

Estatística, Análise Combinatória e Probabilidade no Ensino Médio: uma abordagem com o auxílio do *software* GeoGebra

Artálio Barbosa Furtado

Mestrado em Matemática para Professores

Departamento de Matemática

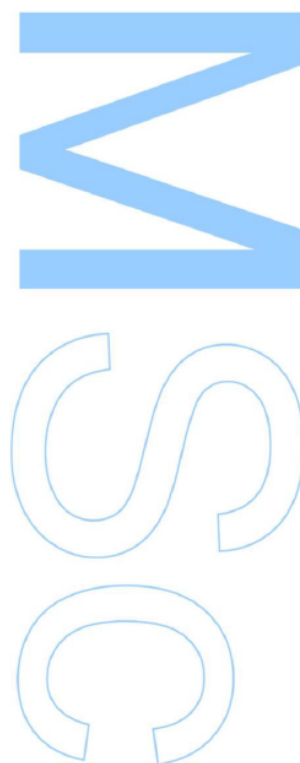
Ano 2019

Orientadora

Maria Helena Pinto da Rocha Mena de Matos

Faculdade de Ciências da Universidade do Porto

Professora Auxiliar

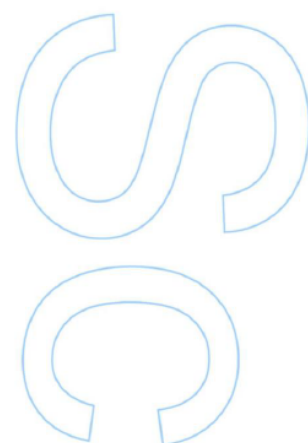
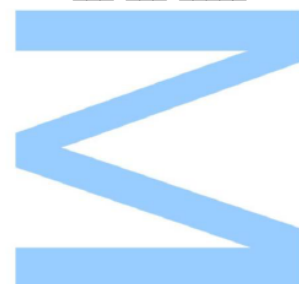




Todas as correções determinadas pelo júri, e só essas, foram efectuadas.

O presidente do Júri,

Porto, ____ / ____ / ____



Dedicatória

Dedico este trabalho aos meus pais, Firmino Furtado Neto e Maria Pedrosa Barbosa Furtado, por serem exemplos de garra e honestidade, por todas as orações e apoio incondicional.

Às minhas irmãs Roberta, Renata, Artanayza e Larissa, pela confiança e pelas palavras de incentivo que tantas vezes me ajudaram a levantar a cabeça nos momentos de dúvida.

Agradecimentos

Agradeço a Deus pelo dom da vida e por proporcionar-me tantas realizações.

Aos meus pais e irmãs, por acreditarem tanto em mim e por sempre me mostrarem que com trabalho duro e dedicação sou capaz de conseguir tudo o que almejo.

Aos meus amigos, que sempre me incentivaram a não desistir de minha busca por conhecimento, e especialmente ao meu querido amigo Bill (in memoriam) que tão cedo partiu, mas que deixou-me um grande exemplo de perseverança.

Aos meus colegas de mestrado, pela ajuda e pela força dadas a mim, e por compartilharam da realização de um sonho.

A todos os docentes do Mestrado em Matemática para Professores, em especial aos que proporcionaram-me grandes ensinamentos.

À minha orientadora, a professora Dra. Maria Helena Pinto da Rocha Mena de Matos, pela orientação exemplar, pela visão crítica e pelo empenho saudavelmente exigente, os quais contribuíram para enriquecer todas as etapas deste trabalho.

A todos os meus amigos da Residência Alberto Amaral, em especial à Thaís e ao Flávio, que me ajudaram a suportar a saudade da minha família durante esse período.

E para finalizar, o meu mais sincero agradecimento a todas as pessoas que contribuíram direta ou indiretamente para a concretização de mais esta etapa, estimulando-me intelectual e emocionalmente.

*"O que vale na vida não é o ponto de partida e sim a chegada.
Caminhando e semeando, no fim terás o que colher".*

(Cora Carolina)

Resumo

Destaca-se no meio social dos dias em que vivemos uma exigência em relação a conhecimentos que tratem de um número cada vez maior de informações, para que seja possível intervir e participar das mudanças sociais de forma crítica e fundamentada. Tal situação faz com que os conteúdos de Estatística, Análise Combinatória e Probabilidade, previstos nos documentos educacionais do Brasil, recebam um melhor tratamento na elaboração do currículo escolar, e isso exige um novo olhar sobre o seu ensino. Nesse contexto, o presente trabalho utiliza os recursos tecnológicos, nomeadamente o GeoGebra, para propor abordagens de trabalho para professores e alunos relativamente a esses conteúdos, por meio de sugestões de tarefas que podem ser solucionadas através desse *software*. Este projeto pretende contribuir para a melhoria do ensino dos conteúdos já mencionados, seja na preparação do docente, seja através de propostas de tarefas para utilização em sala de aula.

Palavras Chaves: Estatística. Análise Combinatória. Probabilidade. Ensino Médio. Tarefas. GeoGebra.

Abstract

Nowadays there is a demand for knowledge dealing with an increasing number of information, to make it possible to be able to intervene and participate in social changes in a critical and informed manner. This situation led to a more careful treatment of the contents of Statistics, Combinatorial Analysis and Probability, in the elaboration of the school curriculum, provided in the education documents of Brazil, and this requires a new look at its teaching. In this context, the present work uses the technological resources, namely GeoGebra, to present work proposals for teachers and students regarding these contents, through suggestions of tasks that can be solved by means of this software. Therefore, this project aims to contribute to the teaching's improvement of the already mentioned contents, either in the teacher's preparation, or through proposals of tasks for use in the classroom.

Keywords: *Statistic. Combinatorial Analysis. Probability. High school. Tasks. GeoGebra.*

Sumário

Dedicatória	i
Agradecimentos	ii
Epígrafe	iii
Resumo	iv
Abstract	v
Lista de Figuras	ix
1 Introdução	1
2 Instrumentos de Referência para o ensino de Matemática	4
2.1 Os Parâmetros Curriculares Nacionais - PCNs	5
2.2 A Base Nacional Comum Curricular - BNCC	7
3 Conceitos de Estatística, Análise Combinatória e Probabilidade	13
3.1 Descrição de Dados	14
3.1.1 População e Amostra	14
3.1.2 Variáveis	14
3.1.3 Dados Estatísticos	15
3.1.4 Tabelas de Frequências	15
3.2 Representações Gráficas	17
3.2.1 Diagrama de Barras	17
3.2.2 Pictograma	18
3.2.3 Gráfico de Pontos	18
3.2.4 Gráfico de Setores	18
3.2.5 Diagrama de Caule e folhas	19
3.2.6 Histograma	20
3.2.7 Polígono de frequências	20
3.3 Medidas de Localização e Dispersão	21
3.3.1 Média	21
3.3.2 Moda	21

3.3.3	Mediana	22
3.3.4	Quartil	22
3.3.5	Diagrama de Extremos e Quartis	23
3.3.6	Desvio médio absoluto	24
3.3.7	Variância	24
3.3.8	Desvio Padrão	24
3.4	Análise Combinatória	25
3.4.1	Princípio Fundamental da Contagem ou Princípio Multiplicativo	25
3.4.2	Permutação Simples	25
3.4.3	Permutação com repetições	26
3.4.4	Arranjo Simples	26
3.4.5	Combinações Simples	26
3.4.6	Números Binomiais	27
3.4.7	Triângulo de Pascal	27
3.4.8	Binómio de Newton	28
3.5	Probabilidade	28
3.5.1	Experiência Aleatória	28
3.5.2	Espaço Amostral e Acontecimento	28
3.5.3	Probabilidade Condicional	30
3.5.4	Probabilidade Geométrica	30
3.5.4.1	Ponto aleatório numa linha	30
3.5.4.2	Ponto aleatório numa região plana	31
3.5.4.3	Ponto aleatório num sólido	31
4	Tecnologias no Ensino de Matemática	33
4.1	A Tecnologia da Informação e Comunicação - TIC e os conteúdos de Estatística, Análise Combinatória e Probabilidade	34
4.2	GeoGebra - <i>Software</i> de Geometria dinâmica	37
5	Propostas de tarefas para solucionar com o auxílio do GeoGebra	41
5.1	Tarefas de Estatística	42
5.1.1	Tarefa 01: Peso dos Cães	42
5.1.2	Tarefa 02: Agência de Viagens	44
5.1.3	Tarefa 03: Transporte Escolar	45
5.1.4	Tarefa 04: Pessoas com Telemóveis	46
5.1.5	Tarefa 05: Consumo de Energia elétrica	48
5.1.6	Tarefa 06: Quantidade de Calçado	49
5.2	Tarefas de Análise Combinatória	50
5.2.1	Tarefa 07: Encontro no Parque	50
5.2.2	Tarefa 08: Logótipo de uma Empresa	51
5.2.3	Tarefa 09: Diagonais de um Polígono Convexo	52
5.3	Tarefas de Probabilidade	53
5.3.1	Tarefa 10: Competição de paraquedismo	53

5.3.2	Tarefa 11: Probabilidade no triângulo	54
5.3.3	Tarefa 12: Jogo da Roleta	55
6	Conclusão	57
	Referências Bibliográficas	59
	Apêndices	61
	Apêndice A Soluções para as Tarefas com o GeoGebra	61
A.1	Solução para a Tarefa 01	61
A.2	Solução para a Tarefa 02	63
A.3	Solução para a Tarefa 03	65
A.4	Solução para a Tarefa 04	66
A.5	Solução para a Tarefa 05	68
A.6	Solução para a Tarefa 06	70
A.7	Solução para a Tarefa 07	72
A.8	Solução para a Tarefa 08	74
A.9	Solução para a Tarefa 09	76
A.10	Solução para a Tarefa 10	77
A.11	Solução para a Tarefa 11	78
A.12	Solução para a Tarefa 12	80
	Apêndice B Lista de Comandos - GeoGebra	83
B.1	Medidas de Localização e Dispersão e Organização de dados	83
B.2	Tabelas	84
B.3	Diagramas e Gráficos	84
B.4	Análise Combinatória	86
B.5	Probabilidades	86

Lista de Figuras

3.1	Gráfico de Barras Horizontais.	17
3.2	Gráfico de Barras Verticais.	17
3.3	Pictograma.	18
3.4	Gráfico de Pontos.	18
3.5	Gráfico de setores.	19
3.6	Diagrama de Caule e Folhas.	19
3.7	Histograma: frequência absoluta	20
3.8	Histograma: frequência relativa	20
3.9	Polígono de frequências.	20
3.10	Quartis.	23
3.11	Diagrama de Extremos e Quartis.	23
3.12	Probabilidade geométrica: comprimento.	31
3.13	Probabilidade geométrica: área.	31
3.14	Probabilidade geométrica: volume.	31
4.1	Multiplas representações com o <i>software</i>	36
4.2	Interface do <i>Software</i> GeoGebra.	38
5.1	Canil A (Pesos dos cães).	43
5.2	Canil B (Pesos dos cães).	43
5.3	Zona de pouso da competição.	53
A.1	Pesos dos cães - Canil A.	62
A.2	Pesos dos cães - Canil B.	62
A.3	Medidas de Localização e Dispersão, Dados da Amostra e Histograma - Canil A.	63
A.4	Medidas de Localização e Dispersão, Dados da Amostra e Histograma - Canil B.	63
A.5	Gráfico de Setores: Vendas bimestrais.	65
A.6	Estatísticas e Histograma: Distâncias para transporte escolar.	66
A.7	Alteração: (2.0 e 6.2)→(2.5 e 6.5).	66
A.8	Alteração: (5.0)→(3.0).	66
A.9	Gráfico de barras e dados: Homem.	67
A.10	Gráfico de barras e dados: Mulher.	67
A.11	Classe mediana: Homem.	68
A.12	Classe mediana: Mulher.	68

A.13 Gráfico de Barras do Histórico do Consumo de Água.	69
A.14 Valores de gastos mensal e anual.	70
A.15 Diagrama de Caule e Folhas: Quantidade de calçados.	71
A.16 Tabela de Frequências: Quantidade de calçados.	71
A.17 Diagramas de Caule e Folhas: Quantidades 1 e 2.	72
A.18 Exemplos de caminhos possíveis no parque.	73
A.19 N° de caminhos possíveis.	74
A.20 Combinação de duas cores.	75
A.21 Combinação de três cores.	75
A.22 Combinação de quatro cores.	75
A.23 Polígono com $n = 3$ lados.	76
A.24 Polígono com $n = 4$ lados e suas diagonais.	76
A.25 Polígono com $n = 5$ lados e suas diagonais.	76
A.26 Polígono com 6 lados e cálculo do número de diagonais.	77
A.27 Polígono com 10 lados e cálculo do número de diagonais.	77
A.28 Probabilidades: atingir ou não a zona A.	78
A.29 Ponto A dentro de região favorável à condição do enunciado.	79
A.30 Probabilidade e demonstração de pontos nas zonas favoráveis.	80
A.31 Probabilidades por cores de setor.	82

Capítulo 1

Introdução

Quase todos os segmentos da atividade humana sofrem influências, nos dias atuais, dos conteúdos abordados nas áreas de Estatística, Análise Combinatória e Probabilidade. Portanto, torna-se indispensável o estudo desses conteúdos, nos diversos níveis do ensino.

É nessa perspectiva que esse estudo se concretiza, pois pretende-se apresentar uma proposta de trabalho que possa ser aplicada em sala de aula de maneira que possibilite um enriquecimento no processo de resolução de problemas, nomeadamente os que abrangem tais conteúdos, através da utilização de recursos tecnológicos, em especial o GeoGebra - *software* de geometria dinâmica - a contemplar as unidades temáticas das três séries do Ensino Médio do programa educacional do Brasil.

Enquanto professor, foi possível constatar que essas unidades temáticas são negligenciadas quanto ao tempo dedicado a elas, muitas vezes devido à própria distribuição de conteúdos no manual do aluno, ao disponibilizá-las apenas no final do livro, o que faz com que as mesmas, em alguns casos, mal possam ser lecionadas.

Para além disso, o ensino formal dos conteúdos na área de matemática, na grande maioria das vezes limita-se à reprodução e repetição de fórmulas matemáticas, e as construções gráficas são realizadas manualmente, sem a utilização de recursos e/ou ferramentas computacionais que contribuiriam para facilitar, de maneira mais eficaz, a resolução de inúmeras tarefas morosas e de complexidade variada.

O presente estudo tem como principal objetivo enriquecer o processo de resolução de problemas dos conteúdos de Estatística, Análise Combinatória e Probabilidade, mediante a proposta de tarefas para serem solucionadas com o auxílio do *software* GeoGebra. Para chegar a esse objetivo maior, buscar-se-á ampliar o conhecimento acerca das diretrizes que, no Brasil, garantem o ensino de matemática, nomeadamente o ensino desses conteúdos, através da apresentação dos instrumentos de regulamentação que pertencem ao país. Também se busca apresentar os conceitos das unidades temáticas dessa área da matemática, caracterizar o uso de tecnologias no ensino, bem como detalhar, de forma resumida, algumas funcionalidades do *software* e, por fim, exemplificar a utilização e os benefícios do GeoGebra na resolução de tarefas desse tema.

Nesse sentido, o segundo capítulo traz uma apresentação sucinta dos instrumentos que regulamentam o ensino dos conteúdos de Estatística, Análise Combinatória e Probabilidade

no Brasil, através de uma apresentação das principais características que baseiam essa ação, inseridas na Lei de Diretrizes e Bases 9394/96, bem como uma breve explanação acerca das competências e habilidades que devem ser trabalhadas nessa área. No que se refere às regulamentações do ensino desses conteúdos, tanto os Parâmetros Curriculares Nacionais (documento que está em vigor nos dias atuais) quanto a Base Nacional Comum Curricular - BNCC (que está em fase de implementação em todo o país), além de contribuições de estudiosos como Albuquerque, Codeiro e Silva (2013), Oliveira (2006) e Borges (2009), serão abordados aspectos que auxiliam a preparação de um currículo escolar que contribua para formação pessoal e profissional dos estudantes.

No terceiro capítulo são apresentados os conceitos básicos de matemática que fazem parte da área em questão, de modo a rever de forma clara e concisa os conteúdos lecionados em Estatística, Análise Combinatória e Probabilidade. Diante disso, a intenção aqui será apenas a precisão e clarificação dos conceitos, sem o pensamento didático que um manual escolar deve conter.

Em seguida, no quarto capítulo, é apresentada uma revisão do cenário teórico, relativamente às pesquisas que abordam tais conteúdos, com ênfase na utilização de Tecnologias da Informação e Comunicação - TICs no ensino de matemática, com a finalidade de caracterizar alguns dos pensamentos construídos ao longo dos anos por pesquisadores como Viseu & Ponte (2000 e 2012), Borba & Penteado (2007) e Oliveira (2018), para além dos instrumentos, como por exemplo os PCN⁺ (2006), no que se refere à prática de ensinar matemática em sala de aula com a utilização de recursos tecnológicos. Faz-se também uma breve apresentação do *software* GeoGebra, por meio de pensamentos como os de Bu & Schoen (2011), Basniak & Estevam (2014), Bortolossi (2016), entre outros, para conhecer de maneira simples algumas ferramentas do programa. Este capítulo direciona-se, principalmente, para os educadores, que podem buscar neste trabalho uma clarificação quanto aos fundamentos que servem de alicerce para a implementação das tecnologias no ensino da matemática.

No quinto capítulo são apresentadas tarefas que abrangem os conteúdos: Estatística, Análise Combinatória e Probabilidade, a fim de propor alternativas metodológicas que possam ser utilizadas tanto pelos professores como pelos alunos no processo de resolução de problemas, de forma a facilitar a sua compreensão e a exploração das potencialidades do *software* quanto ao uso do recurso tecnológico para esse propósito. Optou-se por não apresentar um número muito grande de tarefas, para que o trabalho não se tornasse repetitivo, afinal, a ideia é mostrar apenas algumas das potencialidades do *software*, uma vez que o mesmo possui um vasto repertório de possibilidades.

Em anexo a este projeto, são apresentadas sugestões de resolução com o GeoGebra para cada uma das tarefas propostas, com o intuito de apresentar ao leitor um roteiro de utilização do programa. É importante ressaltar que tal roteiro sugerido não se configura como a maneira predominante de resolução, mas sim como apenas uma das várias possibilidades. Em seguida, apresentar-se-á também uma lista de comandos para utilizar no programa que podem auxiliar o leitor durante o processo de resolução das tarefas, bem como auxiliar o trabalho de professores e alunos no processo de ensino e aprendizagem.

Vale ressaltar ainda que outro ponto que motivou a realização desta pesquisa foi o gosto do

autor pelos conteúdos aqui abordados, e também, o desafio à exploração das potencialidades do GeoGebra no âmbito desses conteúdos, uma vez que o número de trabalhos já desenvolvidos com essa configuração é constituído, na sua maioria, por trabalhos nas áreas de Álgebra e Geometria.

Diante do exposto, pretende-se por meio deste projeto alcançar o objetivo principal, uma vez que qualquer professor ligado ao Ensino Médio encontrará nele alguns esclarecimentos quanto aos conceitos que devem ser lecionados, sugestões de propostas e metodologias para o ensino de tais conteúdos, por meio de tarefas e soluções de como proceder diante do *software*, para além de uma listagem dos comandos que podem ser utilizados durante o ensino e a aprendizagem dessas unidades temáticas.

Este projeto, portanto, constitui-se num convite à reflexão sobre as possibilidades que a exploração de um *software* de Matemática dinâmica pode agregar aos processos de ensino e de aprendizagem de Matemática, nomeadamente das unidades temáticas de Estatística, Análise Combinatória e Probabilidade, no qual propõe alguns caminhos para os papéis que alunos e professores podem assumir neste contexto.

Capítulo 2

Instrumentos de Referência para o ensino de Matemática

TÍTULO V – Dos Níveis e das Modalidades de educação e Ensino

CAPÍTULO I – Da Composição dos Níveis Escolares

Art. 21. A educação escolar compõe-se de:

I – educação básica, formada pela educação infantil, ensino fundamental e ensino médio;

II – educação superior.

(Lei de Diretrizes e Bases - LDB 9394/96 atualizada em 2017, p. 17).

No artigo 21 da LDB encontram-se os níveis e modalidades de ensino que compõem a educação no Brasil. A partir dessa nivelção das etapas da educação foram elaborados pelo governo os Parâmetros Curriculares Nacionais - PCN, visando auxiliar a elaboração dos currículos escolares com orientações para os professores, gestores, teóricos e educadores em geral, levando em consideração os materiais didáticos, os recursos que a escola dispõe, as aulas dos professores e também as atividades extracurriculares.

As orientações educacionais contidas nos Parâmetros Curriculares foram publicadas por nível de escolaridade na seguinte ordem cronológica:

- Parâmetros Curriculares Nacionais - PCN: 1ª a 4ª série (1997);
- Parâmetros Curriculares Nacionais - PCN: 5ª a 8ª série (1998);
- Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio - PCNEM (2000);
- Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais - PCN+ (2006).

Os PCNEM foram elaborados e publicados após educadores e especialistas representantes de todo o Brasil se reunirem para analisarem e discutirem as mudanças e desafios que surgiram com o passar do tempo. Foram feitos com o intuito de auxiliar a comunidade escolar na execução de seus trabalhos, contribuindo para a atualização profissional, servindo também de apoio à reflexão sobre a prática diária, ao planejamento de aulas e sobretudo ao desenvolvimento do currículo da escola.

No ano de 2006 foram desenvolvidas e publicadas (em três volumes, sendo o volume 02 direcionado à Ciência da Natureza, Matemática e suas Tecnologias) novas orientações para o Ensino Médio, sob o título de PCN⁺.

As novas Orientações Curriculares para o Ensino Médio foram elaboradas a partir de 2004 mediante amplas discussões a respeito da evolução da educação do país, reunindo equipes técnicas das esferas estaduais de educação, professores e estudantes da rede pública e representantes da comunidade acadêmica. Esse complemento surgiu para facilitar a organização do trabalho escolar na sequência das mudanças sociais e culturais que a sociedade alcançou, e oferece, de forma mais detalhada, sugestões para a ação pedagógica mais apropriada ao mundo moderno.

2.1 Os Parâmetros Curriculares Nacionais - PCNs

No intuito de contribuir para a implementação das reformas educacionais, definidas pela Lei da Educação Nacional e por Diretrizes do Conselho Nacional de Educação, os Parâmetros Curriculares (em especial os PCN⁺) propõem, entre seus objetivos centrais, facilitar a organização do trabalho da escola. No texto são descritas as competências gerais que se deseja promover com os conhecimentos disciplinares nesse nível, apresentando sugestões de práticas educativas e de organização dos currículos escolares, para além de estabelecer temas estruturadores do ensino na área da matemática e suas tecnologias.

Competências são um conjunto de conhecimentos e habilidades, relacionados entre si, que permitem a um indivíduo a atuação efetiva num trabalho ou numa situação. Isso envolve a capacidade de realizar demandas complexas, como também recorrer e mobilizar recursos, em contexto particular. As competências, portanto, incorporam uma habilidade, no entanto, são mais do que apenas ela. Tais competências reportam-se a conhecimentos, pensamento científico, crítico e criativo, diversidade cultural, comunicação, cultura digital, trabalho e projeto de vida, argumentação, autoconhecimento, cooperação, empatia, responsabilidade para consigo e com o outro e cidadania.

Em Matemática e suas Tecnologias, foram eleitas três competências gerais como metas para a etapa da escolaridade básica para todos os alunos: representação e comunicação (que envolve a leitura, a interpretação e a produção de textos nas diversas linguagens e formas textuais); investigação e compreensão (marcada pela capacidade de enfrentar e solucionar situações-problema, utilização dos conceitos e procedimentos peculiares do fazer e pensar das ciências); e contextualização das ciências no âmbito sociocultural (na forma de análise crítica das ideias e dos recursos da área e das questões do mundo que podem ser respondidas ou transformadas por meio do pensar e do conhecimento científico).

Nesse contexto, os PCN⁺ surgem com a finalidade de promover a construção de um currículo bem estruturado, que consiga proporcionar uma formação pessoal e profissional dos estudantes de maneira satisfatória.

Os PCNEM são divididos por conteúdos e orientações de acordo com as áreas de aprendizagem: Linguagem, Código e suas Tecnologias; Ciências da Natureza e suas Tecnologias; Matemática e suas Tecnologias; e Ciências Humanas e suas Tecnologias. Segundo as ori-

entações complementares dos PCN⁺, no que se refere à Matemática e suas Tecnologias, é sugerida a organização em três temas estruturadores: Álgebra, Geometria e Análise de Dados. Isso não significa que os conteúdos desses temas devam ser trabalhados de forma individual, mas, ao contrário, deve-se buscar constantemente a articulação entre eles.

Ainda de acordo com as orientações desse instrumento norteador, o ensino de Matemática durante o Ensino Médio, ao final de três anos de escolaridade, deve ter como finalidade que:

os alunos saibam usar a Matemática para resolver problemas práticos do cotidiano; para modelar fenômenos em outras áreas do conhecimento; compreendam que a Matemática é uma ciência com características próprias, que se organiza via teoremas e demonstrações; percebam a Matemática como um conhecimento social e historicamente construído; saibam apreciar a importância da Matemática no desenvolvimento científico e tecnológico (PCN⁺ vol. 02, 2006, p. 69).

Assim, ao trabalhar os conteúdos, deve-se sempre agregar valores formativos relativamente ao desenvolvimento do pensamento matemático. Isso significa inserir os alunos num processo de aprendizagem que enriqueça o raciocínio matemático nos aspetos de: formular problemas, indagar-se sobre a existência de soluções, designar hipóteses e tirar conclusões, sugerir e apresentar exemplos e contraexemplos, abstrair regularidades, criar modelos, generalizar situações e discutir com fundamentação lógica.

O terceiro tema é recomendado pelos PCN⁺ para todos os níveis de ensino, em especial para o Ensino Médio pois, o estudo desse tema pode possibilitar aos alunos a ampliação e a formalização de seus conhecimentos sobre raciocínio estatístico, combinatório e probabilístico. Uma justificação para essa recomendação é baseada na crescente demanda social, e no uso de ferramentas estatísticas na sociedade contemporânea na busca pela compreensão das informações que circulam atualmente nos meios de comunicação, além de auxiliar a tomada de decisões e prever soluções em situações do quotidiano.

Segundo Albuquerque, Cordeiro e Silva (2013, p. 124), *"uma das grandes competências propostas pelos PCN está relacionada com a contextualização sociocultural, ou seja, procurar aproximar o aluno da realidade que o cerca, de modo que ele possa interagir com essa realidade"*.

No Ensino Médio, aprofunda-se e amplia-se os estudos na área da matemática. No que se refere à Estatística, Análise Combinatória e Probabilidade, a aprendizagem é importante para os auxiliar no julgamento de determinadas situações, e também para melhorar a sua capacidade de interpretação crítica.

Diferentemente do Ensino Fundamental, no Ensino Médio o jovem deve apresentar um olhar crítico para os dados que lhe são apresentados em gráficos e tabelas, e não apenas conseguir lê-los. Os estudantes têm o papel de exercitar as críticas nas discussões a respeito de dados estatísticos, bem como na avaliação de argumentações probabilísticas que são baseadas em alguma informação. Essa construção de argumentos racionais por meio de observações críticas das informações fornecidas exige o devido uso dos conceitos de estatística e probabilidade.

