

# Introdução a Teoria de Conjuntos <sup>1</sup>

para estudantes que estão ingressando na Matemática

Prof. Alexandre Kirilov

16 de outubro de 2016

<sup>1</sup>**Alerta:** Esse texto é apenas um roteiro usado pelo professor da disciplina para organizar suas aulas. Como se trata de uma primeira versão, não passou por revisão e está incompleto. Logo você encontrará erros de digitação, de português, de notação etc. Caso encontre qualquer problema, por favor me avise para que eu possa corrigir. A disposição dos conteúdos é fortemente inspirada no livro de Introdução a Teoria dos Conjuntos, do Edgard de Alencar Filho.



# Sumário

<b>1</b>	<b>Conjuntos</b>	<b>5</b>
1.1	Noção de conjunto . . . . .	5
1.2	Relação de pertinência . . . . .	6
1.3	Família de conjuntos . . . . .	6
1.4	Conjunto universo . . . . .	7
1.5	Conjuntos numéricos . . . . .	7
1.6	Determinação de um conjunto . . . . .	7
1.7	Conjunto unitário . . . . .	8
1.8	Conjunto vazio . . . . .	8
1.9	Conjuntos finitos e infinitos . . . . .	9
1.10	Notações especiais para alguns conjuntos numéricos . . . . .	9
1.11	Representação geométrica dos números reais . . . . .	10
1.12	Intervalos limitados em $\mathbb{R}$ . . . . .	10
1.13	Intervalos não-limitados em $\mathbb{R}$ . . . . .	11
<b>2</b>	<b>Igualdade e inclusão</b>	<b>13</b>
2.1	Igualdade de conjuntos . . . . .	13
2.1.1	Propriedades da igualdade . . . . .	14
2.2	Relação de inclusão . . . . .	14
2.2.1	Propriedades da inclusão . . . . .	15
2.3	Conjuntos comparáveis . . . . .	16
2.4	Subconjuntos . . . . .	16
2.4.1	Subconjuntos de um conjunto finito . . . . .	17
2.5	Conjunto das partes . . . . .	18
2.6	Complementar de um subconjunto . . . . .	19
2.6.1	Propriedades do complementar . . . . .	20

<b>3</b>	<b>Operações com conjuntos</b>	<b>21</b>
3.1	Diagramas de Venn . . . . .	21
3.2	Interseção . . . . .	21
3.2.1	Teoremas relacionando inclusões e interseções . . . . .	22
3.2.2	Propriedades da interseção . . . . .	23
3.2.3	Interseção de vários conjuntos . . . . .	24
3.3	Reunião . . . . .	25
3.3.1	Propriedades da reunião . . . . .	26
3.3.2	Teoremas relacionando interseção e reunião de conjuntos . . . . .	27
3.3.3	Reunião de vários conjuntos . . . . .	28
3.3.4	Álgebra de conjuntos . . . . .	28
3.4	Diferença de dois conjuntos . . . . .	29
3.4.1	Propriedades da diferença . . . . .	30
3.5	Diferença simétrica . . . . .	31
3.6	Reuniões e interseções arbitrárias . . . . .	32
<b>4</b>	<b>Produto Cartesiano</b>	<b>35</b>
4.1	Quadrado cartesiano de um conjunto . . . . .	36
4.2	Propriedades do produto cartesiano . . . . .	37
4.3	$n$ -uplas ordenadas . . . . .	38
4.4	Produto cartesiano de varios conjuntos . . . . .	39
<b>5</b>	<b>Relações</b>	<b>41</b>

# Capítulo 1

## Conjuntos

### 1.1 Noção de conjunto

A noção de conjunto, fundamental na Matemática de nossos dias, não é suscetível de definição precisa a partir de noções mais simples, ou seja, é uma noção primitiva.

Intuitivamente, por “conjunto” entenderemos qualquer coleção bem definida de objetos distinguíveis, não importando sua natureza. Os objetos que constituem um conjunto são chamados de **elementos do conjunto**.

