

# pré cálculo

## Função Logarítmica

Texto de Apoio

### 1 Definição e propriedades básicas de logaritmos

Sejam  $a$  e  $b$  números reais positivos, com  $a \neq 1$ , o *logaritmo de  $b$  na base  $a$*  é o expoente  $y$  que deve ser colocado na potência da base  $a$  para obter  $b$ , ou seja, é a solução da equação exponencial

$$a^y = b.$$

Assim,

$$\log_a b = y, \quad \text{se, e somente se,} \quad a^y = b.$$

Na expressão  $\log_a b = y$ , chamamos  $a$  de base do logaritmo,  $b$  de logaritmando e  $y$  o logaritmo.

As restrições para  $a$  e  $b$  garantem a existência e a unicidade de  $\log_a b$ .

**Observação 1.** Quando a base do logaritmo é 10, é comum omitirmos na escrita esta base, ou seja, escrevemos  $\log b$ , em lugar de  $\log_{10} b$ .

Lembremos a seguir algumas propriedades dos logaritmos. Se  $a$  é um número real maior que zero e diferente de 1, temos que:

- 1) O logaritmo de 1 em qualquer base  $a$  é igual a 0, isto é,

$$\log_a 1 = 0.$$

De fato, se  $\log_a 1 = y$ , temos que  $a^y = 1 = a^0$ , logo  $y = 0$ .

- 2) O logaritmo da base na própria base é igual a 1, isto é,

$$\log_a a = 1.$$

Se  $\log_a a = y$ , temos que  $a^y = a = a^1$ , logo  $y = 1$ .

- 3) A potência de base  $a$  e expoente  $\log_a b$  é igual a  $b$ , isto é,

$$a^{\log_a b} = b.$$

Observemos que isto é devido à forma como foi definido o logaritmo:  $\log_a b$  é o expoente de  $a$  para obter  $b$ .

4) Logaritmo do produto:

O logaritmo do produto de dois números reais é igual a soma dos logaritmos desses números, isto é,

$$\log_a(b \cdot c) = \log_a b + \log_a c.$$

Fazendo  $\log_a b = x$  e  $\log_a c = y$ , temos que  $a^x = b$  e  $a^y = c$ , portanto  $a^x \cdot a^y = b \cdot c$ , isto é  $a^{x+y} = b \cdot c$ . Assim, por definição,

$$\log_a(b \cdot c) = x + y = \log_a b + \log_a c.$$

5) Logaritmo do quociente:

O logaritmo da divisão de dois números reais é igual a diferença entre o logaritmo do numerador e o logaritmo do denominador.

$$\log_a \left( \frac{b}{c} \right) = \log_a b - \log_a c$$

Observemos que esta propriedade é consequência da propriedade anterior tomando  $\frac{b}{c}$  em lugar de  $b$ , de fato,

$$\log_a b = \log_a \left( \frac{b}{c} \cdot c \right) = \log_a \left( \frac{b}{c} \right) + \log_a c,$$

ou seja,

$$\log_a b - \log_a c = \log_a \left( \frac{b}{c} \right).$$

6) Logaritmo da potência:

O logaritmo da potência  $x$  de base  $b$  qualquer é igual ao produto do expoente pelo logaritmo de base da potência, isto é,

$$\log_a b^x = x \cdot \log_a b.$$

7) Mudança de base:

Nesse caso mantemos  $a$ ,  $b$  e  $c$  reais positivos, mas com  $a \neq 1$  e  $b \neq 1$ , como a seguir,

$$\log_a c = \frac{\log_b c}{\log_b a}.$$

Um caso particular é quando tentamos relacionar  $\log_a b$  com  $\log_b a$ , temos:

$$\log_a b = \frac{\log_b b}{\log_b a} = \frac{1}{\log_b a},$$

assim,

$$\log_a b \cdot \log_b a = 1.$$

## 2 Função Logarítmica

**Definição 1.** Se  $a$  é um número real positivo ( $a > 0$ ) e diferente de 1, define-se a *função logarítmica de base  $a$*  como sendo a função

$$f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R},$$

dada pela lei  $f(x) = \log_a x$ .

Na definição acima,  $\mathbb{R}_+^*$  denota o conjunto dos números reais positivos, assim, a função logarítmica associa a cada número real positivo, um número real que corresponde ao seu logaritmo de base  $a$ .