De acordo com as orientações curriculares, nesta fase de escolaridade

deve-se possibilitar aos alunos o entendimento intuitivo e formal das principais idéias matemáticas implícitas em representações estatísticas, procedimentos ou conceitos. Isso inclui entender a relação entre síntese estatística, representação gráfica e dados primitivos (PCN⁺, 2006, p. 79).

Os conteúdos relativos à essa área da matemática no Ensino Médio, são de grande importância porque se relacionam facilmente com temas de outras áreas e permitem a abordagem de questões relacionadas ao cotidiano dos próprios alunos. Tal afirmação vai de encontro às sugestões dos PCN⁺, no que diz respeito à dinâmica de construção do conhecimento do aluno, com significado, diante da contextualização (ou descontextualização) dos temas abordados, seja na realidade escolar dele ou na execução da sua própria cidadania.

Diante de tudo o que foi mencionado até aqui, não referir o manual escolar seria imprudente, uma vez que os professores, na sua maioria, norteiam-se principalmente pelos livros selecionados no início do ano letivo. Nesse contexto, Oliveira (2006, p. 11) traz à tona o facto de que o conteúdo de Estatística, por exemplo, não recebe a mesma atenção dos professores que os demais conteúdos matemáticos, pois esse tema *“acaba sendo subestimado pelos livros didáticos, deixado pelos professores para o final do ano letivo e, muitas vezes, sequer é abordado em aula”*.

Isto posto, à luz dos destaques elencados pelos PCN⁺, tal conteúdo requer cuidados na sua maneira de ser lecionado, pois tenciona dar significação do que é real para o aluno dentro da sua vivência, e assim direcioná-lo para a construção de sua própria aprendizagem. Isso requer que os docentes tenham também um olhar mais cauteloso ao preparar seus planos de trabalho, com criatividade, para que o manual escolar não seja seu único recurso.

2.2 A Base Nacional Comum Curricular - BNCC

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é um documento de caráter normativo que define o conjunto orgânico e progressivo de aprendizagens essenciais que todos os alunos devem desenvolver ao longo das etapas e modalidades da Educação Básica, de modo a que tenham assegurados seus direitos de aprendizagem e desenvolvimento, em conformidade com o que preceitua o Plano Nacional de Educação (BNCC, 2018, p. 7).

A BNCC, assim como os PCNs, objetiva nortear o que deve ser ensinado nas escolas, abrangendo todas as etapas de estudo da educação básica: Educação Infantil, Ensino Fundamental (séries iniciais e finais), e Ensino Médio. Tratam-se de novas Diretrizes para alcançar os objetivos de aprendizagem para cada uma dessas etapas da formação do indivíduo, ou seja, a Base é uma ferramenta que visa orientar a elaboração do currículo de trabalho dentro de cada escola, sem rejeitar as particularidades metodológicas regionais e sociais de cada localidade.

A Base designa aprendizagens essenciais que devem ser alcançadas ao definir competências e habilidades específicas dentro de cada área de conhecimento (para além das 10 competências gerais destinadas a todo o Ensino Médio), enquanto que o currículo escolar, por

sua vez, deve determinar como será realizado o trabalho para alcançar esses objetivos através de estratégias pedagógicas adequadas. Com a visão de unificar as referências e influências de cada instituição de ensino, a BNCC aparece com a proposta de solucionar um problema muito comum no país, que é a discrepância entre os seus Projetos Políticos Pedagógicos.

O texto inicial da Base foi divulgado em Julho de 2015. Em Setembro do mesmo ano o público teve espaço para contribuir na construção desse novo instrumento. Relativamente à matemática, a Sociedade Brasileira de Educação Matemática - SBEM, que é uma entidade que reúne diversos professores da Educação Básica, pesquisadores em Educação Matemática, além de outros agentes, realizou um debate aprofundado com a intenção de discutir melhorias e correções para o texto da Base. Assim, pode-se afirmar que a discussão e os demais processos relativos à versão inicial do texto contou com uma significativa participação dos agentes ligados às temáticas educacionais, gerais e específicas.

A segunda versão do texto foi publicada em Maio de 2016 e a partir desse evento iniciaram-se os Seminários Estaduais com a participação de todos os agentes ligados ao assunto: professores, gestores, pesquisadores em Educação e Gestão do Currículo, entre outros, para receber, ainda mais, contribuições relevantes para a conclusão do documento. Após novas análises e discussões, o texto passou a ser tratado em duas vertentes, uma designada à educação Infantil e Fundamental, e outra destinada ao Ensino Médio. Em Dezembro de 2017 foi publicada pelo Ministério da Educação e Conselho Nacional de Educação a versão final do texto que norteia a primeira parte: Educação Infantil e Fundamental (séries iniciais e finais). Por sua vez, o documento relativo ao Ensino Médio foi divulgado em Abril de 2018, e permaneceu em debate, pelo Conselho Nacional de Educação, até o mês de Dezembro do mesmo ano, no qual foi aprovado.

A BNCC visa garantir uma formação integral aos indivíduos, através do desenvolvimento de competências específicas e habilidades que preveem a formação de cidadãos criativos, responsáveis, críticos e participativos, que sejam capazes de se comunicar, de lidar com as emoções e apresentar soluções para problemas e desafios e assim promover a elevação da qualidade do ensino. Tais competências implicam um desligamento do modelo da escola tradicional, que valoriza a memorização de conteúdos.

De acordo com as novas mudanças no cenário da educação do país, com a intenção de substituir o modelo único de currículo do Ensino Médio por um modelo flexível e diversificado, a Lei nº 13.415/2017 alterou a LDB, estabelecendo que:

O currículo do ensino médio será composto pela Base Nacional Comum Curricular e por itinerários formativos, que deverão ser organizados por meio da oferta de diferentes arranjos curriculares, conforme a relevância para o contexto local e a possibilidade dos sistemas de ensino, a saber:

- I – linguagens e suas tecnologias;
- II – matemática e suas tecnologias;
- III – ciências da natureza e suas tecnologias;
- IV – ciências humanas e sociais aplicadas;

V – formação técnica e profissional (LDB, Art. 36; ênfases adicionadas).
(BNCC, 2018, p.468).

Essa nova estrutura além de ratificar a organização por áreas do conhecimento prevê a oferta de variados itinerários formativos, seja para o aprofundamento acadêmico numa ou mais áreas do conhecimento, seja para a formação técnica e profissional. Nesse contexto, faz-se necessário uma reorientação dos currículos e propostas pedagógicas.

Na proposta de texto da Base apresentam-se dez competências gerais para toda a educação básica, contudo, em cada uma das áreas de conhecimento integram-se competências específicas de área¹, que devem ser concebidas ao longo da etapa escolar. Para além disso, são apresentados também os itinerários formativos, que indicam quais os possíveis caminhos que um estudante pode seguir durante sua trajetória acadêmica e de formação, e assim possibilitar uma flexibilização curricular. Com isso a escola pode oferecer aos estudantes a oportunidade de escolha da área sobre a qual eles apresentam maior interesse. Os itinerários são cinco, um para cada grande área do conhecimento e um para a formação técnica e profissional.

A BNCC traz no seu texto as competências e conhecimentos essenciais que deverão ser oferecidos a todos os estudantes na parte comum (1800 horas), a abranger as quatro áreas do conhecimento e todos os componentes curriculares do Ensino Médio definidos por Lei. As disciplinas obrigatórias nos três anos de Ensino Médio são Língua Portuguesa e Matemática, e as demais disciplinas serão articuladas de acordo com a construção curricular de cada unidade de ensino. O restante da carga horária de estudos (1200 horas) será destinado ao aprofundamento acadêmico nas áreas eletivas ou a cursos técnicos, que se configuram como itinerários formativos. E assim totaliza a carga horária (3000 horas) necessária para formação do indivíduo durante essa etapa escolar².

Os currículos escolares é que irão estabelecer de que maneira atender às orientações da BNCC, e envolver neles aspetos necessários como: material didático, metodologia de ensino, preparação dos professores e avaliações. Compete aos órgãos responsáveis pelo ensino e às escolas elaborarem os currículos mínimos, com a devida consideração à BNCC e as realidades e necessidades locais.

No Ensino Médio o foco é direcionado para uma construção de um olhar integrado da matemática, aplicado à realidade. Nesse contexto, ao refletir que a realidade é a referência para a ação, torna-se preciso considerar as vivências dos estudantes, envolvidos em diferentes graus, seja por condições socioeconômicas ou pelos avanços tecnológicos, por premissas do mercado de trabalho ou pela potencialidade dos meios de comunicação, entre outros aspetos.

A BNCC na área de Matemática e suas Tecnologias traz como proposta a consolidação, a ampliação e o aprofundamento das aprendizagens essenciais desenvolvidas no Ensino Fundamental.

As competências específicas de Matemática e suas Tecnologias são:

Competência específica 1: Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidia-

¹Nos PCNs, eram apresentadas competências gerais em cada uma das áreas de conhecimento.

²Anteriormente a carga horária necessária era de 2400h.

nas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral.

Competência específica 2: Propor ou participar de ações para investigar desafios do mundo contemporâneo e tomar decisões éticas e socialmente responsáveis, com base na análise de problemas sociais, como os voltados a situações de saúde, sustentabilidade, das implicações da tecnologia no mundo do trabalho, entre outros, mobilizando e articulando conceitos, procedimentos e linguagens próprios da Matemática.

Competência específica 3: Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.

Competência específica 4: Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas.

Competência específica 5: Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas (BNCC, 2018, p. 531).

Para cada uma dessas competências elencadas aqui são indicadas habilidades a serem alcançadas nessa etapa de ensino.

A habilidade define-se como uma capacidade aprendida, seja por treinamento ou experiências, para alcançar um resultado desejado ou realizar funções de um determinado trabalho. É adquirida através de um esforço para realizar atividades ou funções que envolvem ideias (habilidades cognitivas), coisas (habilidades técnicas) ou pessoas (habilidades interpessoais).

Na BNCC, as habilidades são representadas por um código alfanumérico, composta da seguinte maneira:

E M 1 3 M A T 1 0 3

nos quais:

- as letras iniciais (EM) indicam o nível escolar, no caso Ensino Médio;
- o primeiro par de números (13), indica que a habilidade descrita pode ser desenvolvida em qualquer série do Ensino Médio (conforme definição dos currículos elaborados pelas escolas);
- a segunda sequência de letras (MAT) indica o componente curricular da habilidade;

- e dentre os números finais (103) o 1º número indica a competência específica à qual se relaciona tal habilidade, e os dois últimos números indicam a sua numeração no conjunto de habilidades relativas a cada competência específica.

Todas as habilidades apresentadas na BNCC são consideradas como habilidades mínimas que um indivíduo deve ser capaz de realizar ao final da sua jornada escolar e, cabe à escola, elaborar um currículo que contemple o desenvolvimento, bem como o aprimoramento, das habilidades matemáticas.

No que se refere à Probabilidade e Estatística, os estudantes do Ensino Fundamental têm a possibilidade, desde os anos iniciais, de construir o espaço amostral de eventos equiprováveis, utilizando a árvore de possibilidades, o princípio multiplicativo ou simulações, para estimar a probabilidade de sucesso de um dos acontecimentos, bem como interpretar estatísticas divulgadas pelos meios de comunicação, para além de planejar e executar pesquisas amostrais, interpretar medidas de tendência central e comunicar os resultados obtidos por meio de relatórios, com a inclusão de representações gráficas que mais se adequem a cada situação. Para além disso, a BNCC também propõe que, nesse mesmo nível, os estudantes utilizem tecnologias, como calculadoras e folhas de cálculos, de modo a possibilitar que eles desenvolvam o pensamento computacional.

Diante de todas essas ponderações, a área de Matemática e suas Tecnologias tem a responsabilidade de aproveitar o potencial já constituído pelos estudantes durante o Ensino Fundamental para promover ações que aprimorem a literacia matemática. Isso quer dizer que novos conhecimentos específicos devem encorajar processos mais elaborados de raciocínio e de abstração, que sustentem modos de pensar que permitam aos estudantes formular e resolver problemas em contextos diversos, com mais autonomia e recursos.

Destaca-se a seguir as habilidades que se direcionam especificamente para o desenvolvimento do tema Probabilidade e Estatística:

- **EM13MAT102:** Analisar tabelas, gráficos e amostras de pesquisas estatísticas apresentadas em relatórios divulgados por diferentes meios de comunicação, identificando, quando for o caso, inadequações que possam induzir a erros de interpretação, como escalas e amostras não apropriadas;
- **EM13MAT202:** Planejar e executar pesquisa amostral sobre questões relevantes, usando dados coletados diretamente ou em diferentes fontes, e comunicar os resultados por meio de relatório contendo gráficos e interpretação das medidas de tendência central e das medidas de dispersão (amplitude e desvio padrão), utilizando ou não recursos tecnológicos;
- **EM13MAT310:** Resolver e elaborar problemas de contagem envolvendo agrupamentos ordenáveis ou não de elementos, por meio dos princípios multiplicativo e aditivo, recorrendo a estratégias diversas, como o diagrama de árvore;
- **EM13MAT311:** Identificar e descrever o espaço amostral de eventos aleatórios, realizando contagem das possibilidades, para resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo da probabilidade;

- **EM13MAT106:** Identificar situações da vida cotidiana nas quais seja necessário fazer escolhas levando-se em conta os riscos probabilísticos (usar este ou aquele método contraceptivo, optar por um tratamento médico em detrimento de outro etc.);
- **EM13MAT312:** Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de probabilidade de eventos em experimentos aleatórios sucessivos;
- **EM13MAT316:** Resolver e elaborar problemas, em diferentes contextos, que envolvem cálculo e interpretação das medidas de tendência central (média, moda, mediana) e das de dispersão (amplitude, variância e desvio padrão);
- **EM13MAT406:** Construir e interpretar tabelas e gráficos de frequências, com base em dados obtidos em pesquisas por amostras estatísticas, incluindo ou não o uso de *software* que inter-relacionem estatística, geometria e álgebra;
- **EM13MAT407:** Interpretar e comparar conjuntos de dados estatísticos por meio de diferentes diagramas e gráficos, como o histograma, o de caixa (box-plot), o de ramos e folhas, reconhecendo os mais eficientes para sua análise;
- **EM13MAT511:** Reconhecer a existência de diferentes tipos de espaços amostrais, discretos ou não, de eventos equiprováveis ou não, e investigar as implicações no cálculo de probabilidades.

(BNCC, p. 546. 2018).

Embora cada habilidade esteja associada a uma determinada competência, isso não quer dizer que ela não possa contribuir para o desenvolvimento de outras competências.

Assegurar as competências específicas e habilidades aos estudantes, pertinentes ao processo de abstração e compreensão, que sustentem modos criativos de pensar mais analíticos, sistemáticos, indutivos e dedutivos e que enriqueçam a ação de tomar decisões torna-se a principal função desse novo instrumento.

É fundamental preservar as ideias principais da BNCC relacionadas à harmonização entre os vários cenários da Matemática, com vista à elaboração de uma visão ajustada e aplicada à realidade. Contudo, inserir outros temas ausentes na base também é possível, desde que sejam respeitadas as particularidades de cada região e de cada contexto dos estudantes.

Capítulo 3

Conceitos de Estatística, Análise Combinatória e Probabilidade

Esta secção destina-se, principalmente, a apresentar os conteúdos selecionados para serem abordados neste projeto.

Os PCN (1998) preconizam que o Tratamento da Informação que envolve Estatística e Probabilidade seja visto como um conjunto de ideias e procedimentos que permitam aplicar a matemática em questões do mundo real, para que o aluno construa procedimentos para coletar, organizar, comunicar e interpretar dados, utilizando tabelas, gráficos e representações, capaz de descrever e interpretar sua realidade, usando os conhecimentos matemáticos (Borges, p.418, 2009).

Dessa forma, o tema em questão deve ser trabalhado de maneira que incite os estudantes a questionar, a construir justificações, a estabelecer relações entre a matemática e o significado das informações obtidas por intermédio dos meios de comunicação e a desenvolver o espírito de investigação.

A BNCC, por sua vez, não sugere uma sequência de unidades temáticas para esses conteúdos, uma vez que, para esse nível de escolaridade, são as escolas quem terão a responsabilidade de elaborar um currículo escolar (bem como seus itinerários formativos) que melhor se adequem às suas realidades locais, respeitando as competências específicas e habilidades presentes no documento.

Por outro lado, nos PCN⁺ esses conteúdos são sugeridos e organizados com a seguinte divisão em unidades temáticas: **Estatística, Análise Combinatória e Probabilidade**. A maneira e sequência para distribuir as unidades temáticas nas três séries do Ensino Médio deve trazer um projeto de formação para os estudantes e fica a cargo de cada instituição de ensino organizar tal sequência. Entretanto, o texto apresenta uma proposta de organização:

Ano Escolar	Conteúdo
1ª série	Descrição de dados; Representações gráficas.
2ª série	Análise de dados; Análise Combinatória.
3ª série	Probabilidade.

Essa sugestão deve respeitar o número de aulas destinadas à matemática em cada instituição escolar, e também seguir as propostas do Projeto Político Pedagógico.

Esta seleção dos conteúdos organizados em unidades temáticas, ou outra organização qualquer, representa apenas uma das primeiras decisões de âmbito pedagógico. Faz-se necessário, também, cuidar de outros aspetos didáticos, de modo a articular conteúdos com a forma de trabalho mais adequada para o desenvolvimento das competências necessárias para os estudantes.

A seguir, serão apresentados alguns conceitos básicos e propriedades relativamente às unidades sugeridas pelos PCN⁺.

3.1 Descrição de Dados

Numa pesquisa estatística se obtêm informações de todos os elementos do universo abrangido pelo estudo ou recorre-se a um subconjunto do universo que se pretende estudar.

3.1.1 População e Amostra

Uma **população** é um conjunto de unidades individuais, que podem ser acontecimentos, objetos, animais, pessoas ou resultados experimentais com uma ou mais características comuns que se pretendem estudar. A cada elemento da população chama-se indivíduo ou unidade estatística. O número de elementos da população é representado por N , caso esta seja finita.

Em alguns casos (na maioria deles), por impossibilidade ou inviabilidade económica ou devido ao tempo necessário, limita-se as observações da pesquisa apenas a uma parte da população. Esse subconjunto da população que se obtém através de métodos apropriados denomina-se **amostra** e seu tamanho (ou dimensão) é representado por n .

3.1.2 Variáveis

Uma **variável** representa uma característica comum que se observa nos elementos em estudo. Normalmente representa-se por letra maiúscula do fim do alfabeto. Por exemplo, X ou Y .

As variáveis podem ser classificadas como quantitativas ou qualitativas. A **variável quantitativa** é aquela que diz respeito a uma característica mensurável, ou seja, que se pode medir ou contar.

Para além disso, uma variável quantitativa pode classificar-se em discreta ou contínua. A variável é **discreta** quando a característica observada assume valores num conjunto finito ou enumerável. Por exemplo o número de carros em um estacionamento. Por outro lado, uma variável é **contínua** quando puder assumir valores pertencentes a um intervalo real no seu domínio de variação, isto é, teoricamente, a variável pode assumir qualquer valor intermédio entre dois quaisquer valores. Como exemplo podemos citar o tempo necessário para chegar do trabalho a casa.

A **variável qualitativa** refere-se a uma característica que não é passível de medição ou contagem e expressa-se por categorias (ou modalidades) para os seus resultados. As variáveis qualitativas classificam-se em nominais ou ordinais. Uma variável é considerada **nominal** quando não se estabelece uma relação de ordem entre os seus valores possíveis e **ordinal** no caso em que os seus valores apresentam uma ordem implícita. Como exemplo, o desempenho de participantes numa competição representa uma variável qualitativa ordinal enquanto que a cor dos olhos configura um exemplo de variável qualitativa nominal.

3.1.3 Dados Estatísticos

Quando se observa uma variável, seja quantitativa ou qualitativa, obtemos determinados resultados designados por dados estatísticos. **Dados estatísticos**, ou apenas **dados**, são os resultados das observações da variável em cada elemento que pertence ao estudo.

Relativamente à representação, habitualmente, os dados são designados por

$$x_1, x_2, \dots, x_n,$$

no qual x_i representa a resposta do indivíduo i relativamente à variável X .

3.1.4 Tabelas de Frequências

Uma distribuição de frequências é a organização dos valores x_i observados em um estudo e de suas respectivas frequências.

O número de vezes que cada valor (ou cada categoria) da variável aparece num conjunto de dados é chamado de **frequência absoluta**. Pode-se representar por f_i e corresponde ao número de vezes que se observou x_i . A soma das frequências absolutas é igual à dimensão da amostra, ou seja,

$$\sum_{i=1}^p f_i = n. \quad (3.1)$$

A **frequência relativa** de x_i é a proporção do número de observações de x_i , ou seja, o quociente que se obtém entre a divisão da frequência absoluta f_i pelo número total de dados. Pode ser representada por f_{r_i} onde

$$f_{r_i} = \frac{f_i}{n}, \quad (3.2)$$

no qual n é o número de elementos que compõem a amostra.

A soma das frequências relativas é igual a 1, ou seja,

$$\sum_{i=1}^p f_{r_i} = 1. \quad (3.3)$$

As frequências acumuladas são utilizadas no caso de os dados serem observações de uma variável quantitativa ou qualitativa ordinal, uma vez que, é necessário uma relação de ordem entre eles.

A **frequência absoluta acumulada** de cada um dos valores x_i representa-se por F_i e é a soma das frequências absolutas dos dados com valor menor ou igual a x_i :

$$F_i = \sum_{j=1}^i f_j \quad (3.4)$$

tal que $x_j \leq x_i$.

A **frequência relativa acumulada** de cada valor x_i é obtida através da soma das frequências relativas de todos os dados com valor menor ou igual a x_i . Sua representação pode ser dada por F_{r_i} , e

$$F_{r_i} = \sum_{j=1}^i f_{r_j} \quad (3.5)$$

tal que $x_j \leq x_i$.

Uma outra maneira de obter as frequências relativas acumuladas é através do quociente entre as frequências absolutas acumuladas e o total de elementos, ou seja,

$$F_{r_i} = \frac{F_i}{n}. \quad (3.6)$$

Um dos modos de organizar os dados é através da construção de tabelas de frequências, pois trazem-nos vantagens na leitura e interpretação dos mesmos. Definidos os diferentes tipos de frequência, torna-se possível a apresentação da tabela de frequências geral a seguir.

Tabela 3.1: Tabela de Frequências Geral

Variável x_i	F. absoluta f_i	F. a. acumulada F_i	F. relativa f_r	F. r. acumulada F_r
x_1	f_1	$F_1 = f_1$	f_{r_1}	$F_{r_1} = f_{r_1}$
x_2	f_2	$F_2 = f_1 + f_2$	f_{r_2}	$F_{r_2} = f_{r_1} + f_{r_2}$
x_3	f_3	$F_3 = f_1 + f_2 + f_3$	f_{r_3}	$F_{r_3} = f_{r_1} + f_{r_2} + f_{r_3}$
\dots	\dots	\dots	\dots	\dots
x_p	f_p	$F_p = f_1 + \dots + f_p$	f_{r_p}	$F_{r_p} = f_{r_1} + \dots + f_{r_p}$
Total	n		1	

A primeira coluna destina-se aos diferentes valores (ou categorias) da variável estatística e, nas colunas seguintes, as correspondentes frequências absolutas, relativas e acumuladas na amostra. Na última linha da tabela apresenta-se a soma da respetiva coluna, sempre que necessário.

Muitas vezes distribui-se os dados em classes de intervalos, seja quando os dados são observações de uma variável contínua ou quando o número de elementos é elevado. Para auxiliar essa tarefa, alguns elementos são fundamentais:

1. Rol

Organização dos dados brutos em ordem crescente ou decrescente.

2. Amplitude total (A_t) da amostra

A diferença entre o maior e o menor valor observados.

3. Número de classes (k)

Para definir o número de classes, determina-se k como o menor inteiro tal que $2^k \geq n$.

4. Limites das classes

Os extremos de cada classe, denominam-se limites. O menor valor designa-se limite inferior (L_i) e o maior valor limite superior (L_s).

5. Amplitude das classes (h)

A amplitude h , de cada intervalo, é um valor arredondado por excesso, obtido pelo quociente entre a amplitude da amostra (A_t) e o número de classes, k . Cada intervalo possui a mesma amplitude, e são fechados à esquerda e abertos à direita, ou vice-versa.

3.2 Representações Gráficas

Para além de se organizar dados em tabelas de frequências, outra maneira de os apresentar é utilizar representações gráficas tais como diagramas de barras, pictogramas, gráficos de pontos, gráficos de setores, diagramas de caule e folhas, histogramas e polígonos de frequências. Uma representação feita com clareza, simplicidade e veracidade permite chegar a conclusões a respeito da evolução da característica em estudo ou sobre como os valores apresentados se relacionam.

3.2.1 Diagrama de Barras

As frequências dos dados relativos a uma variável qualitativa ou quantitativa discreta podem ser representados graficamente através de um diagrama de barras.

O **diagrama de barras** compõe-se por retângulos ou barras, onde uma das dimensões é proporcional à frequência absoluta f_i a ser representada, sendo a outra arbitrária, porém igual para todas as barras. Essas barras são dispostas paralelamente uma às outras, de forma horizontal ou vertical e igualmente espaçadas.

Figura 3.1: Gráfico de Barras Horizontais.

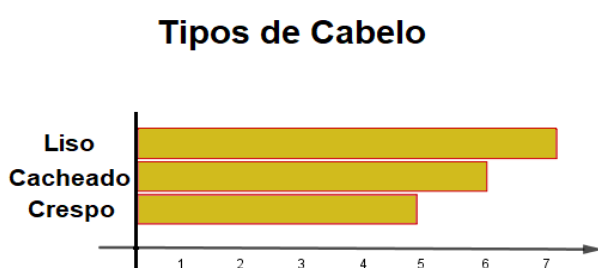


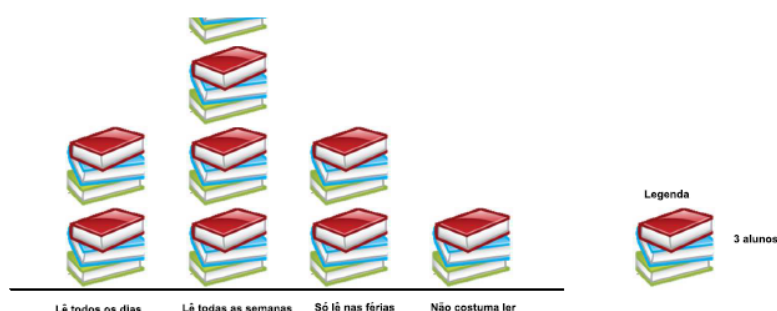
Figura 3.2: Gráfico de Barras Verticais.



3.2.2 Pictograma

O **pictograma** é uma representação gráfica em que são usadas figuras ou imagens que guardam relação com o assunto que está sendo tratado. As representações pictóricas possuem forte apelo visual, chamando prontamente a atenção e curiosidade do leitor e, por isso, são amplamente utilizadas nos mais variados veículos de comunicação. Essa representação pode ser utilizada tanto para variáveis quantitativas discretas quanto qualitativas.

Figura 3.3: Pictograma.



Fonte: Martins, 2012, p. 21.

3.2.3 Gráfico de Pontos

O gráfico de pontos apresenta uma simplicidade tanto na sua elaboração quanto na interpretação. Pode ser utilizado para os dois tipos de variáveis (qualitativas e quantitativas).