**Exemplo:**

1. No conjunto das vogais do alfabeto, cada uma das vogais é um elemento;
2. No conjunto dos alunos de uma disciplina, cada um dos alunos é um elemento;
3. Uma reta pode ser considerada um conjunto dos pontos, neste caso cada ponto dessa reta é um elemento do conjunto.

É costume denotar conjuntos usando letras maiúsculas e seus elementos por letras minúsculas. Por exemplo: o conjunto  $A$  cujos elementos são  $a$ ,  $b$  e  $c$ , será representado pela notação:

$$A = \{a, b, c\}$$

que deve ser lida: “ $A$  é o conjunto cujos elementos são  $a$ ,  $b$  e  $c$ ”. Observe que os elementos devem ser separados por vírgulas e delimitados por chaves.

Também é um costume dos matemáticos denominar conjuntos por “letras significativas”, ou seja, letras que tenham algum tipo de ligação com os elementos do conjunto.

**Exemplo:**

1. O conjunto das letras da palavra ‘Matemática’:  $L = \{m, a, t, e, i, c\}$ . Aqui foi escolhida a letra “ $L$ ” por lembrar a palavra “letras”, mas  $M$  também teria sido uma boa escolha;
2. O conjunto das vogais do alfabeto português:  $V = \{a, e, i, o, u\}$ ;
3. O conjunto dos meses do ano com 30 dias:  $T = \{\text{Abril, Junho, Setembro, Novembro}\}$ .

## 1.2 Relação de pertinência

Para indicar que um elemento  $x$  pertence ao conjunto  $A$ , escrevemos

$$x \in A,$$

e para indicar que um elemento  $y$  não pertence ao conjunto  $A$ , escrevemos

$$y \notin A.$$

Com o mesmo significado de  $x \in A$ , escreve-se  $A \ni x$ , que se lê: “ $A$  contém  $x$ ”. Também podemos escrever  $A \not\ni x$  que se lê: “ $A$  não contém  $x$ ”.

**Observação:** Ao colocarmos um traço oblíquo sobre um símbolo produzimos um novo símbolo cujo significado é a negação do primeiro. É o que acontece com o símbolo  $\neq$  (diferente de) conhecido de todos, e agora com os símbolos  $\notin$  e  $\not\ni$  (não pertence e não contém).

Quando dois ou mais elementos pertencem a um mesmo conjunto é bastante comum listá-los e usar apenas um símbolo de pertinência. Por exemplo, a notação  $a, b, c \in A$  significa que os três elementos pertencem ao conjunto  $A$ , ou seja,  $a \in A$ ,  $b \in A$  e  $c \in A$ .

Um elemento particular de  $A$  é um elemento específico desse conjunto, o qual pode ser distinguido dos demais por sua natureza ou definição. Ao contrário, um elemento arbitrário de  $A$  é um elemento do qual nada se supõe, salvo sua pertinência ao conjunto  $A$ .

**Exemplo:** Considere o conjunto  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ , então:

$$1 \in A, \quad 2 \in A, \quad 6 \notin A, \quad 3, 4, 5 \in A.$$

Os números 2 e 4 são elementos particulares de  $A$ . Quando queremos nos referir a um elemento genérico de  $A$  escrevemos: “seja  $x \in A$  um elemento qualquer” ou “seja  $x$  um elemento arbitrário de  $A$ ”.

## 1.3 Família de conjuntos

Um conjunto cujos elementos também são conjuntos é chamado de família de conjuntos. Por exemplo,

$$F = \{\{2, 3\}, \{2\}, \{5, 6, 7\}\}$$

é uma família de conjuntos, cujos elementos são  $\{2, 3\}$ ,  $\{2\}$ , e  $\{5, 6, 7\}$ . Neste caso

$$\{2, 3\} \in F, \quad \{2\} \in F \quad \text{e} \quad \{5, 6, 7\} \in F$$

Note que  $2 \notin F$  e  $5 \notin F$ , pois os elementos de  $F$  não são números, são conjuntos!

Uma reta é um conjunto de pontos e, portanto, um conjunto de retas pode ser considerado uma família de retas.

