico ao anterior, mas tendo em conta a diminuição do consum em 1% em cada ano.

1º ano	9
2º ano	$9 - 0,01 \times 9 = 9 \times 0,99$
3º ano	$9 \times 0,99 - 0,01 \times 9 \times 0,99 = 9 \times 0,99^2$
4º ano	$9 \times 0,99^3$
n-ésimo ano	$9 \times 0,99^{n-1}$

Para que a reserva se esgotasse teria que acontecer $9 \times 0,99^{n-1} = 1000$. Ou seja,

$$\left(\frac{99}{100}\right)^n = 110, \text{ o que é impossível. Assim, a reserva nunca se esgota.}$$

- 4.** Determinada autarquia constrói anualmente 200 casas e, também em cada ano, consegue vender $3/4$ delas, ficando as restantes disponíveis.

Supondo que os ritmos de construção e de venda se mantêm constantes, qual será a tendência do mercado imobiliário, a longo prazo?

Resolução:

À semelhança do problema anterior vamos construir um quadro em que indicamos o número de anos de construção e o número de casas construídas em cada um desses anos.

1º ano	200
2º ano	$200 + \frac{1}{4} 200 = 200 \left(1 + \frac{1}{4} \right)$
3º ano	$200 + \frac{1}{4} 200 \left(1 + \frac{1}{4} \right) = 200 \left(1 + \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4} \right)^2 \right)$
n-ésimo ano	$200 \left(1 + \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4} \right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{4} \right)^{n-1} \right) = 200 \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{4} \right)^{i-1}$

Como se pretende calcular a tendência do mercado a longo prazo, vamos supor que n tende para infinito. Ou seja, vamos estudar a série $200 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4} \right)^{n-1}$.

Como se vê facilmente a série é uma série geométrica e tem-se

$$200 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4} \right)^{n-1} = 200 \times 4 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4} \right)^n = 200 \times 4 \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} \approx 266.$$

A longo prazo a autarquia deverá ter para vender cerca de 266 casas.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. Seja $a_n = \frac{2n}{3n+1}$.

Verifique:

1.1. se a_n é convergente;

1.2. se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente.

2. Estude a convergência das seguintes séries e, se possível, calcule as suas somas:

2.1. $\sum_{n=1}^{\infty} 5 \left(\frac{2}{3} \right)^{n-1}$

2.2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^{n-1}}{4^n}$

2.3. $\sum_{n=1}^{\infty} 3^{-n} 8^{n-1}$

2.4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+5}$

2.5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}$

2.7. $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n}{n+1}$

2.6. $\sum_{n=1}^{\infty} (2(0,1)^n + (0,2)^n)$

2.8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + 2^n}{6^n}$

3. Calcule os valores de x para os quais as séries seguintes são convergentes. Calcule a soma de cada série para esses valores de x :

3.1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{3^n}$

3.2. $\sum_{n=1}^{\infty} 4^n x^n$

3.3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^n}$

RESPOSTAS:

Abreviaturas D=divergente; C=convergente; s=soma

1.

1.1. C

1.2. D

2.

2.1. C; s=15

2.2. C; s=1/7

2.3. D

2.4. D

2.5. C; s=3/4

2.6. C; s=17/36

2.7. D

2.8. C; s=3/2

3.

3.1. $-3 < x < 3$; s=x/(3-x)

3.2. $-1/4 < x < 1/4$; s=1/(1-4x)

3.3. $|x| > 1$; s=x/(x-1)