Num eixo horizontal marcam-se os valores ou categorias que a variável assume em cada grupo de dados. Por cima de cada um desses valores (ou categorias) marca-se um ponto sempre que ocorrer na amostra.

Figura 3.4: Gráfico de Pontos.

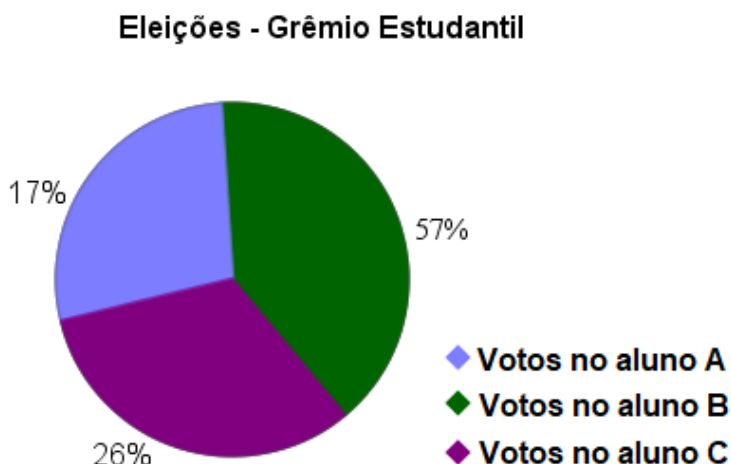


3.2.4 Gráfico de Setores

O gráfico de composição em forma de setores, destina-se à composição, usualmente em percentagem, de partes de um todo. Consiste num círculo arbitrário, que representa o con-

junto completo de dados, dividido em setores menores que representam as partes de maneira proporcional. É utilizado principalmente quando se pretende analisar cada valor da parte em relação com o total, de forma comparativa.

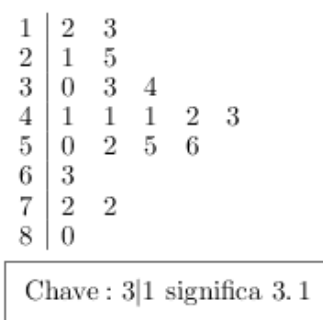
Figura 3.5: Gráfico de setores.



3.2.5 Diagrama de Caule e folhas

No caso de dados quantitativos, pode-se elaborar um diagrama de caule e folhas a partir do desenho de uma linha vertical para separar cada um dos dados em duas partes: O "caule" e a "folha". O caule é constituído pelo(s) dígito(s) dominante(s) que se colocam ao longo de um eixo vertical do lado esquerdo. Para cada dado coloca-se o dígito imediatamente a seguir ao(s) dígito(s) dominante(s), do lado direito do eixo, em frente ao respetivo caule. Esses dígitos são chamados de folhas.

Figura 3.6: Diagrama de Caule e Folhas.



Para que não haja ambiguidade na leitura dos números que os dados representam, indica-

se por meio de uma legenda a forma de os ler.

O Diagrama de Caule e Folhas é de construção simples e por isso é muito útil quando se trabalha de forma manual. Além disso tem a vantagem de facilitar a ordenação dos dados de forma imediata. Outra vantagem é a de preservar os dígitos dos dados, na maior parte das vezes, possibilitando a reconstituição da amostra.

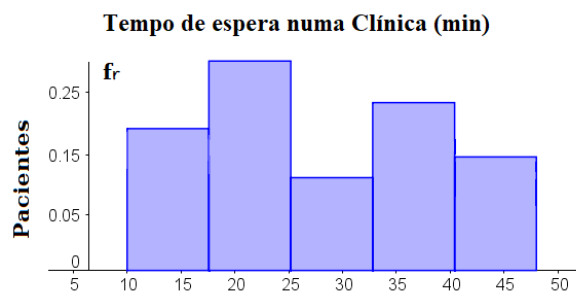
3.2.6 Histograma

O histograma é utilizado para representar frequências (absolutas ou relativas) de observações de uma variável contínua, cujos valores estão distribuídos em classes de intervalos. É um gráfico formado por retângulos contíguos, isto é, que estão em contacto (os retângulos se “encostam”). A base de cada retângulo corresponde a um segmento cujas extremidades são os limites de cada classe de intervalo, e a altura de cada retângulo é proporcional à frequência da classe correspondente.

Figura 3.7: Histograma: frequência absoluta



Figura 3.8: Histograma: frequência relativa



3.2.7 Polígono de frequências

Um polígono de frequências é construído ao ligar os pontos médios da base superior de cada retângulo do histograma. Para o polígono começar e terminar no eixo horizontal, supõe-se a existência de uma classe à esquerda da primeira (com a mesma amplitude) e outra à direita da última (também com a mesma amplitude), ambas com frequência igual a zero.

Figura 3.9: Polígono de frequências.



O polígono de frequências pode ser utilizado quando se quer representar o comportamento

de uma variável quantitativa cujos valores sofrem variações (diminuem ou aumentam) de maneira contínua, no decorrer do tempo.

3.3 Medidas de Localização e Dispersão

As medidas de localização são medidas que resumem a informação da amostra relativamente ao seu posicionamento. Entre elas as **medidas de tendência central** são valores de referência em torno dos quais os demais dados tendem a se concentrar. São elas: **a média, a mediana e a moda**. Vale salientar que a média e a mediana são medidas relativas a uma variável quantitativa, enquanto que, a moda, pode ser determinada tanto para variáveis quantitativas quanto qualitativas.

3.3.1 Média

Entre as medidas de localização estudadas, a média é a mais utilizada.

Dados n valores x_1, x_2, \dots, x_n de uma variável quantitativa X , define-se a sua média (e indica-se por \bar{x}) como:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n x_i. \quad (3.7)$$

Em casos nos quais os dados estão agrupados em tabelas de frequências:

Tabela 3.2: Tabela de Frequências

Variável x_i	F. absoluta f_i
x_1	f_1
x_2	f_2
\dots	\dots
x_n	f_n

O cálculo da média é feito ponderando-se a média dos valores x_1, x_2, \dots, x_n pelas respectivas frequências absolutas: f_1, f_2, \dots, f_n . Assim

$$\bar{x} = \frac{x_1 \cdot f_1 + x_2 \cdot f_2 + \dots + x_n \cdot f_n}{n} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n x_i \cdot f_i. \quad (3.8)$$

3.3.2 Moda

Chama-se moda (e indica-se por M_o) o elemento de maior frequência em uma amostra. A identificação da moda é simples para ambos os tipos de variáveis pois, basta observar o elemento que apresenta maior ocorrência na distribuição. No caso de variáveis qualitativas a moda torna-se bastante útil pelo facto de não estarem definidas a média e a mediana. Caso não exista moda em uma distribuição chamamos a amostra de **amodal**, se houver apenas

uma moda a distribuição diz-se **unimodal**, se houver duas modas, **bimodal**, se houver três ou mais modas, **multimodal**.

3.3.3 Mediana

Há outra medida de localização muito importante dentre as medidas de tendência central: a mediana, determinada para dados quantitativos (ou qualitativos ordinais).

Devemos previamente ordenar as observações para determinar a mediana. Assim, sejam $x_{(1)}, x_{(2)}, \dots, x_{(n)}$ as observações ordenadas dos elementos x_1, x_2, \dots, x_n . Ou seja,

$$x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \dots \leq x_{(n)} \quad (3.9)$$

A mediana (representada por Me) é o valor que divide o conjunto de observações ao meio, ou seja, 50% dos elementos são menores ou iguais à mediana e os outros 50% são maiores ou iguais à mediana.

Após organizar os dados em ordem crescente (ou decrescente) pode-se calcular a mediana por meio da expressão:

$$Me = \begin{cases} x_{\left(\frac{n+1}{2}\right)}, & \text{se } n \text{ for ímpar;} \\ \frac{1}{2} \left(x_{\left(\frac{n}{2}\right)} + x_{\left(\frac{n}{2}+1\right)} \right), & \text{se } n \text{ for par.} \end{cases}$$

Portanto,

- Se n for ímpar, a mediana será o elemento central das observações ordenadas;
- Se n for par, a mediana será a média entre os dois elementos centrais.

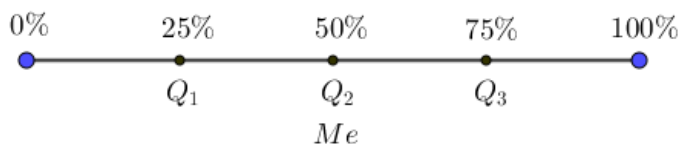
Existem outras medidas para além das medidas de tendência central que nos informam acerca da localização dos valores da variável. A exemplo, temos os **quartis**.

3.3.4 Quartil

Os quartis são medidas estatísticas úteis para a caracterização de uma amostra.

São valores que dividem os elementos (de tipo quantitativo ou qualitativo ordinal) da amostra em quatro partes, cada uma delas com percentagem aproximadamente igual de elementos, ou seja cerca de 25% das observações. Representam-se por Q_1 , Q_2 e Q_3 , sendo $Q_2 = Me$.

Figura 3.10: Quartis.



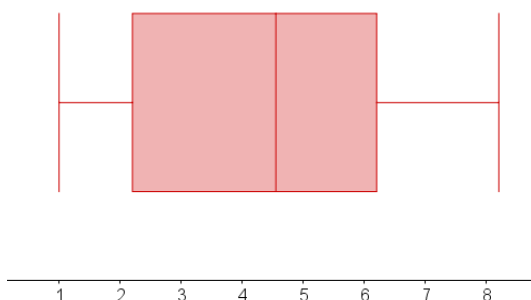
Existem vários métodos para se calcular os quartis, contudo, nem todos eles conduzem aos mesmos resultados, mas a valores aproximados, desde que a amostra tenha uma quantidade razoável de elementos.

Uma metodologia simples de obter os quartis é: ordenar os dados e calcular a mediana Me (que também é o segundo quartil, Q_2), por conseguinte, o primeiro quartil, Q_1 , é a mediana dos dados que ficam do lado esquerdo de Me (levando em consideração Me incluída nesse grupo de dados), enquanto que o terceiro quartil, Q_3 , será a mediana dos dados que ficam do lado direito de Me (a considerar, também, Me incluída nesse outro grupo de dados).

3.3.5 Diagrama de Extremos e Quartis

O **Diagrama de Extremos e Quartis** é uma representação gráfica utilizada quando se pretende representar esquematicamente um conjunto de dados numéricos. São necessários 5 valores para construir o gráfico: valor mínimo, valor máximo, Q_1 , Q_2 e Q_3 .

Figura 3.11: Diagrama de Extremos e Quartis.



O retângulo desse diagrama tem, de comprimento, $Q_3 - Q_1$, também designado por amplitude interquartil, e sua altura é um valor qualquer (sem qualquer interpretação). Dois segmentos de reta saem do meio das laterais do retângulo e unem esses lados respetivamente com o menor e o maior valor do conjunto dos dados. O traço no interior do retângulo assinala a posição da mediana.

Neste diagrama, tem-se informações sobre a forma como os dados se distribuem, principalmente sobre a concentração/dispersão destes. Quanto mais pequena for uma das áreas, por exemplo, menos dispersos são os dados.

Os diagramas de extremos e quartis podem ser representados na posição horizontal ou vertical.

Abordaremos a seguir as **Medidas de dispersão**, que são usadas para determinar o grau de variabilidade dos dados de um conjunto de valores. A utilização dessas medidas tornam a análise de uma amostra mais confiável, visto que as medidas de tendência central (média, mediana, moda) muitas vezes escondem a homogeneidade (ou não) dos dados.

3.3.6 Desvio médio absoluto

Devido à média ser a medida de tendência central mais utilizada faz sentido haver uma medida de dispersão que nos dê a variabilidade dos valores em relação a ela. Contudo, ao calcular a média dos desvios relativos à média verifica-se que esta é nula uma vez que

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \bar{x} = \bar{x} - \frac{1}{n} n\bar{x} = 0$$

Para resolver esta situação define-se o **desvio médio absoluto**, no qual se considera os valores absolutos dos desvios. Desse modo impede-se que a soma dos desvios resulte em zero e, assim, obtém-se a média das distâncias entre a média e as observações.

Representado por d_m , o desvio médio absoluto é definido por:

$$d_m = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |x_i - \bar{x}|. \quad (3.10)$$

3.3.7 Variância

A variância é outra medida de dispersão que representa a variabilidade dos elementos da amostra em relação à média e indica-se por s^2 . Define-se como a média entre os quadrados dos desvios dos elementos da amostra.

Desse modo,

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2. \quad (3.11)$$

Com efeito, esta definição apresentada não se refere à média na sua noção habitual, uma vez que não foi dividido por n , e sim por $n-1$. Isso decorre do facto de que, se forem calculados $n-1$ desvios, o restante fica automaticamente determinado, uma vez que a soma dos n desvios é igual a zero. Assim, como se tem apenas $n-1$ desvios independentes, divide-se por $n-1$ em vez de n .

3.3.8 Desvio Padrão

Por ser soma de quadrados, a variância é uma medida cuja unidade é diferente da dos dados. Para se obter uma medida expressa nas mesmas unidades dos dados define-se o desvio padrão, que é a raiz quadrada positiva da variância, representado por s :

$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}. \quad (3.12)$$

O desvio padrão assume apenas valores não negativos e quanto mais pequeno for, menor é a dispersão dos dados.

3.4 Análise Combinatória

A Análise combinatória configura-se como um ramo das Ciências Matemáticas que trata das técnicas de contagem, e em qualquer ramo de atuação (não só o da matemática), a contagem faz parte do quotidiano das pessoas. Tem seu alicerce no **Princípio Fundamental da Contagem - PFC** que é uma das principais técnicas para resolver problemas de contagem.

3.4.1 Princípio Fundamental da Contagem ou Princípio Multiplicativo

Se um acontecimento é composto de duas etapas sucessivas e independentes de tal maneira que o número de possibilidades na 1ª etapa é m e, para cada possibilidade da 1ª etapa, o número de possibilidades na 2ª etapa é n , então o número total de possibilidades de o acontecimento ocorrer é dado pelo produto $m \cdot n$.

Por exemplo, se lançarmos simultaneamente uma moeda e um dado, temos as seguintes possibilidades para o resultado:

$$m \cdot n = 2 \cdot 6 = 12,$$

no qual m = número de possibilidades para a moeda, e n = número de possibilidades para o dado.

3.4.2 Permutação Simples

Permutar é sinónimo de trocar. De forma intuitiva, deve-se associar a permutação à noção de trocar objetos de posição nos problemas de contagem. Então, dados n elementos distintos, chama-se permutação simples (ou simplesmente permutação) todo agrupamento ordenado (sequência) formado por esses n elementos.

Pelo princípio multiplicativo, podemos contar todas as permutações de n elementos distintos. Representa-se por P_n e sua expressão é dada por:

$$P_n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1, \quad (3.13)$$

ou seja $P_n = n!$.

3.4.3 Permutação com repetições

Considere-se n elementos, dos quais o elemento a apareça α vezes, o b apareça β vezes, ..., o k apareça κ vezes, com a, b, \dots, k distintos e $\alpha + \beta + \dots + \kappa = n$.

O número de permutações desses n elementos, que podemos indicar por $P_n^{\alpha, \beta, \dots, \kappa}$, é dado por:

$$P_n^{\alpha, \beta, \dots, \kappa} = \frac{n!}{\alpha! \beta! \dots \kappa!}. \quad (3.14)$$

3.4.4 Arranjo Simples

Arranjos de n elementos p a p são agrupamentos de p elementos que se podem formar a partir de um conjunto com n elementos, de tal modo que dois quaisquer desses agrupamentos se distinguem pela natureza ou ordem dos seus elementos.

Seja $I = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$ um conjunto formado por n elementos e p um número natural não nulo tal que $p \leq n$, o número de arranjos simples dos n elementos de I , tomados p a p , pode ser calculado pelo princípio fundamental da contagem. Sua representação normalmente é dada por $A_{n,p}$.

Assim:

$$A_{n,p} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot \dots \cdot (n-p+1). \quad (3.15)$$

Para obter uma expressão equivalente à anterior usando fatorial, basta multiplicar e dividir seu segundo membro por $(n-p)!$. Assim, temos que:

$$\begin{aligned} A_{n,p} &= n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot \dots \cdot (n-p+1) \cdot \frac{(n-p)!}{(n-p)!} \Rightarrow \\ \Rightarrow A_{n,p} &= \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot \dots \cdot (n-p+1) \cdot (n-p)!}{(n-p)!}, \end{aligned}$$

observe que o numerador resulta em $n!$, logo:

$$A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}. \quad (3.16)$$

3.4.5 Combinações Simples

Pode-se definir uma combinação simples como sendo um agrupamento dos elementos de um conjunto num subconjunto. Neste caso, a ordem dos elementos não é considerada na formação desses subconjuntos, ou seja, subconjuntos do tipo $\{a, b\}$ e $\{b, a\}$ são iguais.

Combinações simples de n elementos tomados p a p ($p \leq n$) são, então, subconjuntos com p elementos formados com os n elementos dados. Normalmente, indica-se por $C_{n,p}$, C_p^n ou $\binom{n}{p}$ o número total de combinações dos n elementos tomados p a p .

Nas combinações a ordem dos elementos não importa (diferentemente dos arranjos), portanto é natural que haja mais arranjos do que combinações. Dessa forma, para determinar o número de arranjos de n elementos p a p que correspondem à mesma combinação de n

elementos p a p , só é necessário determinar o número de permutações dos elementos dessa combinação, que é igual a $p!$. Assim, tem-se que:

$$A_{n,p} = p! \cdot C_{n,p},$$

que resulta em:

$$C_{n,p} = \frac{A_{n,p}}{p!} = \frac{\frac{n!}{(n-p)!}}{p!} = \frac{n!}{p! \cdot (n-p)!}. \quad (3.17)$$

3.4.6 Números Binomiais

Chama-se **número binomial** o número $\binom{n}{p}$, com n e $p \in \mathbb{N}$, e $n \geq p$, tal que $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$ (n representa o numerador e p a classe do número binomial). Vale ressaltar que $\binom{n}{p} = C_{n,p}$.

Note-se que $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$, e estes números são chamados **binomiais complementares**.

3.4.7 Triângulo de Pascal

Seja A um conjunto com n elementos. O número de subconjuntos de A com p elementos é dado por C_p^n . No quadro abaixo, as linhas são constituídas pelo número de subconjuntos de A com p elementos, sendo $(0 \leq p \leq n)$.

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & C_0^0 & & \\ & & & & C_0^1 & C_1^1 & \\ & & & C_0^2 & C_1^2 & C_2^2 & \\ & C_0^3 & C_1^3 & C_2^3 & C_3^3 & & \\ & & & \vdots & & & \end{array}$$

O esquema acima é chamado de **Triângulo de Pascal**, e fazendo os cálculos obtemos:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & 1 & & \\ & & & & 1 & 1 & \\ & & & 1 & 2 & 1 & \\ & 1 & 3 & 3 & 1 & & \\ & & & \vdots & & & \end{array}$$

o qual corresponde ao triângulo aritmético desenvolvido por Blaise Pascal (1623 - 1662).

Entre as propriedades do triângulo de Pascal, algumas que merecem destaque são:

- O primeiro e o último elemento é sempre igual a 1 em todas as linhas do triângulo;
- Numa linha, cada número é igual à soma do número imediatamente acima e do antecessor do número de cima, ou seja: $\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}$;
- Se o 2º elemento de uma linha for n , a linha tem $n + 1$ elementos;

- Numa mesma linha, dois números binomiais equidistantes dos extremos têm o mesmo valor, ou seja, $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$;
- A soma da n -ésima linha é 2^n , isto é, $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n$.

3.4.8 Binómio de Newton

O Binómio de Newton é o desenvolvimento da potência de um binómio $(a + b)^n$ em forma canónica de um polinómio.

Esse desenvolvimento é dado pela expressão:

$$(a + b)^n = \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} a^{n-p} b^p = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \dots + \binom{n}{n-1} a b^{n-1} + \binom{n}{n} b^n. \quad (3.18)$$

3.5 Probabilidade

Calcular incertezas (ou ter controlo sobre elas) foi um dos motivos que contribuiu para a elaboração da **teoria das probabilidades**, uma ferramenta capaz de medir a possibilidade de um experimento qualquer produzir determinado resultado. Ela surgiu a partir de discussões sobre jogos de azar no século XVII, o que levou matemáticos como Pascal (1623-1662) e Fermat (1601-1665) a refletirem e desenvolverem os princípios dessa nova teoria.

3.5.1 Experiência Aleatória

Chamam-se **experiências aleatórias** as que, repetidamente sobre as mesmas condições, geralmente conduzem a resultados distintos. Podemos citar como exemplos: a contagem de peças defeituosas numa produção diária em determinada máquina, o resultado de jogos de azar, o lançamento de uma moeda e verificar sua face (o caso mais conhecido), entre outros.

3.5.2 Espaço Amostral e Acontecimento

Designa-se por **espaço amostral** o conjunto de todos os resultados que podem ser obtidos em uma experiência aleatória. Pode ser representado por S e pode ser finito ou infinito. Chamam-se **acontecimentos** os subconjuntos que pertencem ao espaço amostral S . Consideraremos apenas o caso de S ser finito.

Uma probabilidade é uma função que associa a cada acontecimento $A \subset S$ um número real $P(A)$, que satisfaz as seguintes condições:

- (i) \forall acontecimento $A \subset S$, tem-se que $0 \leq P(A)$;
- (ii) $P(S) = 1$;

- (iii) Se A e B são dois acontecimentos mutuamente exclusivos, quer dizer, $A \cap B = \emptyset$, então $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Como consequência da definição apresentada, tem-se algumas propriedades a seguir:

Sejam A e B acontecimentos, então

1. $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$;
2. $P(A) \leq 1$;
3. $P(\emptyset) = 0$;
4. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$;
5. Se $A \subset B$, então $P(A) \leq P(B)$.

Demonstração:

A demonstração dessas propriedades dá-se a partir das condições presentes na definição.

1. $S = A \cup \bar{A}$ e $A \cap \bar{A} = \emptyset$. Então tem-se que $1 = P(S) = P(A \cup \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A})$. Então $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$;
2. Pelo item anterior temos que $P(A) = 1 - P(\bar{A})$. Como $P(\bar{A}) \geq 0$, tem-se que $P(A) \leq 1$;
3. $P(\emptyset) = 1 - P(S)$ por 1, como $P(S) = 1$, então $P(\emptyset) = 0$;
4. $A \cup B = (A \cap \bar{B}) \cup B$, por (iii) como $(A \cap \bar{B}) \cap B = \emptyset$ temos que $P(A \cup B) = P(A \cap \bar{B}) + P(B)$. Como $A = (A \cap \bar{B}) \cup (A \cap B)$, como $(A \cap \bar{B}) \cap (A \cap B) = \emptyset$ por (iii), temos que $P(A) = P(A \cap \bar{B}) + P(A \cap B)$, ou seja, $P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B)$. Assim $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$;
5. Se $A \subset B$, então $P(B) = P(A) + P(B \cap \bar{A})$. Como $P(B \cap \bar{A}) \geq 0$, tem-se que $P(A) \leq P(B)$.

Quando o espaço de resultados for finito e os acontecimentos elementares forem equiprováveis, pode-se utilizar outra definição para o cálculo de probabilidades: a definição clássica de Probabilidade.

Tal definição foi apresentada por Laplace (1749 - 1827) e diz que:

Num espaço amostral S , com um número finito n de elementos, em que todos os resultados são igualmente possíveis de serem observados numa realização de uma experiência aleatória, a probabilidade de um acontecimento A pode ser obtida por meio da divisão do número de resultados favoráveis à realização de A pelo número n de resultados possíveis (resultados que compõem o espaço de amostral S).

$$P(A) = \frac{\text{Número de resultados favoráveis a } A}{\text{Número de resultados possíveis } (n)}, \quad (3.19)$$

3.5.3 Probabilidade Condicional

O conceito de probabilidade condicional consiste na probabilidade de ocorrer um determinado acontecimento condicionado à ocorrência de outro.

Seja S um espaço amostral, finito e não vazio, e P uma probabilidade nesse espaço. Sejam A e B acontecimentos de S , com $P(B) > 0$. A probabilidade de que o acontecimento A ocorra, dado que ocorreu o acontecimento B , é calculada por:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}. \quad (3.20)$$

Dessa definição pode-se calcular a ocorrência simultânea de acontecimentos, a partir da regra do produto:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A) \text{ ou } P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B)$$

conforme a primeira ocorrência, A ou B , desde que $P(A) > 0$ ou $P(B) > 0$ respetivamente.

Para além disso, diz-se que os acontecimentos A e B são independentes se

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B). \quad (3.21)$$

De maneira intuitiva, se o acontecimento A é independente do acontecimento B e $P(B) > 0$ então, a probabilidade de A ocorrer é a mesma, independentemente de B ocorrer ou não, ou seja:

$$P(A|B) = P(A),$$

o que é equivalente a

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

3.5.4 Probabilidade Geométrica

No Ensino Médio, o conceito de probabilidade geométrica não é habitualmente abordado pelos professores, nem mesmo em manuais do aluno. O ensino de probabilidades limita-se aos casos finitos e os problemas envolvem basicamente a contagem dos casos favoráveis e dos casos possíveis.

A probabilidade geométrica é um caso particular na qual, para se resolver um problema, faz-se necessário o uso de conceitos de Geometria. Os conceitos mais utilizados são: comprimento, área e volume.

Caracteriza-se a seguir algumas situações nas quais se usa esse conceito.

3.5.4.1 Ponto aleatório numa linha

Sejam X e Y pontos de uma linha de extremos A e B , como na figura a seguir:

Figura 3.12: Probabilidade geométrica: comprimento.



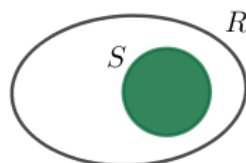
Ao seleccionar-se um ponto aleatoriamente pertencente a linha AB , a probabilidade de que ele pertença a linha XY pode ser calculada com a seguinte expressão:

$$P(XY) = \frac{\text{Medida do comprimento de } XY}{\text{Medida do comprimento de } AB} \quad (3.22)$$

3.5.4.2 Ponto aleatório numa região plana

Seja S uma região do plano contida em uma região R .

Figura 3.13: Probabilidade geométrica: área.



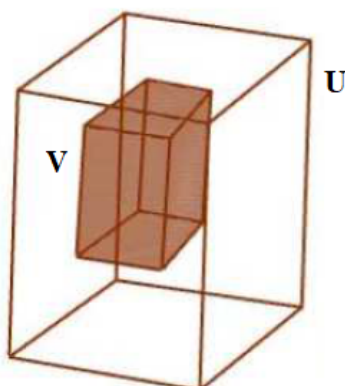
Diante disso, ao seleccionar-se aleatoriamente um ponto pertencente a R , a probabilidade de que ele pertença a S pode ser determinada por meio da expressão:

$$P(S) = \frac{\text{Medida da área de } S}{\text{Medida da área de } R} \quad (3.23)$$

3.5.4.3 Ponto aleatório num sólido

Seja V um sólido no espaço contido em outro sólido U .

Figura 3.14: Probabilidade geométrica: volume.