São exemplos de funções logarítmicas:

- $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$ ;
- $g(x) = \log_9(x^2 + 1)$ ;
- $h(x) = \ln x$ .

A função logarítmica que acabamos de definir é uma função crescente ou decrescente dependendo do valor de  $a$  :

- Se  $a > 1$ , a função  $f(x) = \log_a x$  é crescente, isto é, se  $x_1 < x_2$ , então  $\log_a x_1 < \log_a x_2$ , para todo  $x_1, x_2$  reais positivos;
- Se  $0 < a < 1$ , a função  $f(x) = \log_a x$  é decrescente, isto é, se  $x_1 < x_2$ , então,  $\log_a x_1 > \log_a x_2$ , para todo  $x_1, x_2$  reais positivos.

### Observação 2.

1. Para  $a > 1$ , observemos que:

- Se  $x > 1$ , então  $\log_a x > \log_a 1$ , ou seja,  $\log_a x > 0$ ;
- Se  $0 < x < 1$ , temos que  $\log_a x < \log_a 1$ , isto é,  $\log_a x < 0$ .

2. Para  $0 < a < 1$  notemos que:

- Se  $x > 1$ , então  $\log_a x < \log_a 1$ , portanto  $\log_a x < 0$ ;
- Se  $0 < x < 1$ , temos que  $\log_a x > \log_a 1$ , e assim,  $\log_a x > 0$ .

## 2.1 Gráfico da Função Logarítmica

Dada uma função  $h$  invertível, podemos obter o gráfico de sua inversa a partir do gráfico da função  $h$ , se o par ordenado  $(a, b)$  pertence ao gráfico de uma função  $h$ , temos que o par ordenado  $(b, a)$  pertence ao gráfico de sua inversa. De fato, se consideramos a função  $h : A \rightarrow B$ , seu gráfico é dado por

$$G(h) = \{(x, y) \in A \times B \mid y = h(x)\}.$$

Agora, se  $y = h(x)$ , então  $h^{-1}(y) = x$ , onde  $h^{-1}$  denota a inversa de  $h$ . Assim, se  $(x, y)$  está no gráfico de  $h$ ,  $(y, x)$  está no gráfico  $h^{-1}$ .

Quando estudamos a função exponencial, vimos que esta função é injetiva e sua imagem é o conjunto  $\mathbb{R}_+^*$ , assim, se consideramos a função

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*,$$

dada pela lei  $g(x) = a^x$ , ela é bijetiva e portanto tem inversa.

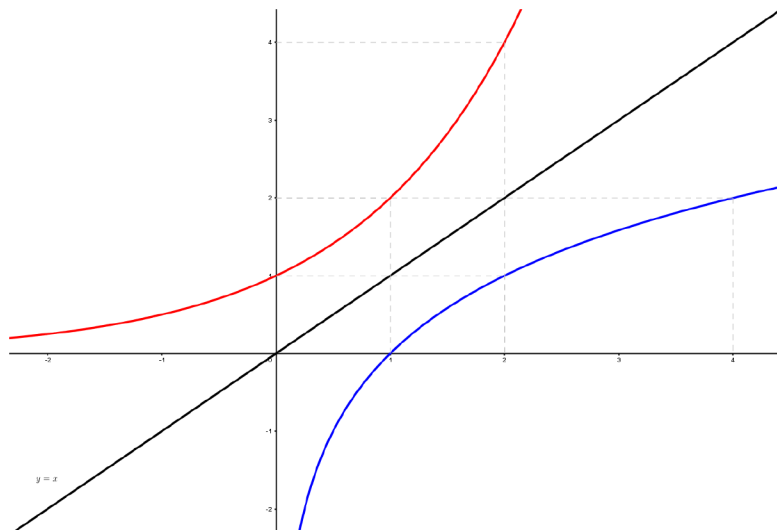
A função logarítmica  $f(x) = \log_a x$  é a inversa da função exponencial  $g(x) = a^x$ . De fato,