Também faz sentido considerar um conjunto no qual alguns elementos são conjuntos e outros não. Por exemplo:  $F = \{\{2, 3\}, 2, \{5\}\}$  Aqui

$$\{2, 3\} \in F, \quad 3 \notin F, \quad 2 \in F, \quad \{2\} \notin F, \quad \{5\} \in F \quad \text{e} \quad 5 \notin F$$

## 1.4 Conjunto universo

Chama-se conjunto universo (ou apenas universo de uma teoria) o conjunto de todos os elementos que são considerados no estudo de uma teoria.

Por exemplo: em Aritmética o universo pode ser conjunto de todos os números inteiros e em Geometria o universo pode ser o conjunto de todos os pontos de um plano ou do espaço.

O universo também é chamado de domínio e vamos representá-los pela letra  $\mathcal{U}$ .

## 1.5 Conjuntos numéricos

Os seguintes conjuntos numéricos são particularmente importantes na Matemática e serão extensivamente usados em nossos exemplos:

- Conjunto dos números naturais  $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$ ;
- Conjunto dos números inteiros  $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\}$  ou  $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ ;
- Conjunto dos números racionais  $\mathbb{Q}$ , é conjunto de todos os números que podem ser escritos como o quociente de dois números inteiros, ou seja, que podem ser escritos na forma  $p/q$  com  $p, q \in \mathbb{Z}$  e  $q \neq 0$ ;
- Conjunto dos números reais  $\mathbb{R}$  cujos elementos são todos os números racionais e irracionais (não racionais);
- Conjunto dos números complexos  $\mathbb{C}$  cujos elementos são todos os números da forma  $a + bi$ , com  $a, b \in \mathbb{R}$  e  $i = \sqrt{-1}$ .

## 1.6 Determinação de um conjunto

Dizemos que um conjunto  $A$  é dado ou definido num universo  $\mathcal{U}$ , quando se conhece um critério que permita decidir se um elemento pertence ou não pertence ao conjunto  $A$  (devendo verificar uma e somente uma destas duas possibilidades).

Há duas maneiras de dar ou definir um conjunto num determinado universo:

1. Enumerando individualmente todos os elementos que pertencem ao conjunto.

Neste caso dizemos que o conjunto está definido por enumeração ou extensão. Num conjunto definido por enumeração, a ordem dos elementos é indiferente e cada elemento deve figurar somente uma vez.

2. Enunciando um critério de pertinência que é satisfeito por todos os elementos do conjunto e somente por esses elementos.

Este critério de pertinência consiste em uma ou mais condições que os elementos do conjunto devem satisfazer.

No universo  $\mathcal{U}$ , o conjunto  $A$  dos elementos  $x$  que verificam a condição  $p(x)$  (ou possuem a propriedade  $p(x)$ ), é indicado pela notação:

$$A = \{x : x \in \mathcal{U} \text{ e } p(x)\} \quad \text{ou} \quad A = \{x \in \mathcal{U} : p(x)\}$$

Caso os elementos do conjunto  $A$  precisem verificar mais de uma condição, por exemplo,  $p(x)$  e  $q(x)$  simultaneamente, podemos escrever:

$$A = \{x \in \mathcal{U} : p(x) \text{ e } q(x)\}$$

Quando não há risco de ambiguidade, pode-se suprimir a indicação do universo  $\mathcal{U}$  nas definições dos conjuntos escrevendo-se apenas:

$$A = \{x : p(x)\} \quad \text{ou} \quad A = \{x : p(x) \text{ e } q(x)\}$$

**Exemplo:**

1.  $A = \{x \in \mathbb{N} : x < 5\} = \{1, 2, 3, 4\};$
2.  $B = \{x \in \mathbb{N} : x < 20 \text{ e } x \text{ é primo}\};$
3.  $C = \{x \in \mathbb{Z} : x \text{ é divisível por } 5\};$

## 1.7 Conjunto unitário

Chama-se conjunto unitário todo o conjunto constituído de um único elemento. Quando  $A = \{a\}$  dizemos que  $A$  é o conjunto unitário determinado pelo elemento  $a$ .