Portanto, selecionado ao acaso um ponto pertencente a U , a probabilidade de que ele também pertença ao sólido V é dada pela expressão:

$$P(V) = \frac{\text{Medida do volume de } V}{\text{Medida do volume de } U} \quad (3.24)$$

Capítulo 4

Tecnologias no Ensino de Matemática

Como exigência para o currículo da escola básica, desde a publicação dos Parâmetros Curriculares Nacionais (1997, 1998, 2000), os conteúdos relativos ao ensino de Estatística, Análise Combinatória e Probabilidade vêm sendo integrados nos diversos níveis do ensino básico, com ênfase no Ensino Médio, em virtude da utilização de conceitos pertinentes ao tratamento de dados no dia a dia dos indivíduos, tanto na área pessoal quanto na profissional, para alcançar tanto um nível de conhecimento funcional quanto, em alguns casos, um nível de conhecimento mais aprofundado.

Em consonância com os PCNs, a incorporação das inovações tecnológicas só tem sentido quando contribuem para o progresso da qualidade do ensino. Tal presença não é garantia de que se tenha maior qualidade. A integração das tecnologias nas escolas tem como propósito engrandecer e transformar o ambiente de educação, e assim, favorecer a produção do conhecimento por meio de uma atuação ativa, crítica e criativa, por parte dos professores e alunos.

A tecnologia surge, nesse sentido, como um instrumento de transformação da sociedade, que possibilita aos indivíduos a capacidade de intervir na construção do meio social.

Especificamente no ensino de matemática, as tecnologias usadas nos ambientes escolares colaboram para que os processos de ensino e de aprendizagem se concretizem como uma atividade experimental mais rica, que incita os alunos a desenvolverem seus processos cognitivos, com criticidade. Ao docente cabe a função de coordenar e incentivar as ações dos alunos e direcioná-los a investigarem, discutirem e explorarem situações diversas. Assim, o uso de ferramentas tecnológicas oferece, segundo os PCNs, diversos benefícios:

- Relativiza a importância do cálculo mecânico e da simples manipulação simbólica, uma vez que, por meio de instrumentos, esses cálculos podem ser realizados de modo mais rápido e eficiente;
- Evidencia para os alunos a importância do papel da linguagem gráfica e de novas formas de representação, permitindo novas estratégias de abordagem de variados problemas;
- Possibilita o desenvolvimento, nos alunos, de um crescente interesse pela realização de projetos e atividades de investigação e exploração como parte fundamental de sua aprendizagem;

- Permite que os alunos construam uma visão mais completa da verdadeira natureza da atividade matemática e desenvolvam atitudes positivas diante de seu estudo. (PCNs, 1998, p. 43-44).

Percebe-se que usar as tecnologias na educação carrega oportunidades para que os alunos se informem e se consciencializem das inúmeras possibilidades de representações, bem como para despertar o interesse e levá-los a uma participação mais atuante.

A preocupação com os impactos dessas transformações na sociedade está expressa também na BNCC. Diversos aspetos que caracterizam a computação e as tecnologias digitais são tematizadas no texto, tanto relativamente a conhecimentos e habilidades quanto a atitudes e valores. No Ensino Médio, dada a forte relação entre os jovens, sua cultura e o mundo digital, torna-se fundamental aprofundar e ampliar as aprendizagens construídas nas etapas anteriores. Afinal, os jovens estão dinamicamente inseridos nesse mundo digitalizado, não somente como consumidores, mas se empregando cada vez mais como protagonistas.

4.1 A Tecnologia da Informação e Comunicação - TIC e os conteúdos de Estatística, Análise Combinatória e Probabilidade

As Tecnologias da Informação e Comunicação – TICs são consideradas meios técnicos usados para divulgar a informação e auxiliar na comunicação, o que inclui diversos segmentos como: *hardware* de computadores, redes, aparelhos móveis, para além de *softwares*.

No final dos anos 70, numa altura em que se começava a falar da utilização da tecnologia na educação, conjecturava-se que uma das consequências de seu uso seria o desemprego dos professores, inclusive muitos docentes receavam ser substituídos pela máquina. E diante do perigo que a utilização da tecnologia no ensino representava para a aprendizagem dos alunos na altura, um ponto de maior destaque era o facto de que eles estariam apenas a apertar teclas e seguir orientações dadas pelo computador, o que contribuiria para torná-los meros repetidores de tarefas. E essa preocupação ainda está presente nos discursos da atualidade, inseridos nos mais diversos tipos de debate sobre educação (cursos, palestras, aulas, etc.), com maior intensidade entre a comunidade de educação matemática.

Talvez ainda seja possível lembrar dos discursos sobre o perigo que a utilização da informática poderia trazer para a aprendizagem dos alunos. (...) Nesse sentido, se o raciocínio matemático passa a ser realizado pelo computador, o aluno não precisará raciocinar mais e deixará de desenvolver sua inteligência (Borba & Pentead, p. 11, 2007)

A inclusão do computador no ensino parecia ser uma ferramenta que mais prejudicaria a aprendizagem dos alunos. Entretanto, nos anos mais recentes, vêm surgindo outros discursos que indicam que o uso do recurso computacional tem dado resultados positivos na aprendizagem dos alunos.

Com efeito, faz-se necessário encarar a educação e o ensino escolar de uma outra maneira, e notar que estão a passar por mudanças que carecem de uma abordagem de trabalho

inovadora. Dessa forma, a presença da TIC na escola representa um momento que permite (re)pensar uma maneira de integrar e compartilhar as experiências de cada instituição de ensino, dos profissionais, dos alunos e comunidade inseridos nesse meio, a fim de alcançarem uma educação de qualidade para todos. A inclusão da tecnologia torna-se um meio, um instrumento de colaboração no desenvolvimento do processo de aprendizagem.

Segundo Viseu e Ponte (2012) as TICs permitem a partilha e a discussão de situações em sala de aula, bem como o trabalho conjunto entre os principais agentes do processo de aprendizagem em sala de aula (professor e aluno), o que contribui para um melhor desenvolvimento do conhecimento didático e da capacidade reflexiva dos estudantes.

Para além disso, usar TIC na aula de matemática ajuda no desenvolvimento de capacidades intelectuais mais elevadas e também no desenvolvimento da melhor capacidade de resolver problemas, ampliando as possibilidades de trabalho num número muito maior de situações.

Oliveira (2018), em consonância com outros autores, aponta que as TICs potencializam as possibilidades de utilização do tempo, do espaço e também dos recursos disponíveis. Assim, o uso das tecnologias como ferramenta associada ao ensino-aprendizagem é alicerçado no facto de que a maior parte dos alunos é "nativo digital", ou seja, são indivíduos que nasceram imbuídos numa cultura digital relacionando-se com as TICs de maneira intuitiva.

As oportunidades do uso das TICs nesses conteúdos variam de acordo com diversos factores, tais como: realidade escolar, tempo de aula, quantidade de alunos por turma, conteúdo da unidade temática, recursos materiais disponíveis, habilidade do professor e dos estudantes quanto ao uso da tecnologia, etc. Portanto, é interessante pensarmos em orientações que possam motivar o trabalho.

As TICs têm o poder de tornar a aprendizagem de conteúdos como Estatística, Análise Combinatória e Probabilidade mais significativa, e o uso de ferramentas ou *softwares* podem quebrar um dos obstáculos que dificultam os processos nessas unidades temáticas, que é a distância entre a teoria e a prática.

Folhas de cálculo, bancos de dados e calculadoras são exemplos simples integrantes da lista de possibilidades de fácil acesso e manipulação. Existem também *softwares* como, por exemplo: "Estat", "Análise Combinatória", "Statgraphics", "TinkerPlots 2.0", entre outros que, basicamente, podem ser utilizados para o trabalho com esses conteúdos. Tais ferramentas podem ser utilizadas durante o trabalho em sala de aula em diversos contextos, uma vez que quase todas funcionam nos principais sistemas operativos, nos *smartphones* (inclusive), e também, suas licenças, na maioria dos casos, são gratuitas.

Outro exemplo de tecnologia digital, nomeadamente um dos *softwares* de acesso livre que podem ampliar o processo de ensino e aprendizagem, é o GeoGebra, escolhido para este trabalho como proposta de auxílio no ensino de unidades temáticas pertencentes à essa área da matemática.

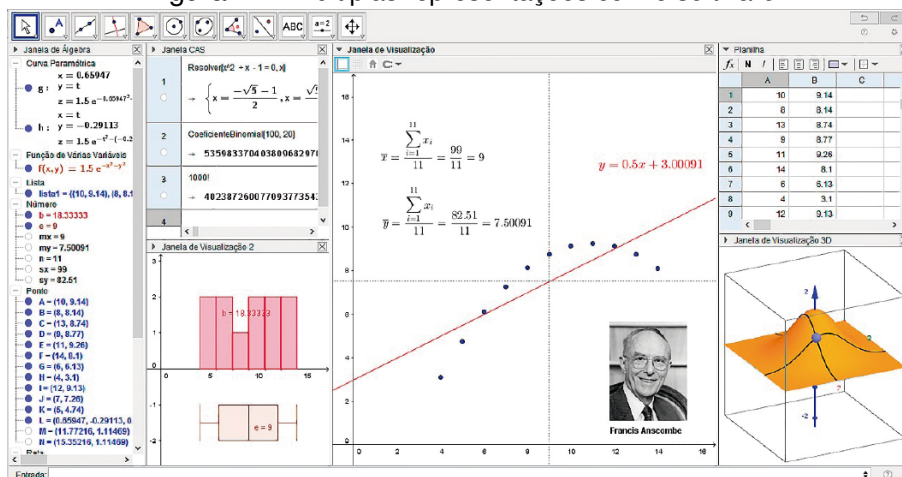
o GeoGebra tornou-se o *software* de escolha nos cursos de formação de professores. Dito de outra maneira: atualmente, ao longo de seu percurso escolar, se um licenciando em Matemática tiver contato com algum *software* educacional, muito provavelmente este *software* será o GeoGebra. Por que não usá-lo então para o

ensino e a aprendizagem de Estatística e Probabilidade? (Bortolossi, pag. 430, 2016).

Por meio do *software* vários recursos podem ser usados na elaboração de material didático de apoio para o ensino e a aprendizagem de Estatística, Análise Combinatória e Probabilidade, sejam eles estáticos ou dinâmicos. É provável que estudantes de uma licenciatura em Matemática aprendam a usar o GeoGebra nas práticas de áreas como Geometria, Álgebra e Funções. Contudo, seria interessante que esse ensino fosse ampliado para as práticas das áreas de Estatística e Probabilidade também, para assim propor aos professores (ou futuros professores) uma oportunidade de conhecer melhor o *software* e suas potencialidades como recurso didático.

Com o GeoGebra é possível instigar os alunos a desenvolverem uma sequência de raciocínio para chegar a uma determinada solução, diferentemente do que se acreditava no início da discussão sobre a inserção das tecnologias no ensino, no qual se temia que os alunos se tornassem repetidores de tarefas e não tivessem a capacidade de desenvolver o pensamento matemático. Entretanto, apesar das muitas semelhanças com o Excel, por exemplo, no Geogebra é preciso seguir uma sequência de ações para se construir um gráfico ou diagrama, como também para se chegar ao resultado final de uma determinada situação, o que acaba por contribuir na fixação e aprimoramento de conhecimentos matemáticos.

Figura 4.1: Múltiplas representações com o *software*



Fonte: Bortolossi, pag. 430, 2016.

O questionamento feito por Bortolossi (2016) traz à tona outros debates que fazem parte da comunidade de professores, a exemplo de um deles, temos o facto de que muitos não aceitam utilizar o *software* (ou outras alternativas tecnológicas) devido à sua deficiente formação inicial recebida durante a licenciatura.

No que se refere às TICs, encontram-se diversas atitudes entre os docentes.

Alguns, olham-nas com desconfiança, procurando adiar o máximo possível o momento do encontro indesejado. Outros, usam-nas na sua vida diária, mas não

sabem muito bem como as integrar na sua prática profissional. Outros, ainda, procuram usá-las nas suas aulas sem, contudo, alterar as suas práticas. Uma minoria entusiasta desbrava caminho, explorando incessantemente novos produtos e ideias, porém defronta-se com muitas dificuldades como também perplexidades (Ponte, 2000, p. 64).

Com essa diversidade de atitudes fica exposto o quão difícil é o processo de incorporação das TICs na educação. Assim sendo, a formação continuada de professores de matemática deve atentar para esse crescente avanço da tecnologia, com o intuito de reparar essa falha na formação inicial, bem como acompanhar o nível de conhecimento tecnológico dos alunos, e construir planos de aulas com maior relevância e aplicação de recursos tecnológicos para, assim, alcançar um ensino-aprendizagem mais significativo para todos.

Nessas circunstâncias as TICs fomentam novas relações entre os agentes educativos com o saber, novas maneiras de interação entre alunos e professores e também uma nova maneira de integração letiva na organização escolar e na profissão. Diante disso, as incumbências se expandem, ou seja, à docência cabe uma função educativa com maior originalidade.

Nesse sentido, os professores têm a necessidade de assumir o papel de *“co-aprendentes com os seus alunos, com os seus colegas, com outros actores educativos e com elementos da comunidade em geral”* (Ponte, 2000, p. 77).

Ao realizar uma análise do potencial das novas tecnologias para as situações atuais de ensino-aprendizagem e assim planejar com cuidado as possibilidades de uso todos podem ter benefícios. Diante de tais circunstâncias, utilizar as tecnologias da informação no processo de ensino revela-se como um caminho sem volta, pois, a não aproximação da ação humana com as novas tecnologias equivale a negar a própria evolução do conhecimento.

Portanto, ao utilizar estes novos recursos didáticos, o professor tem a possibilidade de elaborar aulas mais dinâmicas, com problemas e questões investigativas nos quais a procura por soluções matemáticas possa ser direcionada de maneira experimental, o que beneficia as práticas de investigação e intensifica a exploração do cenário apresentado, para além da formulação de conjecturas e testes, até ser alcançada uma solução plausível, um argumento final ou uma prova.

4.2 GeoGebra - *Software* de Geometria dinâmica

O GeoGebra (combinação nominal das palavras Geometria e Álgebra) é um *software* matemático, multiplataforma, que conjuga geometria, álgebra, tabelas, gráficos, estatística e cálculo em um único programa de Interface Gráfica. O GeoGebra é um *software* livre, ou seja, de domínio público e gratuito, e que está disponível em www.geogebra.org para ser descarregado e instalado. Foi criado por Markus Hohenwarter, na Universidade de Salzburg, com a intenção de ser utilizado em ambiente de sala de aula em todos os níveis educacionais.

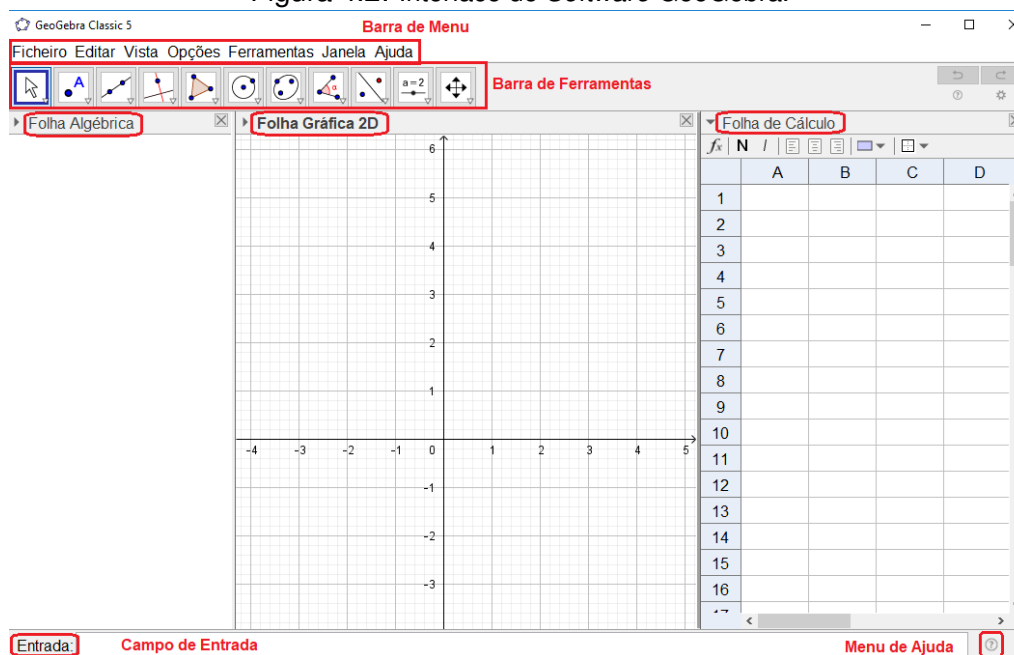
O GeoGebra oferece uma interface que facilita a criação de construções matemáticas e modelações que permitem explorações interativas, arrastando objetos e alterando parâmetros.

A interface do GeoGebra apresenta uma série de instrumentos que auxiliam o usuário

quanto ao manuseio. Tais instrumentos são a "Barra de Menus", a "Barra de Ferramentas", as "Folhas de exibição de objetos (Folha algébrica, gráfica e de cálculo)", o "Campo de Entrada" e o "Menu de Ajuda".

Quando se abre o *software*, tem-se a seguinte tela inicial:

Figura 4.2: Interface do *Software* GeoGebra.



É importante considerar, ao se trabalhar no GeoGebra, a versão que está em uso, uma vez que a atualização do mesmo acontece constante e continuamente e suas ferramentas (muitas delas) e funções têm sofrido alterações de acordo com essas atualizações.

A "Barra de Menus" apresenta os principais links de execução do *software*. Cada Folha do GeoGebra proporciona diferentes formas de exploração ou representação de conceitos matemáticos. Por exemplo, na "Folha Gráfica 2D" podem-se realizar construções geométricas usando apenas o rato e as ferramentas disponíveis na "Barra de Ferramentas".

A "Barra de Ferramentas", por sua vez, contém inúmeras ferramentas que possibilitam a construção de diferentes objetos geométricos. Cada um dos ícones representa uma caixa que contém um conjunto de ferramentas semelhantes. Ao clicar na pequena flecha posicionada no canto inferior direito do respetivo ícone é possível abrir a caixa de ferramenta pertencente àquele ícone. Cada uma dessas ferramentas pode ser utilizada na "Folha Gráfica 2D". Após inseridos nesta Folha, o GeoGebra converte automaticamente a construção realizada em forma algébrica e apresenta os resultados na "Folha Algébrica".

Essas mesmas construções elaboradas com o auxílio do rato e as ferramentas podem ser criadas por meio do uso do "Campo de Entrada". Neste é possível introduzir comandos que, após confirmados com um "enter", são exibidos na "Folha Algébrica". De acordo com o tipo de informação digitada poderá também ser representada na "Folha Gráfica 2D" (por exemplo pontos, gráficos de funções, retas).

Caso não seja do conhecimento do usuário os comandos que executem determinadas

tarefas, é possível visualizá-los ao clicar no botão "*Ajuda*", que se posiciona no canto inferior direito da tela do *software*. Esse ícone apresenta uma lista que contém todos os comandos disponíveis como também a forma de utilizar cada um deles. Para além disso, apresenta também um link para ajuda *online* sobre cada um dos comandos listados.

O GeoGebra traz ainda a "*Folha de Cálculo*", similar às folhas de cálculo das plataformas Office e BrOffice, respetivamente "Excel" e "Calc". Na "*Folha de Cálculo*" cada célula tem um nome específico que permite identificá-la diretamente e utilizá-la como incógnita nas expressões algébricas. Nas células, para além de valores numéricos, é possível inserir outros objetos matemáticos que sejam suportados pelo GeoGebra (coordenadas de pontos, expressões, funções, comandos), dos quais podem ser representados graficamente na "*Folha Gráfica 2D*". A "*Folha de Cálculo*" também permite a manipulação de dados e sua posterior análise estatística.

Quando se fala em *software* dinâmico, os gráficos, a álgebra e as tabelas são conectados dinamicamente, ou seja, cada elemento que é alterado na Folha de álgebra, por exemplo, também é alterado (automaticamente) na Folha de visualização gráfica e na de cálculo, e vice-versa.

O GeoGebra possui todas as características mencionadas anteriormente, que conectam os objetos matemáticos durante o uso no *software*, além de apresentar uma interface simples e amigável para os usuários.

Em virtude de sua interface amigável e de sua acessibilidade na web, o GeoGebra atraiu dezenas de milhares de visitantes em todo o mundo, incluindo matemáticos, professores de matemática em sala de aula e educadores matemáticos" (Bu & Schoen, 2011, p.1, tradução livre)¹.

Esse crescente número de visitantes fez com que a comunidade internacional de usuários *online* tomasse forma. E desse modo, tal comunidade está ativamente a abordar problemas tradicionais na educação matemática em busca de novas intervenções pedagógicas no ensino de matemática.

Este fato o torna um *software* com grande potencial para favorecer o processo de ensino e aprendizagem. Por possibilitar o trabalho com diferentes representações e aspectos matemáticos (algébricos, geométricos e aritméticos) simultaneamente e de forma dinâmica, ele possibilita a elaboração de tarefas exploratórias que proporcionam ao aluno pensar e fazer matemática, de modo a construir e significar ideias matemáticas com certa autonomia, rompendo com o ensino pautado na "transmissão de conhecimento" (Basniak & Estevam, 2014, p. 16-17).

Entretanto, isso requer uma alteração na percepção do professor sobre o método didático e sobre seu papel no processo de ensino e aprendizagem, uma vez que, o *software*, passa a ter a função de estruturar tarefas desafiadoras e que ofereçam condições para o comprometimento

¹By virtue of its friendly user interface and its web accessibility, GeoGebra has attracted tens of thousands of visitors across the world, including mathematicians, classroom math teachers, and mathematics educators.

do aluno na atividade, enquanto o professor passa a ser o mediador e provocador desse aluno, a fim de que as ideias sejam encorajadas e articuladas.

O *software* possui um vasto número de ferramentas e comandos muito superior aos que serão apresentados neste trabalho e, devido a essa grande variabilidade de representações e de construções, não será objetivo deste documento esgotar os seus recursos. Fica, assim, caso seja de interesse, a cargo do leitor aprofundar-se nas aplicações do *software* GeoGebra.

Capítulo 5

Propostas de tarefas para solucionar com o auxílio do GeoGebra

Com o objetivo de simplificar a resolução e a compreensão de problemas relativos a Estatística, Análise Combinatória e Probabilidade e, com isso, favorecer a aprendizagem desses conteúdos, busca-se realizar uma junção da teoria destas unidades temáticas com o *software* GeoGebra, com a intenção de sugerir a integração entre o método de resolução tradicional com o uso de tecnologias, de maneira que possibilite ao aluno uma exploração mais agradável durante o processo. Buscar-se-á uma abordagem que, partindo de uma situação-problema e com o auxílio dinâmico que o *software* possibilita, facilite o alcance dos objetivos.

A BNCC propõe que os estudantes utilizem tecnologias (calculadoras e folhas de cálculo, por exemplo) desde as séries iniciais do Ensino Fundamental. Tal valorização associada a tarefas bem estruturadas possibilita que eles possam ser instigados a desenvolverem habilidades computacionais. Esses conhecimentos podem estimular processos mais elaborados de reflexão e de abstração, que deem segurança a modos de pensar que permitam formular e resolver problemas com mais autonomia e recursos matemáticos, em diversos contextos.

Ponte (2014) discute acerca do conceito de tarefa dentre as suas variadas formas: projetos, questões, problemas, construções, aplicações e exercícios, pois através delas pode-se contextualizar intelectualmente os conteúdos para que se desenvolva o raciocínio matemático dos estudantes.

Segundo ele, podemos resumir as tarefas como ferramentas de mediação essenciais no ensino e na aprendizagem da Matemática. Assim, espera-se que o professor atue como instigador do aluno através de posicionamentos e questionamentos visíveis oferecidos no ecrã do computador. Cedido à dinâmica do *software*, também se espera que tanto o aluno quanto o professor sejam capazes de ultrapassar possíveis dificuldades relativamente à abordagem dos conteúdos em questão.

Ao se escolher a forma com a qual se vai trabalhar, deve-se reconhecer que os estudantes precisam de tempo para desenvolver os conceitos relativos aos temas selecionados e, ainda, para desenvolver a capacidade de acompanhar encadeamentos lógicos de raciocínio e comunicar-se matematicamente; por isso é essencial o contato repetido com as diferentes ideias, em diferentes contextos, ao longo

do ano e de ano para ano (PCN⁺. 2006. p. 130).

É importante salientar que, nesse método sugerido, o professor torna-se uma ponte na integração "*conceito - software*", bem como "*aluno - aprendizagem*", e para além disso sabe-se que, cada aula, turma, e escola têm suas singularidades, e cabe ao professor selecionar a maneira mais adequada para a transmissão do conhecimento. Não existe uma receita para planejar uma aula perfeita, contudo, pode-se aperfeiçoar o desempenho docente e ampliar o repertório estratégico diante do ensino através da compreensão das experiências de outros profissionais e, sobretudo, refletir acerca da própria prática.

Para que não se torne algo repetitivo, serão abordadas a seguir tarefas relativas aos conteúdos de Estatística, Análise Combinatória e Probabilidade, para serem exploradas com o auxílio do *software* GeoGebra. Contudo, qualquer tarefa pode ser solucionada com ou sem esse recurso. Busca-se com esse método minimizar o tempo despendido no processo de resolução sem o recurso tecnológico e mostrar para o aluno possibilidades de construção de uma linha de raciocínio até chegar à solução desejada.

Para as tarefas propostas será utilizada a versão 5.0 do *software* como fonte de resolução, com a intenção de visualizar e explorar, de maneira dinâmica, as situações propostas. Busca-se motivar os estudantes na procura de soluções para tarefas com características semelhantes, bem como na criação de novas conjecturas, quando possível.

Em cada tarefa serão apresentados os objetivos que se pretende alcançar, com a proposta de aliar o uso do computador à organização e análise de dados reais, conforme sugerido pelos documentos norteadores (PCNs e BNCC), a fim de desenvolver/melhorar a aprendizagem dos alunos.

Uma vez que o intuito é mostrar as várias ferramentas disponíveis no *software*, as tarefas não seguirão uma sequência didática, isto é, serão tarefas independentes umas das outras.

5.1 Tarefas de Estatística

O GeoGebra configura-se como uma ferramenta em potencial no ensino da Estatística. Com ele pode-se construir tabelas de frequência, vários tipos de gráficos, calcular quase todas as medidas estatísticas que são lecionadas no Ensino Médio, e pelo facto de ser um *software* dinâmico, pode-se alterar os dados e verificar os efeitos dessas alterações quer nos gráficos quer nas medidas estatísticas, o que permite fazer várias explorações diante dos conceitos.

5.1.1 Tarefa 01: Peso dos Cães

Um estudante do curso de Medicina Veterinária realizou um trabalho sobre nutrição animal. Para isso teve de analisar os pesos dos cães que vivem em dois canis (A e B) da cidade. Para o seu estudo, foram selecionados 30 cães de cada estabelecimento, todos considerados de porte médio e sem raça definida (SRD). Os dados levantados foram apresentados da seguinte maneira:

Figura 5.1: Canil A (Pesos dos cães).

18	3			
19	0	6	9	
20	2	3	5	
21	0			
22	7			
23	4	5		
24	0			
25	5			
26	0	5	8	9
27	5	7		
28	0	1	2	5
29				
30	5	9		
31	3			
32	0	0	5	

Chave:3|1 significa 3.1

Figura 5.2: Canil B (Pesos dos cães).