$$f(g(x)) = f(a^x) = \log_a(a^x) = x \log_a a = x,$$

e

$$g(f(x)) = g(\log_a x) = a^{\log_a x} = x.$$

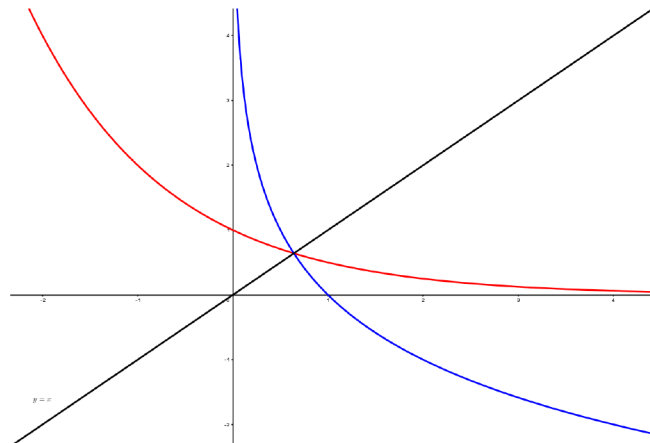
A seguir, apresentamos os gráficos da função exponencial  $g(x) = a^x$ , (de vermelho) e sua inversa  $f(x) = \log_a x$  (de azul). Neste caso estamos considerando  $a > 1$ .



Com respeito ao gráfico da função  $f(x) = \log_a x$  com  $a > 1$ , notemos que:

- o gráfico da função logarítmica é simétrico ao gráfico da função exponencial em relação à reta  $y = x$ , bissetriz dos quadrantes ímpares, ou seja, para cada ponto no gráfico da função logarítmica, existe um ponto no gráfico da função exponencial tal que o segmento que une estes pontos é perpendicular à reta  $y = x$ , e intersecta esta reta em seu ponto médio;
- A medida que  $x$  se aproxima de zero por valores positivos, o gráfico da função logarítmica  $f(x) = \log_a(x)$ , com  $a > 1$ , se aproxima cada vez mais ao eixo  $y$ ;
- O valor de  $\log_a x$ , com  $a > 1$  pode ser tão grande quanto desejado, para isso basta considerar o valor de  $x$  suficientemente grande;
- O gráfico da função intercepta o eixo das abscissas em  $x = 1$ .

No caso em que  $0 < a < 1$ , os gráficos das funções  $f(x) = \log_a x$  e  $g(x) = a^x$  também são simétricos com respeito à reta  $y = x$ , como mostra a figura seguir, onde ilustramos os gráficos da função exponencial  $g(x) = (\frac{1}{2})^x$ , de vermelho e sua inversa  $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ , de azul.



Neste caso,  $0 < a < 1$ , notemos que

- A medida que  $x$  se aproxima de zero por valores positivos, o gráfico da função logarítmica  $f(x) = \log_a(x)$ , se aproxima cada vez mais ao eixo  $y$ ;
- O valor de  $\log_a x$ , pode ser tão grande quanto desejado, para isso basta aproximar cada vez mais o valor de  $x$  a zero por valores positivos;
- O gráfico da função intercepta o eixo das abscissas em  $x = 1$ .

Vejamos alguns exemplos:

**Exemplo 1.** Se  $g(x) = \log_2(1 - 2x)$ , o domínio desta função é formado por todos os valores reais de  $x$  tais que  $1 - 2x > 0$ , ou seja,  $2x < 1$ . Portanto para  $x$  estar no domínio de  $g$ , devemos ter que  $x < 1/2$ . Assim, o domínio da função  $g$  é o conjunto

$$Dom(g) = \left(-\infty, \frac{1}{2}\right).$$

**Exemplo 2.** Consideremos a função  $f(x) = \log_{(x+1)}(2x^2 - 2x + 2)$ . Observemos que, pela definição de função logarítmica,

$$\begin{cases} 2x^2 - 5x + 2 > 0, \\ x + 1 \neq 1; \quad \text{e} \\ x + 1 > 0. \end{cases}$$

Agora, da condição  $2x^2 - 5x + 2 > 0$ , temos que  $x < \frac{1}{2}$  ou  $x > 2$ , portanto, o domínio desta função está dado pelo conjunto:

$$Dom(f) = (-1, 0) \cup \left(0, \frac{1}{2}\right) \cup (2, +\infty).$$

## Referências

- [1] IEZZI, G *et al.*, *Matemática: volume único*, 5<sup>a</sup> ed., São Paulo, Atual, 2011.
- [2] MEDEIROS, V., CALDEIRA, A., SILVA, L., MACHADO, M., *Pré-Cálculo*, São Paulo, Cengage Learning, 2008.
- [3] STEWART, J., *Cálculo: Volume I*, 7<sup>a</sup> ed., São Paulo, Cengage Learning, 2015.