**Importante:** note que uma coisa é um conjunto unitário e outra coisa é o elemento que o determina. Dessa forma:  $3 \in \{3\}$  é o correto e a notação  $3 = \{3\}$  não faz sentido.

**Exemplo:**

1.  $P = \{x \in \mathbb{N} : x + 1 = 3\} = \{2\};$
2.  $Q = \{x \in \mathbb{R} : x^2 = 0\} = \{0\};$

## 1.8 Conjunto vazio

Considere o conjunto  $A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 < 0\}$ . Note que não existe número real que satisfaça a condição  $x^2 < 0$ , logo essa é uma condição impossível.

O conjunto dos elementos que verificam uma condição impossível é um conjunto sem elementos, portanto convencionaremos chamá-lo de conjunto vazio. Trata-se de uma convenção Matemática que amplia o significado usual da palavra conjunto.

A notação usual para o conjunto vazio é  $\emptyset$ .

**Exemplo:**

1.  $A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 < 0\} = \emptyset$
2.  $R = \{x \in \mathbb{N} : x = x + 1\} = \emptyset$



## 1.9 Conjuntos finitos e infinitos

Uma correspondência entre os conjuntos  $A$  e  $B$  é unívoca de  $A$  para  $B$  se para cada elemento de  $A$  corresponder um único elemento de  $B$ . Dizemos que a correspondência é biunívoca, se ela for unívoca tanto de  $A$  para  $B$  como de  $B$  para  $A$ . Em outras palavras, uma correspondência é biunívoca se: para cada elemento de  $A$  corresponde um único elemento de  $B$  e, reciprocamente, para cada elemento de  $B$  corresponde um único elemento de  $A$ .

Dizemos que um conjunto  $A$  é finito quando, para algum  $n \in \mathbb{N}$ , existir uma correspondência biunívoca entre o conjunto  $A$  e o conjunto dos  $n$  primeiros números naturais.

Por exemplo, é fácil estabelecer uma correspondência biunívoca entre o conjuntos:

$$A = \{x \in \mathbb{Z}; |x| \leq 2\} \text{ e } \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

Para completar nossa definição, assumimos que o conjunto vazio é finito e possui zero elementos. Finalmente, diremos que um conjunto é infinito quando ele não for finito.

Usaremos a notação  $n(A)$  para designar o número de elementos de um conjunto finito  $A$ . Note que:

- $A$  vazio  $\Rightarrow n(A) = 0$ ;
- $A$  finito e não vazio  $\Rightarrow n(A) = n \in \mathbb{N}$ .

Para representar um conjunto finito, com um número não determinado de elementos, usamos três pontos entre vírgulas, por exemplo:

$$\{a, b, c, \dots, m\}.$$

E para representar conjuntos infinitos, listamos uma quantidade representativa de seus elementos colocando de três pontos entre a última vírgula e a chave que delimita o conjunto, por exemplo:

$$\{1, 2, 3, 4, \dots\}$$

No parágrafo acima o termo “quantidade representativa” deve ser entendido como “uma quantidade de elementos suficiente para caracterizar qual propriedade um elemento deve possuir para estar nesse conjunto”.

Por exemplo: quando escrevemos  $P = \{2, 4, 6, 8, \dots\}$  e  $R = \{2, 3, 5, 7, 11, \dots\}$ , presume-se que  $P$  seja formado pelo números naturais pares e que  $R$  seja o conjunto dos números primos.

Também é comum encontrar a notação  $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$  para indicar que o conjunto dos números inteiros tem uma infinidade de elementos “nas duas direções” (positiva e negativa).