18	9			
19	0	0	6	9
20	0			
21	0			
22				
23	4	5		
24	0			
25	0			
26	0	5	9	
27	5	7		
28	0	0	1	2
29	0			
30	0	0	5	9
31	0	3	5	

Chave:3|1 significa 3.1

Cães com essas características, normalmente, possuem pesos entre 15kg e 25kg. O trabalho consiste em refletir a respeito dos cuidados oferecidos aos animais nesses estabelecimentos relativamente à alimentação dos mesmos.

Quais representações o estudante pode utilizar para apresentar as informações relativas à variável em estudo? Quais as medidas de localização e dispersão que se obtém rapidamente dos Diagramas de Caule e Folhas fornecidos? Quais medidas não são imediatas?

Essa tarefa tem como objetivos:

- Organizar os dados, resgistando-os por meio de tabelas, diagramas ou folhas de cálculo;
- Ler, analisar, interpretar e descrever diagramas e/ou gráficos;
- Identificar e compreender as medidas de localização e dispersão nos conjuntos de dados;
- Construir e interpretar um Gráfico de Pontos e um Histograma com Polígono de Frequência para cada conjunto de dados.

Inicialmente faz-se necessário a compreensão dos Diagramas de Caule e Folhas apresentados na tarefa, para que sejam extraídos os dados da amostra e assim, inserí-los na *Folha de Cálculo* e dar início ao processo de resolução. Isso requer uma abordagem cuidadosa por parte dos professores, pois é possível discutir informações relativamente ao tipo de variável que o diagrama apresenta.

Para que esses objetivos possam ser alcançados, faz-se necessário conhecer previamente os conceitos das medidas solicitadas no enunciado, bem como conhecer os tipos de diagramas e gráficos que venham a ser úteis na representação da distribuição dos dados. Ao buscar

responder às questões levantadas pela tarefa, pode-se debater a respeito dos cuidados que estão sendo tomados quanto à alimentação dos cães que vivem nos dois sítios (Como estão os cães relativamente ao peso considerado ideal? Qual a quantidade em cada situação (abaixo, dentro ou acima do intervalo mostrado)? Baseado na média dos pesos, deve-se alimentar mais ou menos os cães? entre outras questões). Outra sugestão para trabalhar na resolução da tarefa seria realizar alterações nos valores dos dados, ao final da resolução, para aplicar diferentes abordagens e explorar as mudanças que ocorrem nos diagramas/gráficos, bem como nas medidas de localização e dispersão. Como sugestão para esta tarefa, pode-se utilizar o gráfico de Pontos e um Histograma com Polígono de frequência como outra alternativa de representação da distribuição dos dados e interpretá-los.

O GeoGebra contribui, nesse caso, na agilidade da construção do diagrama selecionado para representar os dados, como também para calcular, de maneira mais rápida, todas as medidas de localização e dispersão.

5.1.2 Tarefa 02: Agência de Viagens

No último ano, uma agência de viagens coletou dados sobre a quantidade de passagens individuais que ela vende pelo seu principal produto: excursões para o Havaí. Os dados de vendas bimestrais estão listados na tabela:

Meses	Quantidade
Jan e Fev	164
Mar e Abr	145
Mai e Jun	94
Jul e Ago	55
Set e Out	67
Nov e Dez	112
Total	637

Assim, como a agência pode representar os dados graficamente usando um Gráfico de Setores para os novos clientes com a finalidade de ilustrar os meses com maior e menor procura de vagas na excursão?

Nesta tarefa, os objetivos a serem alcançados são:

- Interpretar os dados apresentados em tabela;
- Construir e interpretar um gráfico de setores;
- Compreender a relação entre diferentes áreas da matemática numa mesma situação-problema, nesse caso, Geometria e Estatística.

Na situação proposta pela tarefa, o gráfico de setores configura-se como uma alternativa coerente para representar os dados, uma vez que, através dele, pode-se ilustrar o número de vendas sem a necessidade de focar nos valores numéricos, facilitando a interpretação apenas

ao visualizar os tamanhos de cada setor. Outra exploração que pode ser realizada nessa tarefa é a análise do tipo de variável que está sendo estudada para, em seguida, refletir a respeito das medidas estatísticas que podem ser identificadas. Por meio dos tamanhos de cada setor, por exemplo, é possível instigar os alunos a discutirem sobre a identificação dessas medidas.

A elaboração desta representação permite estabelecer conexões entre os conteúdos de Estatística e os de Geometria, o que possibilita ampliar a compreensão dos indivíduos relativamente à relação existente entre diferentes segmentos da matemática no momento de resolver um determinado problema, possibilitando ao estudante o desenvolvimento do pensamento matemático.

Fazer uso do *software* permite trabalhar os conceitos dos dois temas supra citados de maneira dinâmica e simultânea, o que pode auxiliar a compreensão dos alunos, bem como contribuir para a fixação e aprimoramento desses conceitos.

5.1.3 Tarefa 03: Transporte Escolar

A Secretaria de Educação de uma determinada cidade fez um levantamento a respeito da distância entre a escola e a morada de um grupo de 70 alunos da zona rural, com a finalidade de disponibilizar o transporte escolar para todos. Os dados representam a quantidade de quilômetros que o transporte necessita percorrer entre a escola e a casa de cada um dos 70 alunos:

2.1	3.0	4.4	3.2	4.2	3.3	6.0	2.0	4.4	3.1
3.2	4.1	3.5	4.0	5.2	4.5	4.5	3.3	5.4	5.2
3.5	4.0	2.1	3.4	6.2	3.4	5.5	4.3	5.3	4.2
4.3	4.8	5.0	4.4	4.2	5.0	3.2	5.5	3.2	5.2
5.0	3.0	4.2	6.2	5.2	3.8	4.2	4.4	5.1	3.3
3.5	4.3	3.5	4.6	5.2	4.8	4.2	3.5	5.1	5.4
5.7	4.2	5.8	5.1	4.2	3.4	3.2	4.4	3.1	5.5

Com a organização dos dados os técnicos da secretaria puderam analisar e apresentar um relatório que respondia à questões pertinentes ao planejamento e articulação do transporte escolar por parte da Prefeitura. A saber: Qual a maior e a mais pequena das distâncias? Qual é a amplitude da distribuição desses dados? Quais são as distâncias mais frequentes? Quais as medidas de tendência central da amostra?

Caso os entrevistados (alunos ou pais de alunos) não tenham certeza da distância do percurso e tenham informado um valor equivocado (ao invés de "2.0" e "6.2" fossem "2.5" e "6.5" km), o que acontece à amostra e suas medidas caso haja uma correção na informação dada anteriormente? Em um caso diferente, se o dado "5.0", que aparece três vezes, fosse digitado de maneira equivocada como "3.0", quais mudanças esse erro de digitação causaria nas medidas?

Essa tarefa promove a compreensão e o cálculo das medidas de tendência central do conjunto de dados, bem como seus extremos e sua amplitude. Com esta tarefa pretende-se

explorar estes conceitos, assim como analisar como alterações realizadas nos dados podem influenciar as medidas de localização e dispersão, bem como sua representação gráfica.

Os objetivos a serem alcançados com essa tarefa são os seguintes:

- Registrar os dados da distribuição em Folhas de Cálculo;
- Compreender e determinar as medidas de tendência central e extremos de um conjunto de dados;
- Compreender as alterações nessas medidas relativamente às mudanças que ocorram nos dados;
- Construir e interpretar um histograma.

A interpretação dos dados da amostra, como das suas medidas de tendência central e amplitude, possibilita aos professores e alunos uma discussão da importância da estatística na tomada de decisões em situações concretas.

Para representar os dados pode-se construir um histograma, uma vez que o número de elementos da amostra é amplo e os dados são contínuos. O gráfico selecionado proporciona uma fácil visualização da distribuição dos mesmos.

Por conseguinte, uma vez que o GeoGebra é um *software* dinâmico, as alterações nos dados podem ser feitas em tempo real, o que possibilita a visualização das mudanças nas medidas e no diagrama de imediato, e assim facilita uma exploração mais detalhada do que está a acontecer com a amostra, possibilitando a discussão relativamente à robustez das medidas diante dessas situações.

5.1.4 Tarefa 04: Pessoas com Telemóveis

Segundo o portal do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística - IBGE, os dados abaixo dizem respeito ao número de pessoas (em milhares) que possuíam um telemóvel no ano de 2015 no país, em cada faixa etária e por género:

Grupo de idade	Homem	Mulher
10 a 14 anos	4 084	4 502
15 a 17 anos	4 234	4 379
18 ou 19 anos	2 971	2 982
20 a 24 anos	6 998	6 972
25 a 29 anos	6 677	7 034
30 a 34 anos	6 951	7 596
35 a 39 anos	6 574	7 277
40 a 44 anos	5 979	6 586
45 a 49 anos	5 414	6 047
50 a 54 anos	4 935	5 736
55 a 59 anos	3 934	4 568
60 ou mais anos	7 631	8 997
Total	66 382	72 674

Fonte: IBGE, Diretoria de Pesquisas, Coordenação de Trabalho e Rendimento, Pesquisa Nacional por Amostra de Domicílios 2015 (adaptada). Dados disponíveis em:
<<https://www.ibge.gov.br/estatisticas/sociais/justica-e-seguranca/19898-suplementos-pnad3.html?=&t=resultados>>.

Quais as medidas de localização dos dados apresentados? Qual o grupo etário de pessoas que possuem o maior (e o menor) número de telemóveis? De que forma podem ser representados graficamente os dados?

Os objetivos que podem ser alcançados ao solucionar essa tarefa são:

- Compreender a variável em estudo e selecionar uma representação gráfica adequada;
- Escolher as medidas de localização adequadas a esses dados;
- Comparar as duas distribuições.

A discussão inicial com a turma de alunos pode ser uma reflexão relativamente ao tipo de variável que a tarefa apresenta, para que não haja confusão na interpretação dos dados.

Utilizar as medidas de localização, para além da observação de diagramas e gráficos, possibilita realizar a comparação das duas amostras apresentadas na tarefa (relativamente ao género), e assim chegar a uma conclusão a respeito das questões levantadas. É válido discutir a respeito das medidas de localização adequadas a essa tarefa, uma vez que, esses dados, são observações de uma variável qualitativa ordinal.

Nessa tarefa pode-se optar por representar os dados por meio de um Gráfico de Barras para cada uma das distribuições, a fim de explorar os recursos do GeoGebra e ampliar as possibilidades de interpretação da situação.

5.1.5 Tarefa 05: Consumo de Energia elétrica

Um indivíduo deseja analisar o consumo de energia elétrica em sua residência para planejar-se, juntamente com os membros da sua família, quanto a economizar mais nos meses seguintes. A imagem abaixo mostra um recorte de sua fatura com o consumo mensal entre os meses de julho de 2016 e julho de 2017.

Histórico de Consumo			
MÊS/ANO	CONSUMO kWh	MÉDIA kWh/Dia	Dias
JUL/17	319	10,63	30
JUN/17	352	11,00	32
MAI/17	374	12,06	31
ABR/17	431	15,39	28
MAR/17	319	11,62	32
FEV/17	410	14,13	29
JAN/17	574	19,79	29
DEZ/16	317	10,56	30
NOV/16	432	13,93	31
OUT/16	385	12,41	31
SET/16	247	7,48	33
AGO/16	247	7,86	29
JUL/16	247	7,86	29

Fonte: **Histórico de consumo residencial (adaptado)**. Disponível em:
<<https://solisenergia.com.br/quanto-custa-um-sistema-fotovoltaico/>>.

O consumo médio de energia elétrica residencial, no país, foi de 157kWh ao mês no ano de 2017. Portanto, ao considerar o histórico de consumo dessa residência, a família consumiu uma quantidade adequada de eletricidade no período apresentado na fatura? Sabendo que a tarifa cobrada pelo serviço de eletricidade prestado por determinada empresa é de R\$ 0.80 kWh/h, quanto dinheiro essa família destinou para o consumo de energia elétrica nesse período? De que outra maneira pode-se organizar esses dados de modo a apresentar as informações contidas na fatura aos demais membros da família?

Uma tarefa com esse contexto possibilita o alcance dos seguintes objetivos:

- Compreender e determinar a média da amostra apresentada;
- Escolher um diagrama/gráfico para representar a distribuição.

Nessa situação, tabular os dados manualmente caracteriza-se como uma tarefa sem muita dificuldade devido a pequena quantidade de informações, contudo, realizá-la com o GeoGebra torna-se ainda mais simples uma vez que determinados comandos realizam cálculos de maneira mais rápida, como por exemplo, determinar as percentagens referente a cada consumo mensal.

Sobre o histórico de consumo apresentado também é possível discutir acerca dos outros dados mostrados, como a média de consumo diário, e o número de dias que foi realizada a leitura de consumo de energia elétrica de cada mês. O professor pode solicitar as medidas desses dados, como também debater e discutir novas questões a respeito da utilização de eletricidade dessa residência diante da informação que trata do consumo no país.

Relativamente ao custo durante aquele período, pode-se calcular de várias maneiras, podendo o aluno explorar o *software* com formas diferentes para solucionar essa questão. Por exemplo, usar a Folha de Cálculo para somar os dados do consumo e de seguida multiplicar pela taxa cobrada, ou também utilizar-se da média calculada previamente, multiplicar pela taxa cobrada e pelo número de meses apresentados no histórico, para o custo anual. Enfim, independente da forma selecionada, professor e alunos podem explorar diversos meios de chegar ao resultado final.

5.1.6 Tarefa 06: Quantidade de Calçado

A fim de mostrar ao gerente de uma cadeia de lojas a quantidade de calçado em determinado período do ano, a perita em estatística registou quantos pares de sapato havia em cada uma das lojas.

17	33	20	26	25	16	21	26
27	33	30	22	35	28	20	30
21	16	20	19	15	18	20	22
24	30	23	31	35	27	18	32

Quais as medidas de tendência central da quantidade de calçado nessa cadeia de lojas? Qual a variância e o desvio padrão desses dados? Qual a maior e a menor quantidade registada? Quantas lojas possuem menos do que 25 pares de sapatos? De que maneira poderia representar os dados?

Essa tarefa permite alcançar os seguintes resultados:

- Compreender e determinar as medidas de tendência central da amostra apresentada;
- Determinar a variância e o desvio padrão do conjunto de dados;
- Compreender e determinar os extremos e a amplitude de um conjunto de dados;
- Construir uma tabela de frequências do conjunto de dados;
- Construir e interpretar diagramas de caule e folhas.

É interessante que os alunos já tenham conhecimento da elaboração de tabelas de frequência e diagramas de caule e folhas com papel e lápis, como também já devem ter os conceitos de média, moda, mediana, variância, desvio padrão, extremos e amplitude bem aprofundados.

Ao trabalharem dados com estas características, deve-se sempre questionar qual a representação mais adequada entre as que os alunos conhecem, a fim de permitir aos estudantes a chance de desenvolverem o pensamento crítico. O diagrama de caule e folhas pode sugerir classes para organizar os dados numa tabela, caso o professor deseje ampliar a discussão para a organização dos dados em tabelas. Portanto, com o GeoGebra o aluno tem a possibilidade de criar o diagrama e realizar os cálculos de forma ágil, e também de conferir novas questões e conjecturas a respeito dos dados.

Nesta tarefa busca-se que o aluno explore estes conceitos, o que possibilita ao professor ampliar suas ações e fazer com que os estudantes compreendam como pequenas alterações nos dados influenciam ou não a média, as medidas de dispersão e também a amplitude.

De acordo com as características dos alunos da turma, o professor pode ir mais além e questionar, por exemplo, quais seriam as alterações nas medidas e na amplitude se cada uma das lojas aumentasse o seu estoque em 10 pares de sapatos.

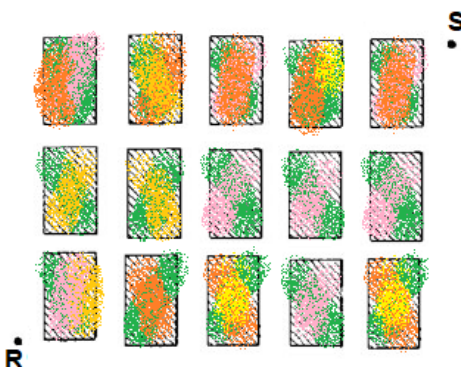
5.2 Tarefas de Análise Combinatória

As tarefas que serão sugeridas para essa área da matemática necessitam de visualização e compreensão geométrica para serem solucionadas, assim, o GeoGebra configura-se como um complemento de auxílio na resolução das mesmas, de modo que os alunos possam alcançar os objetivos de cada proposta.

Para trabalhar Análise Combinatória com ênfase em Geometria faz-se necessário ter conhecimento das propriedades, axiomas e definições de maneira clara para assim solucionar determinadas tarefas. Isso faz do *software* um grande aliado nessa ação.

5.2.1 Tarefa 07: Encontro no Parque

Um parque de uma cidade é formado por 15 blocos de jardins dispostos como na figura a seguir:



Nesse parque, um jovem sai do ponto R até o ponto S, seguindo sempre da esquerda (E) para a direita (D) e de baixo (B) para cima (C), pelo caminho mais curto, a fim de encontrar-se com a sua namorada. Diante disso, quantos caminhos diferentes ele poderá seguir?

Para essa tarefa, temos como objetivos:

- Relacionar a movimentação do personagem com a localização de pontos no plano cartesiano a fim de auxiliar a compreensão do caso;
- Aplicar o conceito de permutação para calcular o número de possibilidades de locomoção do indivíduo;

- Elaborar uma construção que possibilite aos estudantes uma visualização do acontecimento.

Diante desse contexto, o *software* traz a possibilidade de construção de um mecanismo dinâmico que auxilia a visualização dos possíveis caminhos que podem ser tomados pelo rapaz. Ao considerar as duas direções de locomoção do personagem (da esquerda para a direita, de baixo para cima), é possível determinar diversos caminhos que ele pode seguir, e após isso, determinar o número total de caminhos possíveis.

Para além disso, utilizar os conceitos de localização de pontos no Plano Cartesiano se configura como uma ferramenta de auxílio na compreensão do que está sendo solicitado pela tarefa. Para tal, cria-se inicialmente uma representação por meio de pontos no plano para as "esquinas" dos blocos de jardins, e com isso ilustrar os caminhos a serem tomados, e por fim calcular a totalidade deles. Desse modo, o processo de compreensão por parte dos alunos torna-se mais dinâmico, possibilitando um ambiente familiar para eles.

5.2.2 Tarefa 08: Logótipo de uma Empresa

Num concurso de uma empresa, os participantes deveriam criar um logótipo para a sua identidade comercial. Para isso, deveriam utilizar um círculo dividido em quatro setores circulares, e combinar cores interessantes, dentre sete que estavam à disposição dos candidatos.



Para concorrer, o projeto deve respeitar algumas condições como:

- *Uma única cor deve ser usada em cada setor;*
- *Todos os setores devem estar pintados;*
- *Setores adjacentes não podem ter a mesma cor;*
- *O círculo deve ficar pintado com duas, três ou quatro cores.*

De quantas maneiras diferentes esse círculo pode ficar pintado?

Para essa tarefa, os objetivos são:

- Identificar qual dos conceitos de contagem se aplica nesse caso;

- Utilizar o GeoGebra para visualizar algumas das possíveis soluções;
- Utilizar os conhecimentos de arranjos simples para solucionar a tarefa.

Situações como essa necessitam de uma reflexão inicial a respeito da importância da ordem dos elementos, a fim de conhecer qual dos conceitos se aplica na resolução. Nesse caso, como a ordem das cores a serem utilizadas no círculo tem importância, trata-se de um arranjo simples.

Para auxiliar a percepção dos alunos, usa-se o *software* para ilustrar alguns casos e, em seguida, aplicar as expressões necessárias ao cálculo do número total de possibilidades.

É importante discutir com os alunos sobre as condições exigidas no concurso, relativamente ao posicionamento e à quantidade de cores que podem ser utilizadas, uma vez que, diante de tais condições, usar duas, três ou quatro cores dentre as sete disponibilizadas nos darão um número de possibilidades diferente em cada caso, sendo necessário somá-los para obter o total de maneiras.

5.2.3 Tarefa 09: Diagonais de um Polígono Convexo

Seja dado um polígono convexo. Sabendo que uma diagonal de um polígono é um segmento cujas extremidades são vértices não consecutivos desse polígono, quantas diagonais existem num polígono de n lados?

Para essa tarefa os objetivos a serem alcançados são:

- Compreender geometricamente a situação para calcular o que foi solicitado;
- Compreender o conceito de combinação para chegar à equação necessária ao cálculo;
- Utilizar o GeoGebra para amparar na visualização dos polígonos e calcular o número de diagonais.

Pode-se aproveitar para relembrar as definições e conceitos sobre os polígonos convexos, regulares ou não, para que os alunos tenham mais familiaridade ao trabalhar com o *software*. Discutir a respeito de casos mais simples (por exemplo: $n = 3$, $n = 4$ ou $n = 5$) para que seja possível inferir como calcular os demais casos sem a necessidade de construir cada um dos polígonos desejados, e assim encontrar a solução para o caso de n lados.

Durante a discussão dos casos mais elementares, os alunos devem perceber que o número de segmentos cujos vértices são os vértices do polígono é dado por uma combinação dos n lados tomados de 2 a 2, ou seja,

$$C_2^n = \frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{n(n-1)(\cancel{n-2})!}{2!(\cancel{n-2})!} = \frac{n(n-1)}{2},$$

contudo, o professor deve chamar a atenção dos alunos para a situação de que os lados do polígono também estão nessa contagem, portanto deve-se retirar esse número n de lados da

equação, o que resulta em

$$d = C_2^n - n = \frac{n!}{2!(n-2)!} - n = \frac{n(n-1)}{2} - n = \frac{n(n-3)}{2},$$

e assim pode-se obter o número total de diagonais de um polígono convexo com qualquer número de lados.

5.3 Tarefas de Probabilidade

De maneira análoga às tarefas da área de Análise Combinatória, as tarefas apresentadas a seguir serão solucionadas com o auxílio do *software* como um complemento de visualização e compreensão das situações enunciadas.

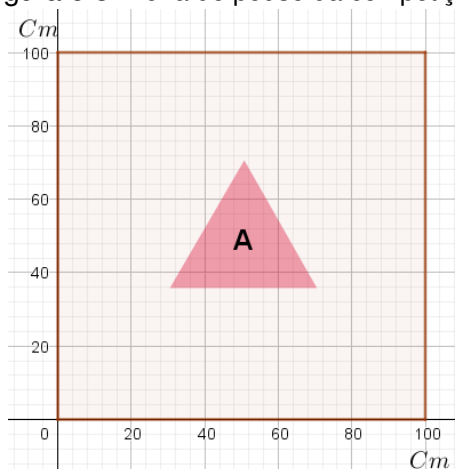
Diante disso, serão propostas tarefas que abrangem o conteúdo de Probabilidade associado com a Geometria. Essa junção pode ser muito rica pois os conceitos geométricos são férteis relativamente a fornecer ao professor situações que podem ser exploradas para discutir probabilidade.

Diante disso, complementar a exploração dessa área por meio do *software* GeoGebra facilitará a compreensão por parte dos alunos, como também auxiliará o trabalho do professor na abordagem dos conceitos.

5.3.1 Tarefa 10: Competição de paraquedismo

Numa competição de paraquedismo o objetivo é atingir, com precisão, uma área delimitada como alvo. A figura a seguir ilustra um modelo de área de pouso para essa modalidade:

Figura 5.3: Zona de pouso da competição.



Sabendo que a zona A é formada por um triângulo equilátero com 20m de lado, qual a probabilidade do competidor realizar um pouso na região adequada? E qual é a probabilidade dele pousar fora dessa zona?

Tal tarefa tem como objetivo:

- Compreender o cálculo de probabilidade por meio de abordagem geométrica;
- Revisar conceitos de Geometria Plana.

Ao solucionar a tarefa, é interessante fazer com que os alunos notem a relação existente entre as áreas das figuras planas e o valor da probabilidade a ser calculada.

Pode-se usar o *software* para selecionar aleatoriamente vários pontos na figura, a fim de simular os saltos dos competidores (que não influenciam o cálculo da probabilidade solicitada no enunciado), de modo que os estudantes possam perceber a relação existente entre as figuras e o cálculo das probabilidades pedidas. Desse modo os alunos acabam por revisar os conceitos de cálculo da área dessas figuras para, em seguida, realizar o cálculo das probabilidades solicitadas na questão.

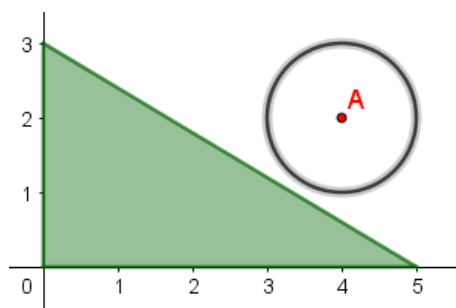
Conhecendo os valores de cada área da figura, solicita-se aos alunos calcular a probabilidade de um competidor atingir a zona que lhe garante pontos na competição por meio da expressão:

$$P(A) = \frac{\text{Área da zona } A}{\text{Área do campo de pouso}},$$

enquanto que a probabilidade de um competidor não atingir a zona ideal pode ser calculada por meio da propriedade $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$, que representa a área da zona de pouso, menos a área delimitada para garantir pontuação na competição.

5.3.2 Tarefa 11: Probabilidade no triângulo

Seja dado um triângulo retângulo de base igual a 5cm e altura igual a 3cm e também uma circunferência de centro A e raio 1, como na figura abaixo:



Caso o ponto A seja escolhido aleatoriamente dentro da área do triângulo, qual a probabilidade desse círculo tocar ou conter um dos três vértices dele?

Os objetivos dessa tarefa são:

- Rever conteúdos de geometria plana, nomeadamente conceitos sobre ângulos;

- Utilizar o *software* para auxiliar o processo de compreensão do caso;
- Calcular a probabilidade solicitada no enunciado.

Ter conhecimento dos conceitos básicos de vértices, ângulos e suas propriedades é um ponto de partida para os estudantes explorarem essa tarefa. O professor pode iniciar por discutir a respeito desse tema enquanto ilustra cada figura no GeoGebra (ou dá instruções para os alunos o fazerem).

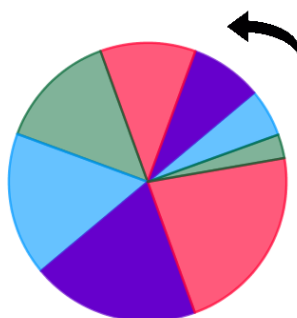
Com o dinamismo do *software* o aluno pode conferir as diversas posições do ponto A dentro do triângulo que condizem à condição do círculo tocar ou conter um dos três vértices desse triângulo, para além de verificar quais são as zonas que representam a "zona favorável" e a "zona possível" nas quais o ponto pode ser escolhido de maneira aleatória e que seja satisfatória ao enunciado da tarefa. Assim, a expressão:

$$P(A) = \frac{\text{Área da zona favorável}}{\text{Área da zona possível}},$$

determina qual o valor da probabilidade solicitada.

5.3.3 Tarefa 12: Jogo da Roleta

Na roleta de um jogo, os oito setores circulares são representados pelas cores verde, azul, roxo e vermelho, respetivamente, no sentido contrário do relógio. Os ângulos desses setores formam uma progressão aritmética com razão de 10° . Sabe-se que o menor setor da roleta tem ângulo central igual a 10° . Qual a probabilidade do ponteiro dessa Roleta, numa jogada, parar na cor Verde? E em cada uma das demais cores?



Essa tarefa proporciona aos estudantes alcançar os seguintes objetivos:

- Rever os conceitos de progressão aritmética;
- Compreender a relação entre probabilidade e geometria, nomeadamente ângulos de setores circulares;

- Utilizar o GeoGebra para construir um modelo de roleta que auxilie na compreensão do cálculo da probabilidade.

Nessa tarefa os estudantes podem relacionar a probabilidade com os conteúdos de progressão aritmética e ângulos de setores circulares, uma vez que o enunciado apresenta dados que necessitam desses conhecimentos para seguir com a busca da solução.

Inicialmente, o estudante deve ter atenção à construção dos setores da roleta para que seus tamanhos sejam respeitados, assim como a progressão aritmética existente.

Solucionar essa tarefa com o auxílio do GeoGebra despende menos tempo que o processo manual, uma vez que as ferramentas de construção de circunferências, segmentos de retas e ângulos, por exemplo, proporcionam ao estudante mais agilidade na elaboração do modelo da roleta. Isso ajudará a compreender a expressão para calcular as probabilidades, que consiste em:

$$P(\text{cor}) = \frac{\text{Área do setor}}{\text{Área da circunferência}} = \frac{(\alpha r^2)/2}{\pi r^2} = \frac{\alpha}{2\pi} \Rightarrow P(\text{cor}) = \frac{\text{Ângulo do setor}}{2\pi},$$

no qual os ângulos do setor de mesma cor devem ser somados antes do cálculo da probabilidade. Sugere-se que o professor induza os alunos a encontrarem as medidas de todos os ângulos apenas com as informações do enunciado.

Capítulo 6

Conclusão

Existem muitos componentes tecnológicos que podem ser utilizados na educação. No presente trabalho foi abordada a utilização do *software* GeoGebra como recurso alternativo para ser empregue em sala de aula, nomeadamente nas três séries do Ensino Médio no Brasil. A finalidade foi mostrar, por meio de tarefas de natureza diversificada, as potencialidades que fazem do GeoGebra uma ferramenta adequada para apoiar o trabalho do professor no ensino de Estatística, Análise Combinatória e Probabilidade.

Apresentou-se um total de doze tarefas relacionadas com os conteúdos que abrangem essa área da Matemática, com o intuito de explorar, por meio do *software*, metodologias que vão além das que são usualmente exploradas no processo manual de resolução. Através dessa ação conjunta (tarefas e GeoGebra), foi possível aproveitar o dinamismo, a visualização, e a elaboração de novas conjecturas na construção de uma proposta de trabalho com maior significação para a ação docente, bem como uma possibilidade de maior aprendizagem para os estudantes, facto esse que o torna uma ferramenta mais interessante entre outras opções disponíveis para o ensino de matemática.

Ao longo da realização deste projeto foi possível constatar que, em alguns momentos, as aplicações e uso do GeoGebra carecem de um conhecimento profundo da matemática como também do próprio *software*. Para as áreas de Análise Combinatória e Probabilidade abordaram-se situações que envolviam conceitos de geometria, a fim de agregar maior significado quanto ao uso do *software* como recurso didático. O número de trabalhos desenvolvidos com recurso ao GeoGebra relativamente a essas áreas não é muito grande, o que dificultou a elaboração de um maior número de tarefas para esses temas. Assim, pode-se concluir o quanto o papel do professor como mediador de conhecimento é de fundamental importância na escolha e na utilização do recurso computacional no processo de ensino e aprendizagem.

A utilização de recursos tecnológicos nesse processo configura-se, assim, como uma alternativa a mais para o trabalho do professor e para a aprendizagem dos alunos, pois possibilita o incentivo à curiosidade, a melhoria da confiança e o gosto pela matemática, e com isso cria um ambiente de trabalho onde os alunos possam ser encorajados a elaborar, confrontar e testar conjecturas.

Os materiais disponíveis para o ensino de conteúdos pertencentes a essa área da matemática que recorram à utilização do GeoGebra é escassa, situação essa que se confirmou

durante o processo de recolha e análise de materiais para compor os referenciais teóricos deste projeto. Diante disso, este presente trabalho pode vir a ser um contributo para a ação dos profissionais da educação, em especial no ensino desta área da matemática, visto que ilustra-se nele uma operacionalização dos recursos do *software* acompanhados de orientações para implementar a solução de tarefas.

As soluções das tarefas apresentadas em apêndice não representam a única maneira de serem desenvolvidas. Qualquer indivíduo que apresente habilidades tecnológicas suficientes para utilizar o *software* e que não utilize este trabalho como fonte de estudo poderá realizar uma sequência de passos que melhor auxiliem a obter uma resolução. Sendo assim, espera-se que a presente pesquisa possa, de facto, contribuir para o enriquecimento do ensino de Estatística, Análise Combinatória e Probabilidade no Ensino Médio no Brasil.

Uma sugestão para estudos posteriores seria a realização de uma experiência de ensino com essas propostas apresentadas nesse projeto, com a finalidade de compreender de que maneira a utilização das mesmas pode melhorar a prática docente e a aprendizagem dos alunos.

Referências Bibliográficas

- [1] _____. (2017). **Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional. Lei no 9394. 1996, atualizada em 2017.** Brasília: Ministério da educação (MEC). 2017. Disponível em: <http://www2.senado.leg.br/bdsf/bitstream/handle/id/529732/lei_de_diretrizes_e_bases_1ed.pdf>. Acesso em: 20 out de 2018.
- [2] ALBUQUERQUE, C. S.; CORDEIRO, N. J. N.; SILVA, M. N. (2013). **A Estatística nos documentos oficiais, no ENEM e nos livros didáticos do Ensino Médio.** Essentia. Sobral. vol. 15. no 1. p. 123-141.
- [3] ARAÚJO, E. A. (2017). **Probabilidade Geométrica no Ensino Médio: Uma experiência usando o GeoGebra.** Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática). Campina Grande - PB.
- [4] BASNIAK, M. I.; ESTEVAM, E. J. G. (2014). **O GeoGebra e a Matemática da Educação Básica: frações, estatística, círculo e circunferência.** 1ª ed. Curitiba: Ithala.
- [5] BORBA, M. C.; PENTEADO, M. G. (2007). **Informática e Educação Matemática.** 3 ed. 2. reimp. - Belo Horizonte - MG: Autêntica.
- [6] BORGES, A. P. (2009). **Análise da abordagem do Tratamento da Informação em livros didáticos de Matemática.** Anuário da Produção de Iniciação Científica Discente. Vol. XII. Nº. 14, p. 413-424.
- [7] BORTOLOSSI, J. H. (2016). **O uso do software gratuito Geogebra no ensino e na aprendizagem de estatística e probabilidade.** Revista VIDYA, v. 36, n. 2, p. 429-440, jul/dez - Santa Maria.
- [8] BU, L.; SCHOEN, R. (eds.) (2011). **GeoGebra for Model-Centered learning in Mathematics Education.** in: Model-Centered Learning: pathways to Mathematical Understanding Using geogebra. Sense Publishers, pp. 1-6.
- [9] IBGE - Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística. **Número médio aluno por turma no ensino fundamental, na rede pública e privada.** Rio de Janeiro. Disponível em: <<https://seriesestatisticas.ibge.gov.br/series.aspx?no=9&op=2&vcodigo=SEE01&t=numero-medio-aluno-turma-ensino-fundamental>>. Acesso em 20 fev de 2019.
- [10] MARTINS, M. A. (2012). **Estatística no Ensino Básico e Secundário.** Dissertação (Mestrado em Educação e Tecnologia em Matemática). Leiria - PT.

- [11] OLIVEIRA, F. J. S. (2018). **Abordagens Pedagógicas no Tratamento da Informação**. Revista Brasileira de Educação Básica. vol. 3. nº 8.
- [12] OLIVEIRA, P. I. F. (2006). **A Estatística e a Probabilidade nos livros didáticos de Matemática do Ensino Médio**. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática). Porto Alegre - RS.
- [13] PAIVA, M. R. (2010). **Matemática Moderna. vol. 2**. Moderna: 2a ed. São Paulo - SP.
- [14] PONTE, J. P. (2000). **Tecnologias de informação e comunicação na formação de professores: que desafios?** Revista Ibero Americana de Educação, n. 24, p. 63-90. Disponível em: <<http://www.rieoei.org/rie24a03.htm>>. Acesso em: 26 out de 2018.
- [15] PONTE, J. P. (2014). **Tarefas no ensino e na aprendizagem da Matemática**. coleção: Encontros de Educação. Instituto de educação da Universidade de Lisboa: 1ª ed. Lisboa.
- [16] Secretaria da Educação. (1998). **Parâmetros Curriculares Nacionais: terceiro e quarto ciclos do Ensino Fundamental - Matemática**. Brasília: Ministério da educação (MEC). Disponível em: <<http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf>>. Acesso em: 15 nov de 2018.
- [17] Secretaria da educação Básica. (2006). **Orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio: PCN⁺**. Brasília: Ministério da Educação (MEC). Disponível em: <<http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf>>. Acesso em: 10 nov de 2018.
- [18] Secretaria da Educação Básica. (2006). **PCN⁺: Orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio, vol 02**. Brasília: Ministério da educação (MEC). Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/book_volume_02_internet.pdf>. Acesso em: 10 nov de 2018.
- [19] Secretaria da Educação Básica. (2018). **Base Nacional Comum Curricular: BNCC**. Brasília: Ministério da Educação (MEC). Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/wp-content/uploads/2018/12/BNCC_19dez2018_site.pdf>. Acesso em: 16 fev de 2019.
- [20] VISEU, F.; PONTE, J. P. (2012). **A Formação do Professor de Matemática, apoiada pelas TIC, no seu Estágio Pedagógico**. Bolema, Rio Claro - SP, v. 26, n. 42A, p. 329-357.

Apêndice A

Soluções para as Tarefas com o GeoGebra

Aqui serão apresentadas algumas possíveis soluções para as tarefas propostas no capítulo cinco, por meio da utilização do *software* GeoGebra. Vale lembrar que as soluções a seguir são apenas uma de diversas maneiras de solucionar cada uma das tarefas. Fica, assim, por responsabilidade do leitor em seguir o roteiro sugerido, ou criar outro, para solucioná-las.

A.1 Solução para a Tarefa 01

1. Ao analisar o Diagrama apresentado, inicia por inserir todos os dados observados durante a pesquisa na *Folha de Cálculo*;
2. De seguida, seleciona todos eles e, ao clicar com o botão direito do rato seleciona *Criar Lista*. Na *Folha Algébrica* será apresentado a lista gerada, que pode ser renomeada para *Pesos_A* da seguinte maneira: clica com o botão direito do rato sobre a lista, e no comando *renomear*, digite o nome desejado na caixa de diálogo que surge;
3. Para as medidas de localização e dispersão, limites e amplitude da distribuição, usa os comandos listados a seguir no *Campo de Entrada* e, na *Folha Algébrica*, clica sobre os resultados de cada comando com o botão direito do rato a fim de renomeá-los:
 - i Para localizar o valor central da distribuição usa *Mediana(Pesos_A)* e designa-o por **Me**;
 - ii Para saber o valor médio entre os elementos da distribuição usa *Média(Pesos_A)*, e renomeia o resultado para **média**;
 - iii Relativamente à variância dos dados, usa *VariânciaAmostra(Pesos_A)* e renomeia o resultado para **Var**;
 - iv E o desvio padrão, que pode ser obtido tanto pelo comando *DesStd(Pesos_A)* como pelo comando *sqrt(Variância(Pesos_A))*, que é o cálculo da raiz quadrada da variância. Para identificá-lo usa o nome **Dp**;

- v Com os comandos $Máximo(Pesos_A)$ e $Mínimo(Pesos_A)$ exibe-se os valores extremos da distribuição;
- vi A amplitude da amostra é obtida com o comando $A_t = Máximo(Pesos_A) - Mínimo(Pesos_A)$;
- vii Num novo arquivo, realiza os mesmos procedimentos anteriores para os dados apresentados do Canil B.

De seguida, para elaborar os Gráficos sugeridos (Pontos e Histograma com polígono de frequências), inicia por:

4. No *Campo de Entrada*, digita $GráficodePontos(Pesos_A, true, 2)$, para criar um gráfico com pontos empilhados com um fator de escala de 2cm;
5. Na *Folha Algébrica* clica com o botão direito do rato para esconder o rótulo dos pontos;
6. Segue os mesmos passos no arquivo do canil B.

Obteremos o seguinte resultado:

Figura A.1: Pesos dos cães - Canil A.

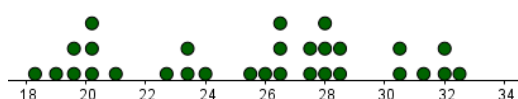
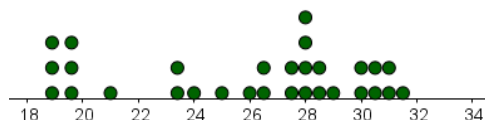


Figura A.2: Pesos dos cães - Canil B.



Por fim, para gerar o Histograma:

7. Cria, em uma coluna qualquer na *Folha de cálculo*, uma lista de valores para representar classes para a distribuição, usa os limites (Máximo e Mínimo) como referência para iniciar e terminar a lista;
8. Seleciona os dados, clica com o botão direito do rato sobre eles e escolhe *Criar Lista*. Na *Folha Algébrica*, renomeia para *Classes*.
9. Cria uma tabela de frequências com o comando $TabeladeFrequências(Classes)$.
10. De seguida, usa o comando $Histograma(Classes, Pesos_A)$ para assim gerar um Histograma.
11. E, por fim, com o comando $PolígonodeFrequências(Classes, Pesos_A, false)$ cria o polígono de frequências;
12. Realiza os mesmos procedimentos com os dados do canil B.

O resultado obtido será o seguinte:

Figura A.3: Medidas de Localização e Dispersão, Dados da Amostra e Histograma - Canil A.

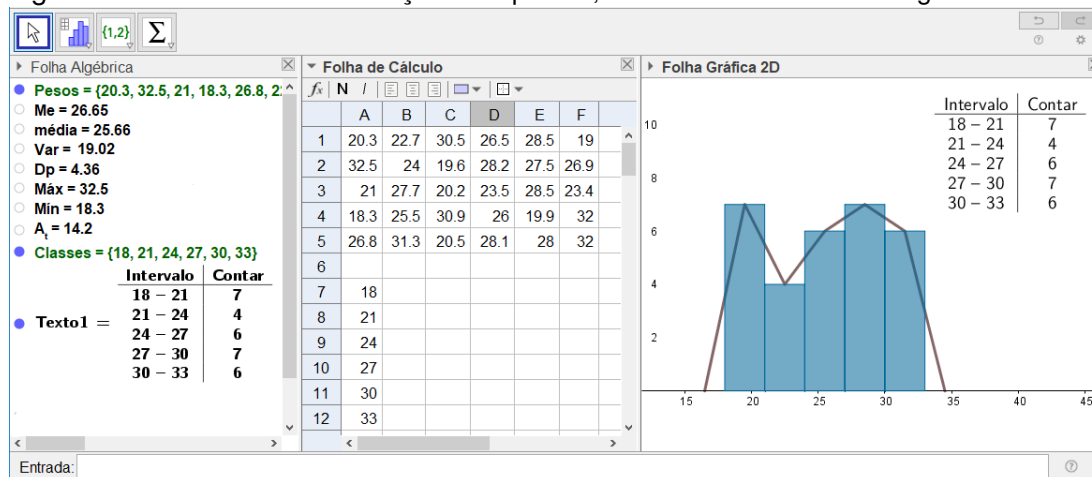
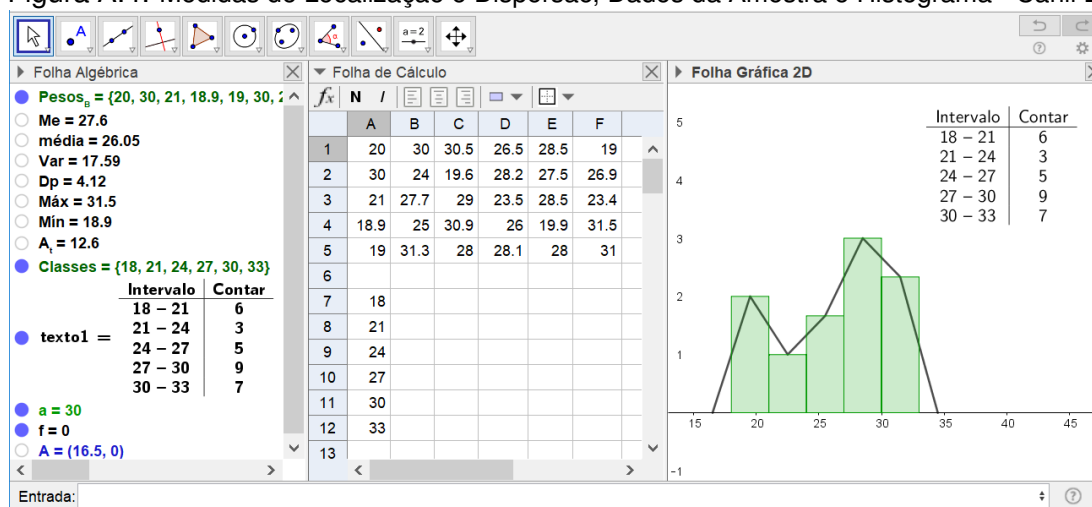


Figura A.4: Medidas de Localização e Dispersão, Dados da Amostra e Histograma - Canil B.



A.2 Solução para a Tarefa 02



1. Inicia por digitar na *Folha de Cálculo* as informações dadas no enunciado nas colunas A (meses) e B (f_i);
2. Na coluna C, calcula a frequência relativa (fr_i) de cada dado através dos seguintes passos: Na Célula C2, usa o comando " $=B2/637$ ". Ao teclar enter, obtém-se a frequência relativa referente ao primeiro dado. Clica nesse valor e arrasta para as demais células;

Para construir o gráfico, é necessário calcular a amplitude de cada um dos setores que serão utilizados, no caso, um setor para cada bimestre. Assim, usamos a *Folha de Cálculo* para agilizar o processo de resolução.


3. Na coluna D calcula os Graus correspondentes de cada setor do diagrama. Digita o

comando " $=C2 * 360^\circ$ " na célula D2 e tecla enter. Clica no resultado obtido e arrasta para as demais células a fim de obter as amplitudes dos demais setores;

4. Na coluna E calcula os valores em percentagem correspondentes de cada setor. Usa o comando " $=(D2*100)/360^\circ$ " na célula E2 e tecla enter. Arrasta o resultado para as demais células;


5. Na *Folha Algébrica 2D*, usa o ícone  e marca dois pontos A e B. Desenha uma circunferência com o ícone  de centro A, que passa por B;

6. Traça o segmento de reta AB com a ferramenta ;

7. Usa a ferramenta  para construir um ângulo com amplitude definida, clica no ponto B, de seguida no vértice, e na caixa de texto que surge, digita o ângulo desejado (usa o valor referente aos meses de novembro e dezembro, por exemplo);

8. Usa o ponto gerado ao vértice usando o ícone do segmento de reta ;

9. Repita os procedimentos 5, 6 e 7 para os demais bimestres;

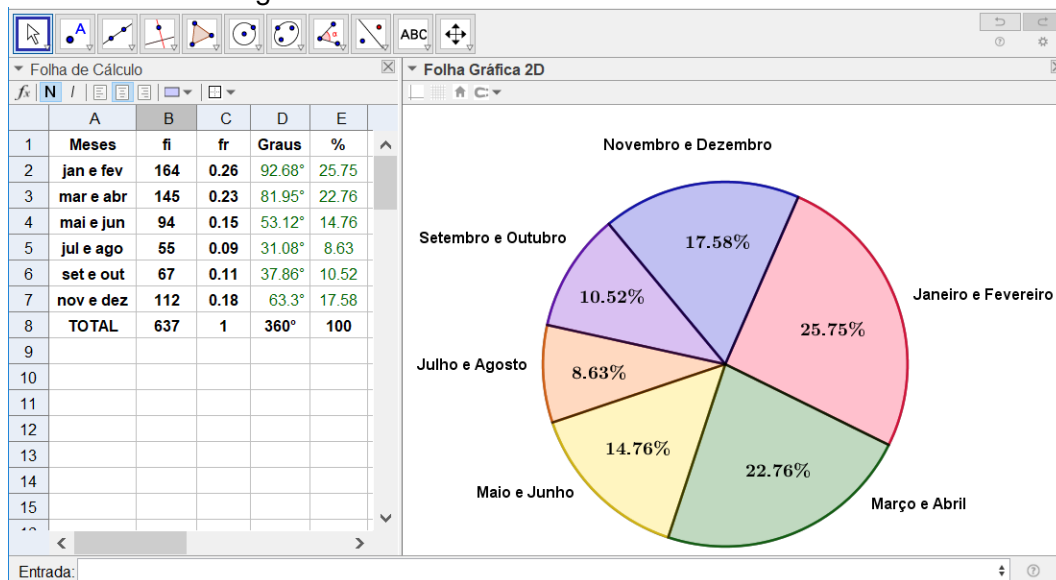
10. Usa o ícone  para inserir os textos úteis ao gráfico (Meses e percentagens). Para que os valores das percentagens mudem de acordo com as mudanças no tamanho do setor correspondente (caso seja necessário), ao inserir o texto, vincule o objeto (nomes das células em que o valor está) ao invés de apenas digitar o valor;

11. Para colorir de forma distinta cada um dos setores, usa o comando *SetorCircular*(*<Ponto Médio>*, *<Ponto>*, *<Ponto>*) e cria um objeto para cada um deles, e assim edita-os separadamente. Para selecionar a cor pretendida, coloca o cursor num setor, clica com o botão do lado direito do rato, seleciona *Propriedades dos objetos* e em seguida, *Cor*.

12. Na *Folha Gráfica 2D*, clica sobre os objetos com o botão direito do rato e seleciona a opção *mostrar rótulo* para escondê-los, de seguida, clica sobre os pontos com o botão direito do rato e seleciona a opção *mostrar objetos* para também escondê-los.

A imagem a seguir mostra o resultado.

Figura A.5: Gráfico de Setores: Vendas bimestrais.



A.3 Solução para a Tarefa 03


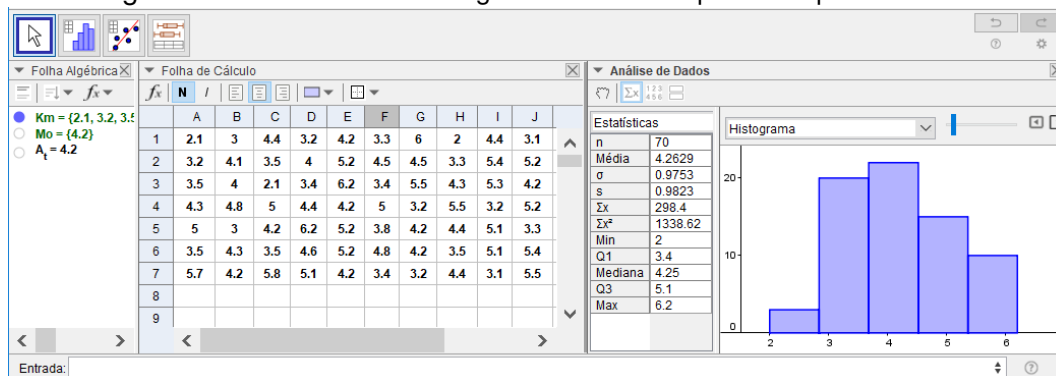
1. Inicia por introduzir todas as distâncias na *Folha de Cálculo*;
2. De seguida, seleciona todos os elementos inseridos na *Folha de Cálculo*, e com o botão direito do rato clica neles, e seleciona *Criar Lista*. A lista é apresentada na *Folha Algébrica*;
3. Clica sobre a lista com o botão direito do rato, seleciona *renomear* e escreva **Km** para melhor identificar os elementos;
4. Seleciona os dados na *Folha de Cálculo*, de seguida vai ao botão  e seleciona *Análise Univariada*, e depois clica em *Análise*;
5. Nas opções de gráficos, seleciona o *Histograma* para representar os elementos;
6. No *Campo de Entrada* usa o comando $Mo = \text{Moda}(\text{Km})$ para exibir essa medida;
7. Usa também o *Campo de Entrada* para calcular a amplitude total da amostra com o comando $A_t = \text{Máximo}(\text{Km}) - \text{Mínimo}(\text{Km})$;
8. Relativamente às questões levantadas na tarefa, no quadro *Estatísticas* estão as medidas que podem auxiliar na resolução.

Figura A.6: Estatísticas e Histograma: Distâncias para transporte escolar.



Agora, supondo que as situações relativamente aos dados serem mudados aconteçam, vejamos como essa troca de valores altera o gráfico e as estatísticas da amostra.

9. Altera as distâncias sugeridas no enunciado na *Folha de Cálculo*;

Note que, devido o dinamismo do *software*, qualquer alteração realizada nos dados inseridos na *Folha de Cálculo* implica na imediata mudança nos demais campos (*Folha Alébrica*, *Estatísticas* e *Gráfico*).

Figura A.7: Alteração: (2.0 e 6.2)→(2.5 e 6.5).

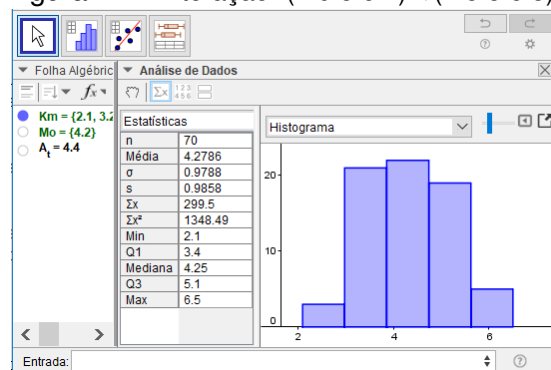
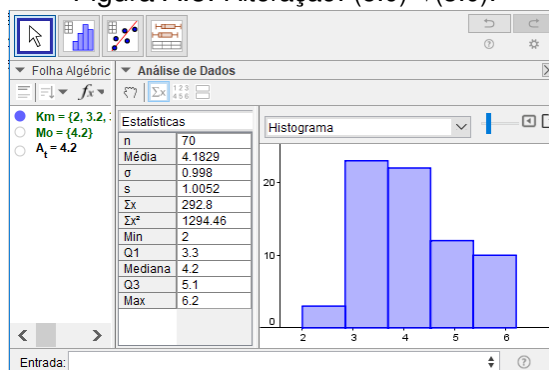


Figura A.8: Alteração: (5.0)→(3.0).



A.4 Solução para a Tarefa 04

1. Inicia por inserir os dados na *Folha de Cálculo*;
2. Seleciona os dados da coluna "Idades" e clica com o botão direito do rato para criar uma lista. Renomeia a lista na *Janela Alébrica*;
3. Realiza o passo anterior para as demais colunas (Homem e Mulher);
4. No *Campo de Entrada* digita o comando *GráficodeBarras(Idades, Homem, 0.7)* para criar um gráfico de barras para os dados masculinos (edita o gráfico como desejar);
5. Regista uma imagem do resultado obtido, para comparar com os resultados da coluna "Mulher";

6. Na *Folha de Cálculo*, calcula as frequências relativas dos dados referente a coluna "Homem" da seguinte maneira: na célula D2, digita $=(B2/66382)*100$ e tecla enter, em seguida clica no resultado e arrasta para as demais células;
 7. Repita os passos 4 e 5 para os dados da coluna "Mulher" a fim de obter o resultado semelhante ao anterior;
 8. Repita o passo 6 na célula E2, usando a expressão $=(C2/72676)*100$;
- As imagens a seguir mostram os resultados das duas análises:

Figura A.9: Gráfico de barras e dados: Homem.

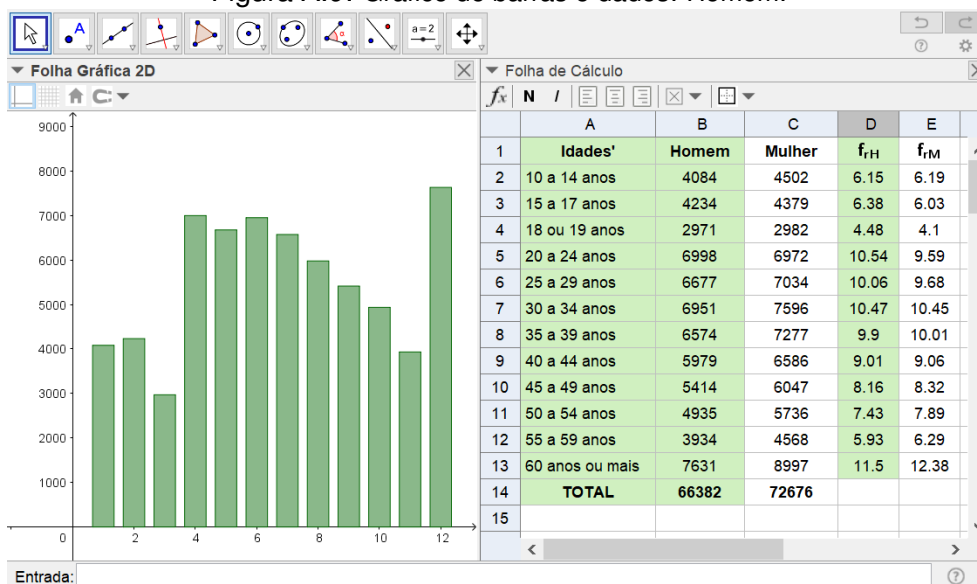
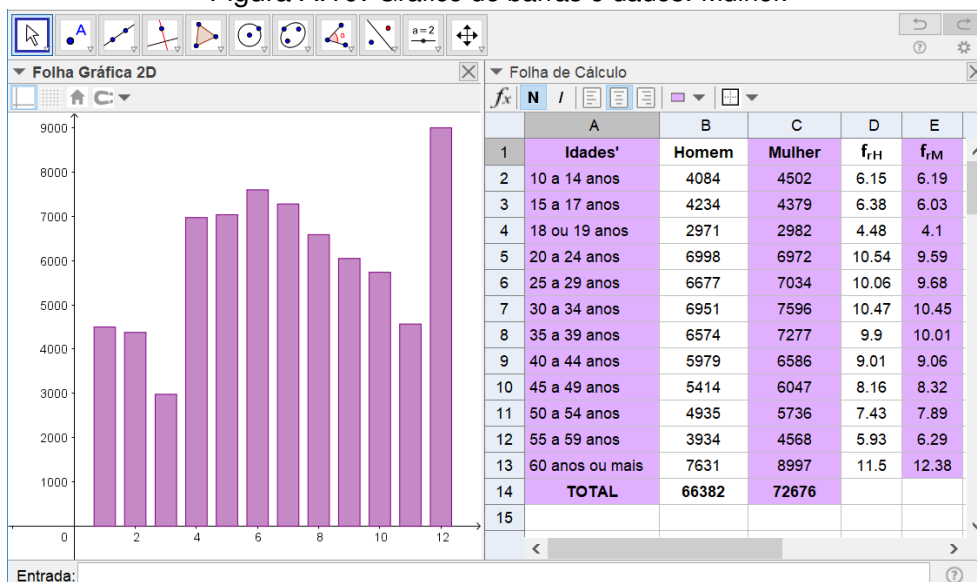


Figura A.10: Gráfico de barras e dados: Mulher.



O grupo de idades a que corresponde cada barra pode ser visualizado ao posicionar o cursor do rato sobre cada uma delas, mas, se se preferir, pode-se inserir um texto a fim de as identificar.

Devido ao facto dos dados serem categóricos não é possível realizar os cálculos das medidas no GeoGebra por meio de comandos, uma vez que o *software* necessita de dados brutos para realizá-los. Diante disso, para determinar a classe modal e mediana nas duas amostras, utiliza-se os gráficos e as frequências relativas para determiná-las.

Relativamente à classe modal, em ambas as amostras a faixa etária que apresenta maior frequência, isto é, que possui um maior número de telemóveis, é o grupo de 60 anos ou mais. Para determinar a classe mediana, basta identificar aquela em que a frequência relativa acumulada atinge os 50%, isto é:

- F_{rH} : $6.15\% + 6.38\% + 4.48\% + 10.54\% + 10.06\% + 10.47\% + 9.9\% = 57.98\%$;
- F_{rM} : $6.19\% + 6.03\% + 4.1\% + 9.59\% + 9.68\% + 10.45\% + 10.01\% = 56.05\%$.

Figura A.11: Classe mediana: Homem.


Idades'	Homem	Mulher	f_{rH}	f_{rM}
10 a 14 anos	4084	4502	6.15	6.19
15 a 17 anos	4234	4379	6.38	6.03
18 ou 19 anos	2971	2982	4.48	4.1
20 a 24 anos	6998	6972	10.54	9.59
25 a 29 anos	6677	7034	10.06	9.68
30 a 34 anos	6951	7596	10.47	10.45
35 a 39 anos	6574	7277	9.9	10.01
40 a 44 anos	5979	6586	9.01	9.06
45 a 49 anos	5414	6047	8.16	8.32
50 a 54 anos	4935	5736	7.43	7.89
55 a 59 anos	3934	4568	5.93	6.29
60 anos ou mais	7631	8997	11.5	12.38
TOTAL	66382	72676		



Figura A.12: Classe mediana: Mulher.

Idades'	Homem	Mulher	f_{rH}	f_{rM}
10 a 14 anos	4084	4502	6.15	6.19
15 a 17 anos	4234	4379	6.38	6.03
18 ou 19 anos	2971	2982	4.48	4.1
20 a 24 anos	6998	6972	10.54	9.59
25 a 29 anos	6677	7034	10.06	9.68
30 a 34 anos	6951	7596	10.47	10.45
35 a 39 anos	6574	7277	9.9	10.01
40 a 44 anos	5979	6586	9.01	9.06
45 a 49 anos	5414	6047	8.16	8.32
50 a 54 anos	4935	5736	7.43	7.89
55 a 59 anos	3934	4568	5.93	6.29
60 anos ou mais	7631	8997	11.5	12.38
TOTAL	66382	72676		

Ou seja, a classe mediana é "35 a 39 anos" em ambos os casos, pois nessa classe se atinge os 50% dos dados.

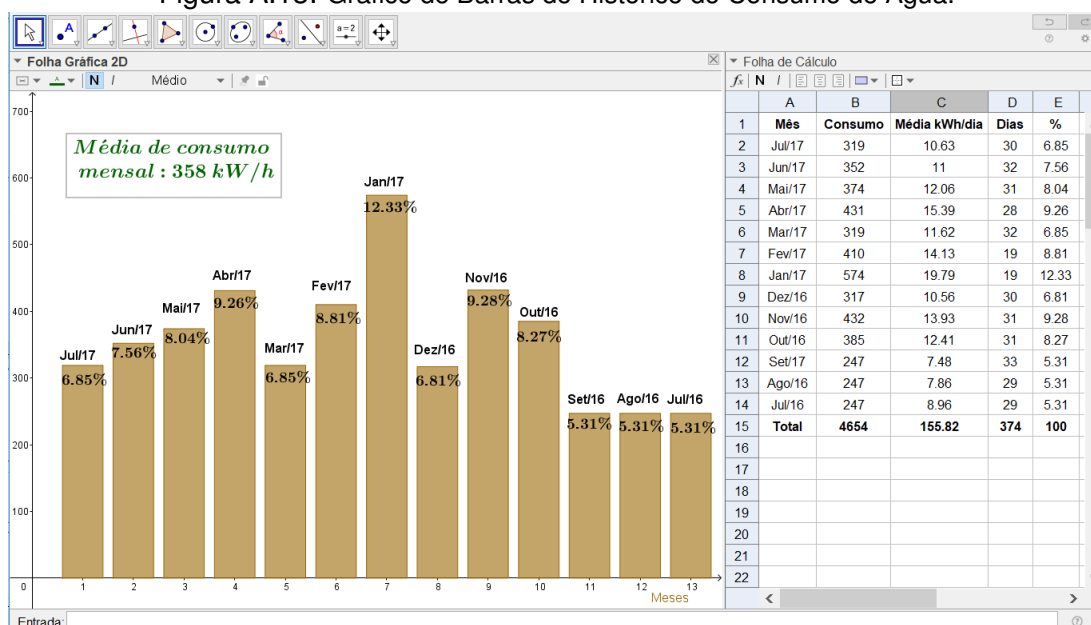
A.5 Solução para a Tarefa 05

1. Insira as informações do histórico de consumo na *Folha de Cálculo*;
2. Seleciona os valores numéricos e calcula a soma deles por meio do ícone *Soma* ;
3. Seleciona os dados referentes ao consumo, e com o botão direito do rato crie uma lista. Renomeia a lista, na *Folha Algébrica*, para "Consumo";
4. Seleciona os dados referentes aos meses, e com o botão direito do rato crie uma lista e de seguida altera o nome para "Mês" na *Folha Algébrica*;
5. Com o comando *Gráfico de Barras*(Mês, Consumo, 0.9), cria um gráfico de barras para representar os dados;

6. Usa o comando *Média(Consumo)* para calcular a média de consumo mensal referente a esse período e renomeia para *média*;
7. Na *Folha Gráfica 2D*, para inserir informações de identificação no gráfico, bem como informações sobre a média de consumo de energia, clica sobre a ferramenta *Inserir Texto* ;
8. Para a média, em qualquer sítio da *Folha Gráfica 2D* acrescenta o texto "Média de Consumo Mensal = média *kW/h*", no qual o nome média (com "m" minúsculo) corresponde ao objeto criado na *Folha Algébrica*.
9. na *Folha de Cálculo*, na célula E2, digita " $=(B2*100)/4654$ " para calcular a percentagem de cada consumo mensal em relação ao consumo total. Arrasta o expressão para as demais células;
10. Para as informações do gráfico, usa o ícone  e clica abaixo de cada barra a fim de identificar cada uma delas com os meses correspondentes, bem como as percentagens (vincula os objetos ao invés de digitar as percentagens diretamente);
11. Edita as barras do gráfico da maneira que achar interessante;

A figura a seguir mostra o resultado final da representação.

Figura A.13: Gráfico de Barras do Histórico do Consumo de Água.



Quanto ao valor em dinheiro gasto pela família, pode-se calcular a quantia do custo médio, relativamente aos meses apresentados, como também o custo anual da seguinte maneira:

12. No *Campo de Entrada*, digita o comando $Custo_m = média * 0.8$ e tecla enter, assim apresentará o resultado de quanto foi pago em dinheiro pelo consumo médio da energia;


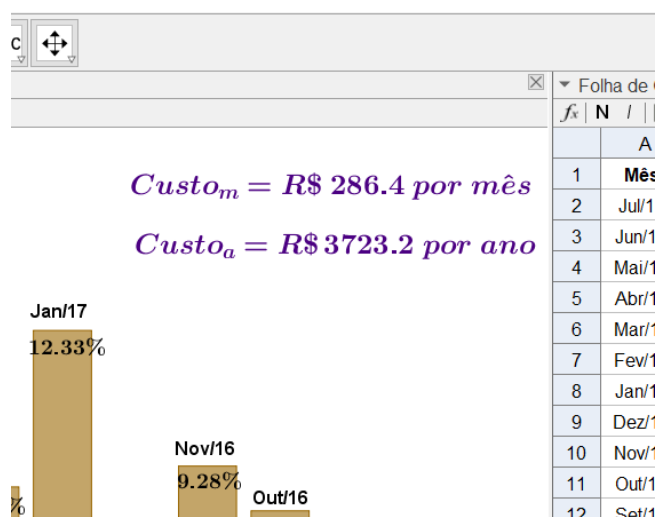
13. Também no *Campo de Entrada*, digita o comando $Custo_a = média * 0.8 * 13$ e tecla enter, para determinar o a quantia paga em dinheiro pelo consumo médio da energia durante o ano exposto no histórico;
14. Usa o ícone  para inserir a informação na *Folha Gráfica 2D*, com o seguinte texto: " $Custo_m$: R\$ $Custo_m$ por mês.", no qual a última palavra refere-se ao objeto que representa o $Custo_m$;
15. Repita o passo anterior para apresentar o custo anual.

Figura A.14: Valores de gastos mensal e anual.



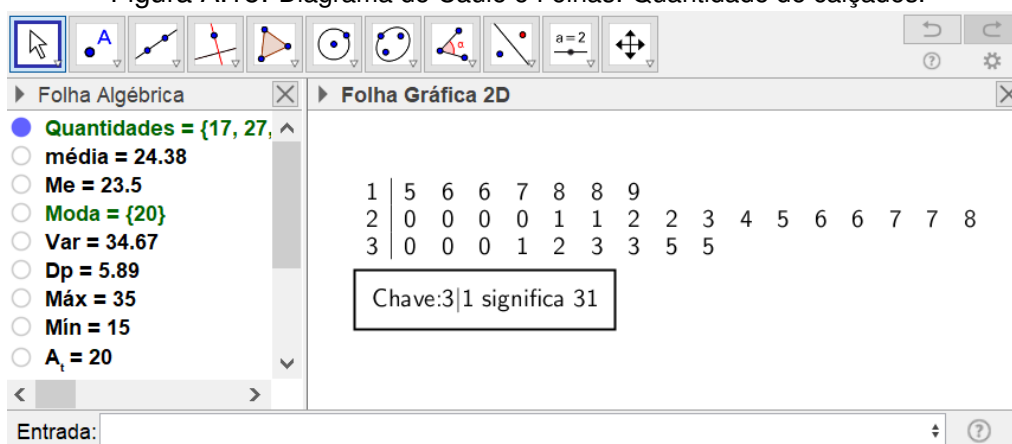
Cálculos simples como esse podem ser feitos manualmente, contudo, pode-se aproveitar a tarefa e alterar informações na *Folha de Cálculo* e visualizar as mudanças que ocorrem com os valores exibidos, por exemplo.

A.6 Solução para a Tarefa 06

1. Inicia por inserir os valores numéricos na coluna A da *Folha de Cálculo*;
2. Em seguida, seleciona os elementos da coluna e utiliza o botão do lado direito do rato para criar uma lista. A lista aparece na *Folha Algébrica* e renomeia para "Quantidades";
3. Elabora um Diagrama de Caule e Folhas por meio do comando *DiagramaCauleFolhas(Quantidades)*;
4. No *Campo de Entrada* digita o comando $Média(Quantidades)$ e tecla enter. Renomeia o resultado (na *Folha Algébrica*) para **média**;
5. Ainda no *Campo de Entrada*, usa os comandos $Mediana(Quantidades)$, $Moda(Quantidades)$, $Variância(Quantidades)$, $DesStd(Quantidades)$, $Máximo(Quantidades)$ e $Mínimo(Quantidades)$, e tecla enter após cada um deles;

6. Renomeia os resultados, na *Folha Algébrica*, para **Me**, **Moda**, **Var**, **Dp**, **Máx** e **Mín** respetivamente;
7. Para calcular a amplitude total, digita $A_t = Máx - Mín$ e tecla enter;
O resultado será:

Figura A.15: Diagrama de Caule e Folhas: Quantidade de calçados.



8. Para criar uma tabela de frequências, a fim de representar os dados de outro modo, basta digitar no *Campo de Entrada* o comando *Tabeladefrequências(Quantidades)*.

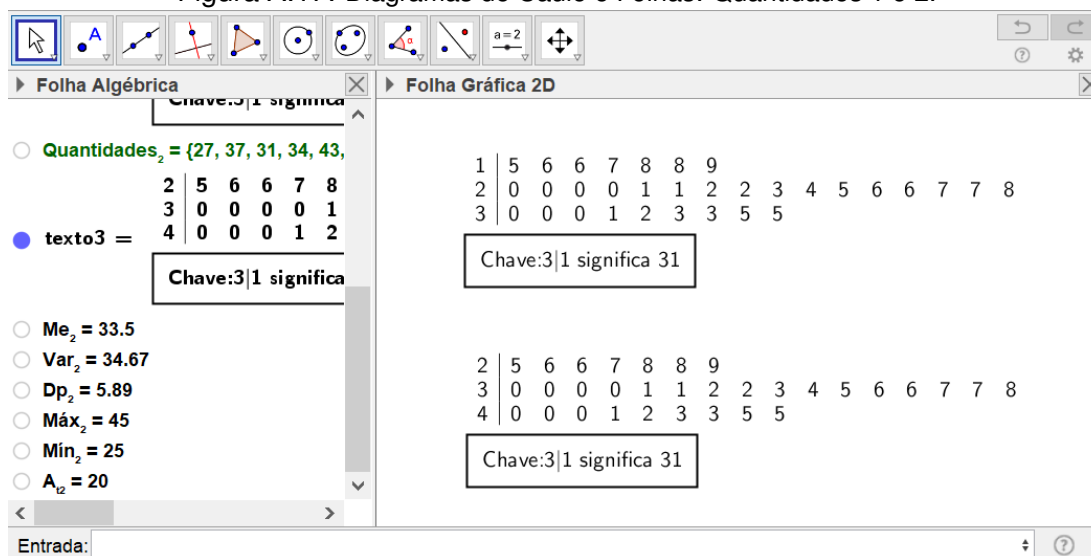
Figura A.16: Tabela de Frequências: Quantidade de calçados.

Valor	Frequência
15	1
16	2
17	1
18	2
19	1
20	4
21	2
22	2
23	1
24	1
25	1
26	2
27	2
28	1
30	3
31	1
32	1
33	2
35	2

Para ilustrar a mudança nos dados sugerida na tarefa e assim verificar as alterações que ocorrem no diagrama e nas medidas, basta realizar os seguintes passos:

8. No *Campo de Entrada* digita o comando "*Sequência(Elemento(Quantidades, i) i, 1, 32) + 10*" e tecla enter;
Esse comando criará uma nova lista de dados, baseada nos elementos da lista *Quantidades*, do primeiro (1) ao último (32), e soma a cada um deles 10 unidades.
9. Renomeia essa nova lista na *Folha Algébrica* para *Quantidades_2*;
10. No *Campo de Entrada* digita o comando *DiagramaCauleFolhas(Quantidades_2)* e tecla enter;
11. Calcula as medidas de localização e extremos seguindo os comandos do passo 5.
Pelo facto da nova lista ser gerada através de um comando específico, a **média** e a **moda** não apresentarão resultados quando solicitadas. Contudo as demais medidas serão determinadas sem qualquer problema.
12. Renomeia as novas medidas, na *Folha Algébrica*, como desejar.




Figura A.17: Diagramas de Caule e Folhas: Quantidades 1 e 2.



Seguindo esse exemplo o professor pode realizar diferentes alterações nos tipos de dados de modo a explorar juntamente com a turma de alunos as mudanças que ocorrem na amostra e em suas medidas.

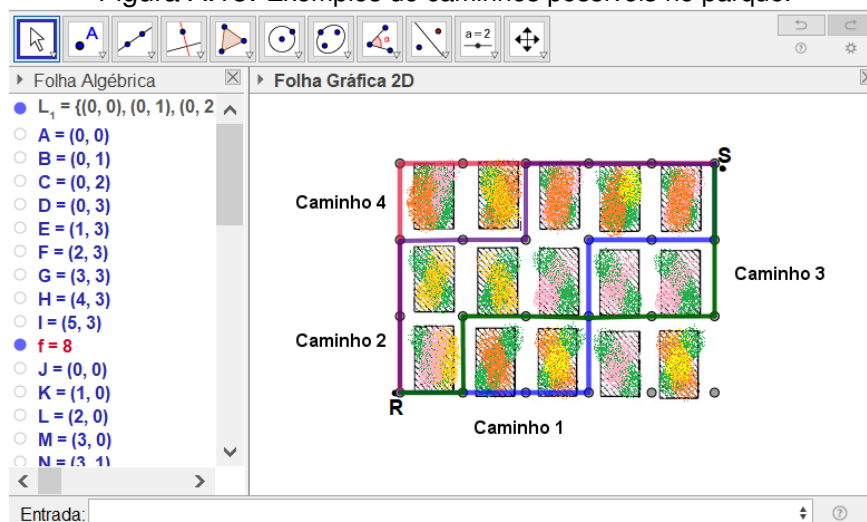
A.7 Solução para a Tarefa 07

1. No *Campo de Entrada*, digita o comando $L_1 = \{(0,0), (0,1), (0,2), (0,3), (1,0), (1,1), (1,2), (1,3), (2,0), (2,1), (2,2), (2,3), (3,0), (3,1), (3,2), (3,3), (4,0), (4,1), (4,2), (4,3), (5,0), (5,1), (5,2), (5,3)\}$ para criar uma lista de pontos que representem as esquinas dos blocos;
2. Na *Folha Algébrica*, clica sobre o círculo antes do nome da Lista para que os pontos sejam exibidos na *Folha Gráfica 2D*;

3. Oculta os eixos ordenados, basta clicar com o botão direito do rato sobre eles e selecionando a opção *eixos*;
4. Na terceira ferramenta da barra de ferramentas, procura pela ferramenta *Linha Poligonal*  para criar uma;
5. Baseado nos movimentos possíveis enunciados na tarefa, clica no ponto $(0,0)$, que representa o ponto R , e em todos os que se seguem até chegar no ponto $(5,3)$, que representa o ponto S e, por fim, volte a clicar no ponto $(0,0)$;
6. Repita o item anterior para criar outra linha poligonal (siga por outro caminho);
7. Na *Folha Algébrica* oculta os rótulos das duas linhas poligonais, bem como os objetos desnecessários à situação;
8. Ainda na *Folha Algébrica*, seleciona as linhas poligonais (uma de cada vez) e altere a cor e a espessura de ambas;
9. Caso a imagem esteja salva no computador, na barra de ferramentas, clica sobre o ícone de inserir imagem  para incluí-la na *Folha gráfica 2D*, e melhorar a interpretação dos movimentos;
10. Se a figura não estiver ajustada à construção feita, clica sobre a *Folha Gráfica 2D* para reexibir os eixos ordenados;
11. Utiliza o ícone  para ajustar os objetos (eixos, pontos e linhas poligonais) à figura e de seguida esconda novamente os eixos.

Obteremos o seguinte resultado.

Figura A.18: Exemplos de caminhos possíveis no parque.

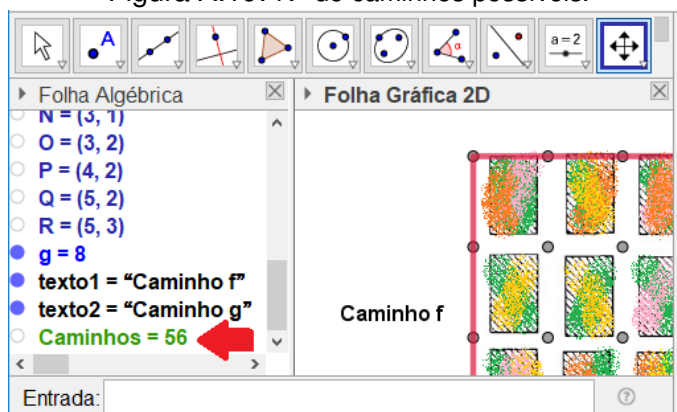


Note que, no caminho "f" ele realiza a sequência de movimentos: *CCCCDDDD* (*C* - cima e *D* - direita), enquanto que, no caminho "g" ele realiza a sequência: *DDDCDDDC*. Em ambos os casos ele realiza 8 movimentos. Note também que o problema trata-se de uma permutação com repetição, pois, se permutarmos os *C* e os *D* teremos caminhos diferentes dos já mostrados, contudo, sempre com as mesmas quantidades: 3 movimentos para *C* e 5 movimentos para *D*.

Em seguida, usamos o GeoGebra para calcular a quantidade de caminhos que são possíveis realizar pelo caminho mais curto.

12. No *Campo de Entrada* digita o seguinte comando *Caminhos = (8!)/((3!)(5!))* e tecle entrar.

Figura A.19: Nº de caminhos possíveis.



Esse comando corresponde à permutação com repetição a seguir:

$$P_8^{(3,5)} = \frac{8!}{3! \cdot 5!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot \cancel{5!}}{3! \cdot \cancel{5!}} = \frac{336}{6} = 56.$$

A.8 Solução para a Tarefa 08

- Inicia por criar um círculo de raio 2 (por exemplo) com a ferramenta *Circunferência (Centro, raio)* na *Folha Gráfica 2D*;
- Com a ferramenta *Segmento de Reta (Dois Pontos)* divide o círculo em quatro setores;
- Com a ferramenta *Setor Circular (Centro, Dois pontos)* cria os quatro setores sobre o círculo;
- Na *Folha Algébrica*, clica sobre os objetos desnecessários à figura com o botão direito do rato e esconde os rótulos e objetos;

- Clica sobre cada um dos setores e edita a cor de cada um deles;

Exemplos de combinações das cores no círculo:

Figura A.20: Combinação de duas cores.

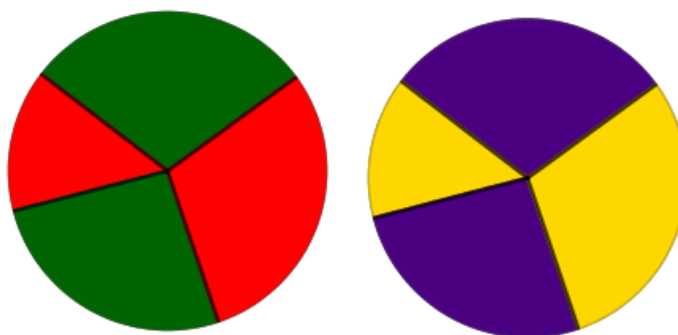


Figura A.21: Combinação de três cores.

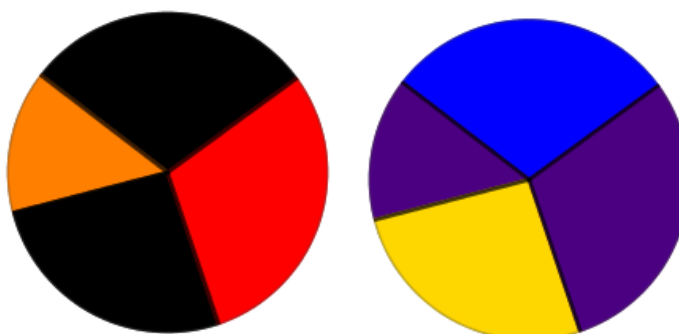
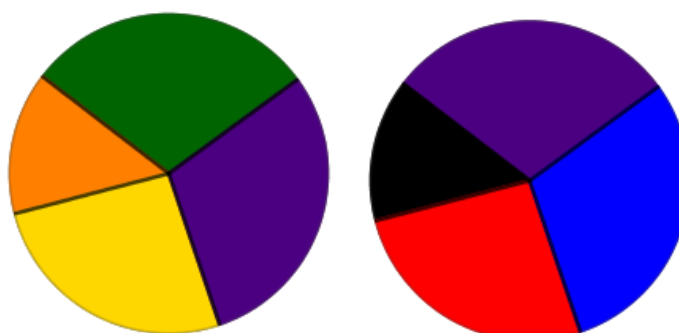


Figura A.22: Combinação de quatro cores.



Assim, o professor pode ilustrar alguns outros exemplos para os alunos reforçando que a ordem das cores tem grande importância nessa resolução (por exemplo "vermelho-verde" é diferente de "verde-vermelho"), e em seguida realizar junto deles os cálculos em cada caso.

Tem-se, então:

- i Sete cores tomadas de 2 em 2: $A_{7,2} = \frac{7!}{(7-2)!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot \cancel{5!}}{\cancel{5!}} = 7 \cdot 6 = 42$
- ii Sete cores tomadas de 3 em 3: $A_{7,3} = \frac{7!}{(7-3)!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot \cancel{4!}}{\cancel{4!}} = 7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$
- iii Sete cores tomadas de 4 em 4: $A_{7,4} = \frac{7!}{(7-4)!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot \cancel{3!}}{\cancel{3!}} = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 840$

Desse modo, tem-se $42 + 210 + 840 = 1092$ maneiras diferentes de pintar o Logótipo.

A.9 Solução para a Tarefa 09


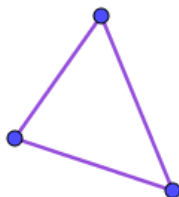
1. Inicia por construir os polígonos convexos mais simples na *Folha Gráfica 2D* usando a ferramenta *Polígono* ;
2. Cria um triângulo na folha de visualização gráfica e edita os objetos como desejar;

Figura A.23: Polígono com $n = 3$ lados.



Nesse caso não se tem o que fazer, pois triângulos não possuem diagonais.


3. Cria outros polígonos ($n = 4$ e $n = 5$) com a mesma ferramenta do item 1;
4. Com a ferramenta *Segmento de Reta (dois pontos)* , determina as diagonais dos polígonos;

Figura A.24: Polígono com $n = 4$ lados e suas diagonais.

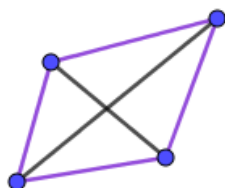
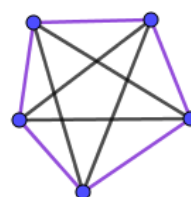


Figura A.25: Polígono com $n = 5$ lados e suas diagonais.



Essa ilustração pode facilitar a indução da expressão que determina o número de diagonais para um polígono com n lados.

Feito isso, pode-se usar o Geogebra para apresentar os resultados à medida que o número de lados se modifique.



5. Cria um seletor chamado "n", inteiro, variando de 3 a 20 (por exemplo);
6. Com a ferramenta *Polígono Regular*  clica sobre dois pontos quaisquer na *Folha Gráfica 2D* e, na caixa que surge, digita "n";
7. Edita os objetos como desejar;
8. No *Campo de Entrada*, digita a expressão que determina o número de diagonais: $d = (nCr(n,2) - n)$ e tecla enter;
9. Insira um texto dinâmico com a ferramenta *Inserir Texto* , vinculando os objetos "n" e "d" nos sítios adequados;
10. Seleciona o seletor "n" e movimenta-o.

Figura A.26: Polígono com 6 lados e cálculo do número de diagonais.

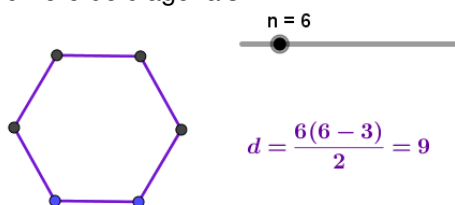
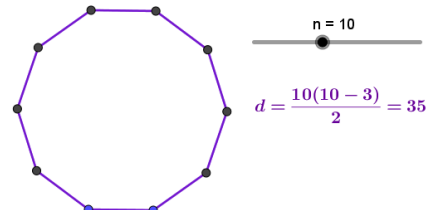





Figura A.27: Polígono com 10 lados e cálculo do número de diagonais.



Note que o polígono criado não apresenta as diagonais instantaneamente, sendo necessário que o aluno utilize a ferramenta de criação dos segmentos de reta para indicá-las, caso tenha interesse, a fim de conferir o resultado apresentado na expressão.

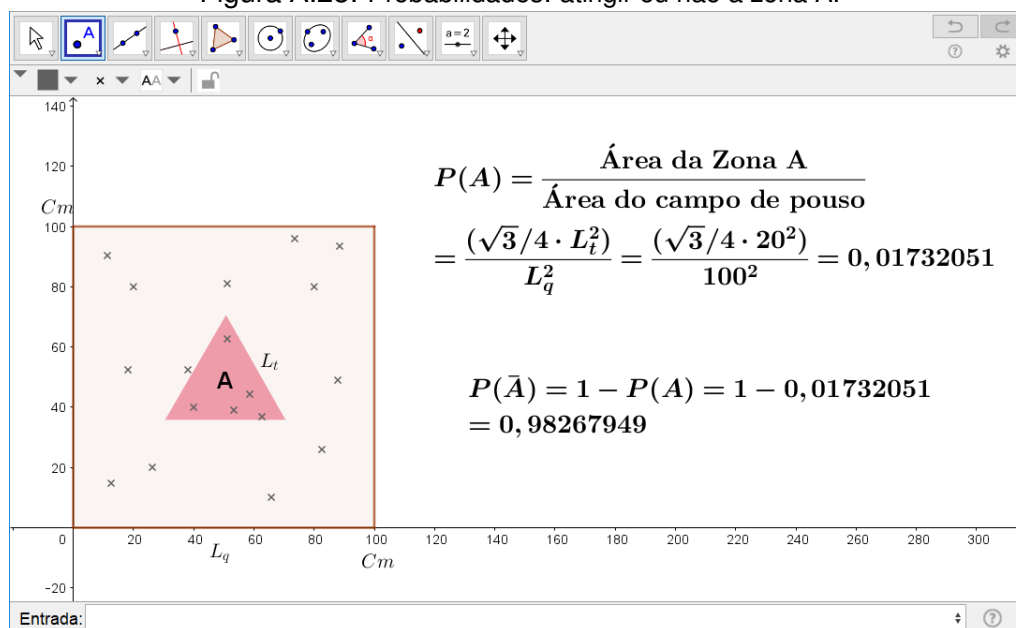
A.10 Solução para a Tarefa 10

1. Na *Folha Gráfica 2D*, cria um quadrado com 100 unidades de medida usando a ferramenta *Polígono* ;
2. Com a mesma ferramenta, cria um triângulo para simular a zona de pontos do campo de pouso;
3. Por meio da ferramenta *Inserir texto*  insira as informações necessárias à figura;
4. Usa a ferramenta *Novo Ponto*  para criar vários pontos e simular os pousos de vários competidores. Essa ação é indiferente para o cálculo da probabilidade solicitada na tarefa, serve apenas para auxiliar o usuário para compreender melhor como de facto a ação ocorre;

5. Ainda com a ferramenta do passo 3, insira um texto para apresentar a expressão do cálculo das probabilidades.

A figura ilustra a construção realizada:

Figura A.28: Probabilidades: atingir ou não a zona A.




Assim, espera-se que os estudantes compreendam a ideia por trás do cálculo de probabilidades por meio de conceitos geométricos.

A.11 Solução para a Tarefa 11

1. Cria um triângulo com as medidas do enunciado da tarefa usando a ferramenta *Polígono*

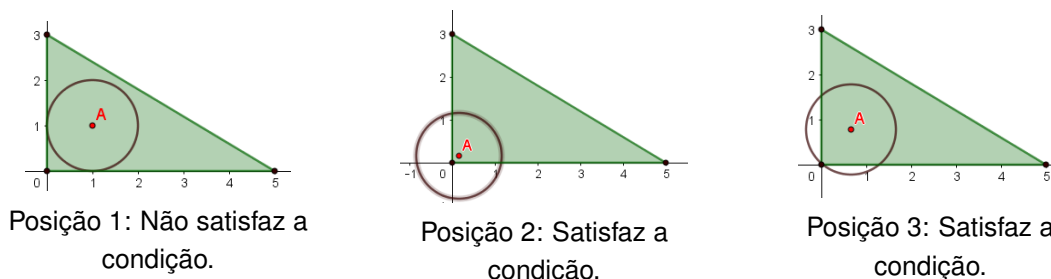


2. Com a ferramenta *Circunferência (Centro e Raio)*  cria um círculo de ponto *A* e raio 1;

3. Na *Folha Algébrica* edita os objetos como desejar: muda as cores, esconde os rótulos...;

4. Clica na ferramenta *Mover*  e seleciona o círculo;

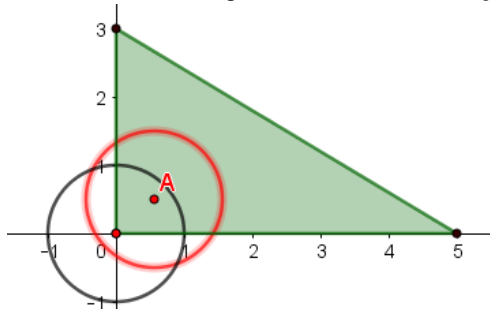
5. Movimenta-o para mostrar que existem muitas posições diferentes que satisfazem a condição;





Para verificar qual a área do triângulo onde o ponto A deve ser posicionado a fim de satisfazer a condição dada, tem-se que:

6. Posiciona o círculo de modo que o ponto A fique sobre um dos vértices;
7. Agora, cria outro círculo com as mesmas configurações do passo 2;
8. Edita a cor desse novo círculo para destacá-lo: clica com o botão direito do rato, seleciona as propriedades do objeto e lá, seleciona a cor que desejar;
9. Com a ferramenta *Mover*, clica sobre esse novo círculo e movimenta-o para conferir qual a região em que o ponto ainda permanece dentro do triângulo e ao mesmo tempo toca (ou contém) o vértice;

Figura A.29: Ponto A dentro de região favorável à condição do enunciado.




10. Cria círculos idênticos para os outros dois vértices;
11. De seguida, com a ferramenta *Interseção de Dois objetos* , determina os pontos de interseção entre o triângulo e todos os círculos e de seguida esconde os rótulos;
12. Determina os ângulos α , β e γ correspondentes a cada um dos vértices da figura, por meio da ferramenta *Ângulo* ;
13. No *Campo de Entrada* digita $s = \alpha + \beta + \gamma$;
14. Ainda no *Campo de Entrada* digita " $Soma = \alpha + \beta + \gamma = s$ ";

Assim, os estudantes podem conferir que a soma das áreas das zonas favoráveis para o ponto A é igual a $\frac{\alpha r^2}{2} + \frac{\beta r^2}{2} + \frac{\gamma r^2}{2} = \frac{\pi r^2}{2}$, que também corresponde a metade da área

do círculo. Assim, pode-se calcular a probabilidade usando a expressão:

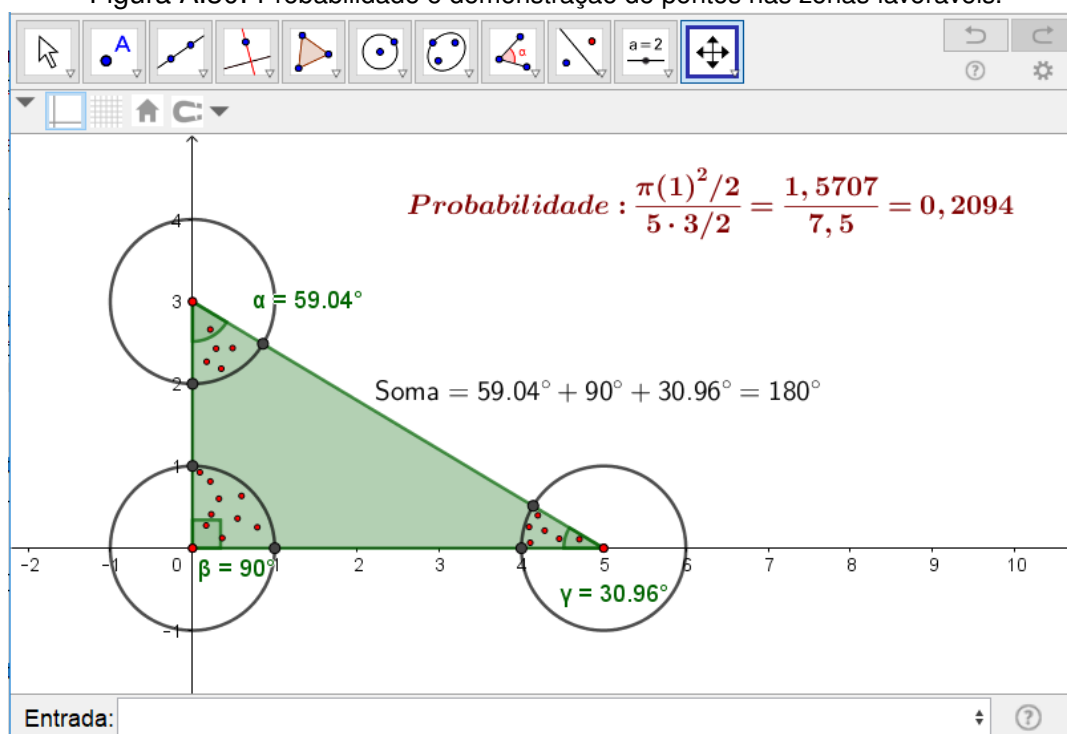
$$P(A) = \frac{\pi \cdot r^2/2}{b \cdot h/2},$$

ou seja, a região favorável corresponde à metade da área do círculo, e a região possível corresponde à área do triângulo. Sendo assim:

15. Usa a ferramenta *Inserir Texto*  para apresentar o cálculo da probabilidade;
16. Por fim, usa a ferramenta *Novo Ponto* para ilustrar vários pontos dentro da área condicionada pela tarefa.


A imagem a seguir mostra o resultado da construção:



Figura A.30: Probabilidade e demonstração de pontos nas zonas favoráveis.



Desse modo o professor pode explorar diversos conceitos de geometria com os estudantes enquanto buscam solucionar o cálculo da probabilidade pedida.

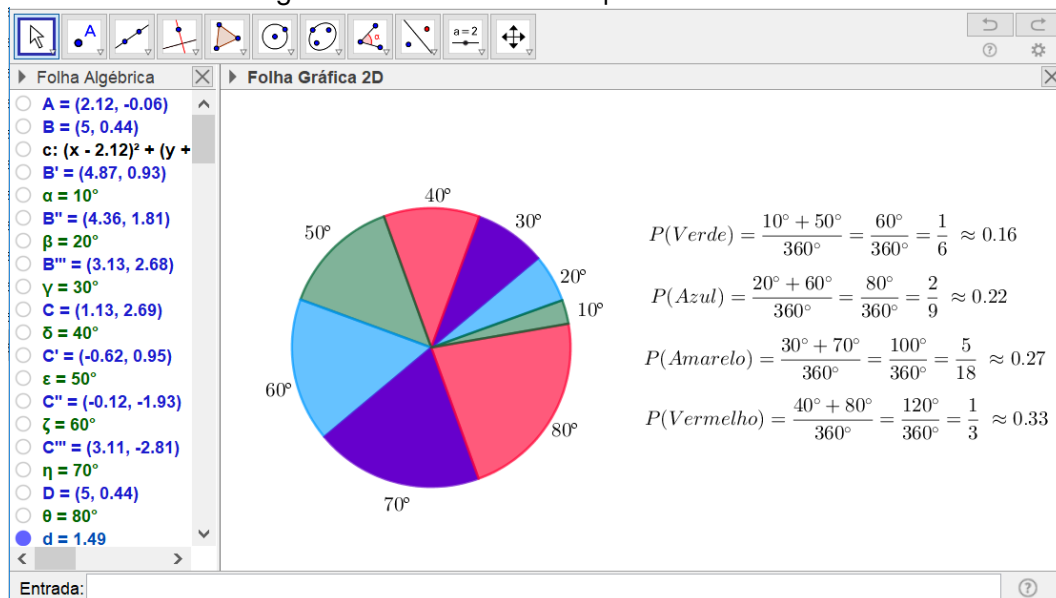
A.12 Solução para a Tarefa 12

1. Na *Folha Gráfica 2D* cria um circunferência com a ferramenta *Circunferência (Centro e Ponto)*  e esconde os rótulos;

2. Em seguida, usa a ferramenta *Ângulo com Dada amplitude*  para criar um ângulo de 10° ;
3. Esconde o valor do ângulo para não ficar com tantas informações visuais;
4. Com o ponto que surgiu automaticamente, repete os dois passos anteriores (criar um ângulo e escondê-lo);
5. Realiza o passo anterior até completar toda a circunferência;
6. Agora, com a ferramenta *Setor Circular (Centro, Dois Pontos)*, cria todos os setores selecionando sempre na mesma ordem o centro do setor e os dois pontos de sua extremidade;
7. Edita as cores dos setores na ordem apresentada no enunciado da tarefa, começando pelo setor com ângulo de 10° ;
8. Esconde todos os pontos e objetos desnecessários à visualização da roleta;
9. Insere textos para melhor indicar os ângulos de cada setor com a ferramenta *Inserir Texto* ;
10. Na *Caixa de Entrada* digita os comandos $S_{verde} = \alpha + \epsilon$; $S_{azul} = \beta + \zeta$; $S_{amarelo} = \gamma + \eta$; $S_{vermelho} = \delta + \theta$; $S_{total} = S_{verde} + S_{azul} + S_{amarelo} + S_{vermelho}$ e tecla enter após cada um deles, a fim de calcular a soma dos ângulos dos setores com cores iguais;
11. Com a ferramenta do texto, acrescente os cálculos das probabilidades de cada setor, por cores, de modo dinâmico (objetos vinculados no sítio adequado).

A figura a seguir mostra o resultado:

Figura A.31: Probabilidades por cores de setor.



Note que além da informação da progressão aritmética nos valores dos ângulos, tanto as somas por cores quanto as probabilidades seguem uma progressão também. No caso das probabilidades o professor deve trabalhar com os alunos relativamente a reduzir as frações a um denominador comum.

Apêndice B

Lista de Comandos - GeoGebra

Aqui serão listados alguns comandos que foram utilizados neste trabalho, bem como alguns outros que podem ser utilizados para abordar os conteúdos de Estatística, Análise Combinatória e Probabilidade.

B.1 Medidas de Localização e Dispersão e Organização de dados

- **DesStd(<Lista de Dados não Classificados>):** Determina o desvio padrão dos números na lista;
- **DesStd(<Lista de Números>, <Lista de Frequências>):** Determina o desvio padrão da lista de números de acordo com a frequência;
- **Média(<Lista de Dados não Classificados>):** Determina a média de um conjunto de elementos não ordenados;
- **Média(<Lista de Números>, <Lista de Frequências>):** Determina a média ponderada de um conjunto de elementos (ordenados ou não);
- **Média(<Lista de Limites de Classe>, <Lista de Frequências>):** Determine a média dos centros das classes ponderadas pelas frequências associadas;
- **Mediana(<Lista de Dados não Classificados>):** Determina a mediana da lista de elementos;
- **Mediana(<Lista de Números>, <Lista de Frequências>):** Calcule a mediana da lista de números ponderados de acordo com a frequência;
- **Moda(<Lista de Números>):** Determina o(s) elemento(s) com maior ocorrência;
- **Máximo(<Lista>):** Determina o limite superior da lista de dados;
- **Mínimo(<Lista>):** Determina o limite inferior da lista de dados;
- **Ordenar(<Lista>):** Ordena a lista de dados, criando um Rol;
- **Quartil1(<Lista de dados brutos>):** Determina o primeiro quartil dos itens na lista;

- **Quartil1(<Lista de números>, <Lista de frequência>):** Determina o primeiro quartil dos elementos da lista ponderados de acordo com a frequência;
- **Quartil3(<Lista de dados brutos>):** Determina o quartil superior dos dados listados;
- **Quartil3(<Lista de números>, <Lista de frequência>):** Determina o quartil superior dos elementos da lista ponderados de acordo com a frequência;
- **Variância(<Lista de Dados não Classificados>):** Determina a variância dos elementos listados;
- **Variância(<Lista de Números>, <Lista de Frequências>):** Determina a variância dos elementos ponderados pelas frequências.

B.2 Tabelas

- **TabeladeFrequência(<Lista de Dados não classificados>):** Crie uma tabela de texto cuja primeira coluna apresenta os elementos da lista dada de forma ordenada e, na segunda, apresenta o número de ocorrências de cada valor da primeira;
- **TabeladeFrequência(<Acumulada(true | false)>, <Lista de Dados não classificados>):** Se o valor para *Acumulada* for false, cria a mesma tabela produzida no item anterior. Se for true, apresenta as frequências acumuladas;
- **TabeladeFrequência(<Lista de Limites de Classe>, <Lista de Dados não classificados>):** Cria uma tabela de texto cuja primeira coluna contém intervalos (classes) e a segunda, o número de elementos da lista de dados que pertence a cada intervalo;
- **TabeladeFrequência(<Acumulado(true | false)>, <Lista de Limites de Classe>, <Lista de Dados não classificados>):** Se o valor para *Acumulada* for false, cria a mesma tabela produzida no item anterior. Se for true, apresenta as frequências acumuladas;
- **TabeladeFrequência(<Lista de Limites de Classe>, <Lista de Dados não classificados>, <Acumulado(true | false)>, <Fator de Escala de Densidade (opcional)>):** Cria uma tabela de texto cuja primeira coluna contém intervalos (classes) e, na segunda, as frequências para o histograma correspondente;
- **TabeladeFrequência(<Lista de Dados não classificados>, <Fator de escala (opcional)>):** Gera uma tabela de texto cuja primeira coluna contém uma lista ordenada de elementos únicos e a segunda, a frequência com o número de ocorrências do valor da primeira multiplicado pelo "Fator de Escala".

B.3 Diagramas e Gráficos

- **DiagramaCauleFolhas(<Lista>):** Define o diagrama de Caule e Folhas para a lista de números fornecidos. Outliers, que são descartados do diagrama, são listados separadamente;

- **DiagramaCauleFolhas(<Lista>, <Ajustamento(-1 | 0 | 1)>):** Define o diagrama de Caule e Folhas para a lista de números fornecidos. Se ajustar "-1" a unidade padrão do diagrama é dividida por 10, se Ajustar "0", não há modificações, se ajustar "1", a unidade padrão é multiplicada por 10;
- **DiagramadeExtremoseQuartis(<Ordenada>, <Semialtura>, <Lista de Dados não Classificados>):** Cria um diagrama de extremos e quartis usando uma lista de dados não classificados. A posição vertical do diagrama é controlada pela *Ordenada*. A altura do diagrama é influenciada pelo *Semialtura*;
- **DiagramadeExtremoseQuartis(<Ordenada>, <Semialtura>, <Valor Inicial>, <Q1>, <Mediana>, <Q3>, <Valor Final>):** Cria um diagrama de extremos e quartis a partir dos cinco valores necessários para a sua construção;
- **GráficodeBarras(<Lista de dados>, <Lista de frequência>):** Cria um diagrama usando a lista de dados, de acordo com as frequências correspondentes;
- **GráficodeBarras(<Lista de Dados não classificados>, <Largura da barra>):** Cria um gráfico usando os dados brutos para definir as barras correspondentes, todas com a largura determinada;
- **GráficodeBarras(<Lista de dados>, <Lista de frequência>, <Largura da barra>):** Cria um gráfico de barras da largura indicada, usando a lista de dados e as frequências correspondentes;
- **GráficodePontos(<Lista de Dados não classificados>):** A partir da lista de elementos, marca um ponto tal que, para cada elemento a que aparecer na lista k vezes, o resultado contém itens tais como $(a, 1), (a, 2), \dots, (a, k)$;
- **GráficodePontos(<Lista de Dados Não Classificados>, <Empilhar Pontos Adjacentes (opcional)>, <Fator de Escala (opcional)>):** Cria uma sequência de pontos, tal qual o item anterior, no qual pode-se definir a proximidade do empilhamento de pontos;
- **Histograma(<Lista dos limites das classes>, <Lista das alturas>):** Cria um histograma em que as alturas das barras são as frequências das classes. Os limites das classes determinam a largura e a posição de cada barra do histograma;
- **Histograma(<Lista dos limites das classes>, <Lista de dados não classificados>, <Densidade(true|false)>, <Escala(opcional)>):** Cria um histograma usando uma lista de dados não classificados. Os limites das classes determinam a largura e a posição de cada barra. Na densidade, ajuste true ou false para exibí-la ou não, e a escala é o ajustamento em percentagem;
- **Histograma(<Acumulada(true|false)>, <Lista dos Limites das Classes>, <Lista de Dados Não Classificados>, <Densidade(true|false)>, <Escala(opcional)>):** Cria um histograma usando uma lista de dados não classificados tal qual o anterior, modificando apenas a definição ou não da frequência acumulada;

- **PolígonodeFrequências(<Lista dos Limites das Classes>, <Lista das Frequências>):** Cria um polígono de frequência com vértices nas barras correspondentes. As extremidades do intervalo de classe determinam a largura e a posição de cada barra;
- **PolígonodeFrequências(<Lista dos Limites das Classes>, <Lista de Dados Não Classificados>, <Densidade(true|false)>, <Escala(opcional)>):** Cria um Polígono de Frequência no qual a lista de limites de classe determina a abscissa dos vértices e, as ordenadas, são vinculados à Lista de Dados não classificados da seguinte forma: Se o parâmetro Densidade for true, a altura será igual a (Densidade) * (frequência da classe) / (largura da classe). Se for false, a altura será igual a frequência da classe;
- **SetorCircular(<Ponto Médio>, <Ponto>, <Ponto>):** Cria um setor circular para auxiliar a construção do gráfico de setores. O Ponto médio, nesse caso, é o centro do círculo, ou vértice do setor.

B.4 Análise Combinatória

- **nAr(<n>, <r>):** Determina o número de arranjos de n elementos com r elementos em cada arranjo, sendo $n \geq r$;
- **nCr(<n>, <r>):** Determina o número de combinações de n elementos com r elementos em cada combinação, sendo $n \geq r$. Vale lembrar que o binómio de Newton corresponde a essa combinação;
- **nPr(<n>, <r>):** Determina o número de permutações de n elementos com r elementos em cada uma das trocas (tal qual o arranjo) sendo $n \geq r$;
- **(<n>)!:** Determina o fatorial do número n ;
- **((n)!/((r_1)!*(r_2)!*...*(r_k)!)):** Esse comando determina o número de permutações de n elementos com r_1, r_2, \dots, r_k repetições;
- **PFC = (<n>*<r>):** O princípio multiplicativo consiste em multiplicar o número de possibilidades de cada tipo de ocorrência desde que essas ocorrências aconteçam de forma independente.

B.5 Probabilidades

- **AleatórioElemento(<Lista>):** Seleciona um elemento qualquer pertencente à lista apresentada;
- **AleatórioUniforme(<Mínimo>, <Máximo>):** Seleciona um elemento qualquer entre os valores apresentados;
- **P = (<r> / <n>):** Probabilidade tradicional, no qual r corresponde ao número de casos favoráveis e n corresponde ao número de casos possíveis.