Para indicar que um conjunto finito possui exatamente  $k$  elementos (sendo  $k$  um número natural qualquer) pode-se escrever

$$\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_k\}.$$

## 1.10 Notações especiais para alguns conjuntos numéricos

**Excluindo o zero:**

Os conjuntos numéricos  $\mathbb{Z}^*$ ,  $\mathbb{Q}^*$  e  $\mathbb{R}^*$  são obtidos a partir dos conjuntos numéricos  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Q}$  e  $\mathbb{R}$  excluindo-se o zero. Portanto:

$$\mathbb{Z}^* \doteq \{x \in \mathbb{Z} : x \neq 0\}, \quad \mathbb{Q}^* \doteq \{x \in \mathbb{Q} : x \neq 0\} \quad \text{e} \quad \mathbb{R}^* \doteq \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\}.$$

### Não Negativos:

Os conjuntos numéricos  $\mathbb{Z}_+$ ,  $\mathbb{Q}_+$  e  $\mathbb{R}_+$  são obtidos a partir dos conjuntos numéricos  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Q}$  e  $\mathbb{R}$  considerando-se apenas os elementos não negativos (ou seja, maiores ou iguais a zero). Portanto:

$$\mathbb{Z}_+ \doteq \{x \in \mathbb{Z} : x \geq 0\}, \quad \mathbb{Q}_+ \doteq \{x \in \mathbb{Q} : x \geq 0\} \quad \text{e} \quad \mathbb{R}_+ \doteq \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}.$$

### Não Positivos:

Os conjuntos numéricos  $\mathbb{Z}_-$ ,  $\mathbb{Q}_-$  e  $\mathbb{R}_-$  são obtidos a partir dos conjuntos numéricos  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Q}$  e  $\mathbb{R}$  considerando-se apenas os elementos não positivos (ou seja, menores ou iguais a zero). Portanto:

$$\mathbb{Z}_- \doteq \{x \in \mathbb{Z} : x \leq 0\}, \quad \mathbb{Q}_- \doteq \{x \in \mathbb{Q} : x \leq 0\} \quad \text{e} \quad \mathbb{R}_- \doteq \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\}.$$

### Combinando notações:

Também é comum considerar conjuntos numéricos não positivos, ou não negativos, sem o zero, para isso usaremos as notações:

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}_+^* \doteq \{x \in \mathbb{Z} : x > 0\} &\doteq \mathbb{N}, & \mathbb{Q}_+^* \doteq \{x \in \mathbb{Q} : x > 0\}, & \mathbb{R}_+^* \doteq \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}, \\ \mathbb{Z}_-^* \doteq \{x \in \mathbb{Z} : x < 0\}, & \mathbb{Q}_-^* \doteq \{x \in \mathbb{Q} : x < 0\}, & \mathbb{R}_-^* \doteq \{x \in \mathbb{R} : x < 0\}. \end{aligned}$$

**Observação:** Note que nos conjuntos acima foi usado o símbolo  $\doteq$  em vez do símbolo de igualdade  $=$ . Este é um símbolo de definição bastante comum em textos de Matemática. A expressão  $A \doteq \{a, b, c\}$  significa que o autor passará a denominar por  $A$  o conjunto  $\{a, b, c\}$ . Alguns autores também usam o símbolo  $:=$  com esse mesmo significado.

## 1.11 Representação geométrica dos números reais

Os números reais podem ser representados geometricamente pelos pontos de uma reta, chamada reta real. Escolhe-se um ponto  $O$  para representar o número real zero e um outro ponto  $A$ , à direita de  $O$ , para representar o número real 1. Usando a distância entre  $A$  e  $O$  como unidade de medida, a todo ponto da reta real corresponderá um único número real e, inversamente, a todo número real corresponderá um único ponto dessa reta. Em outras palavras, há uma correspondência biunívoca entre o conjunto  $\mathbb{R}$  dos números reais e o conjunto dos pontos da reta real.

Os números reais à direita do zero (que estão do mesmo lado que o 1) formam o conjunto  $\mathbb{R}_+^*$  dos números reais positivos, já os números reais à esquerda do zero formam o conjunto  $\mathbb{R}_-^*$  dos números reais negativos. O número 0 não é positivo nem negativo.

## 1.12 Intervalos limitados em $\mathbb{R}$

Sejam  $a$  e  $b$  dois números reais, com  $a < b$ . Chamamos de intervalo fechado de extremos  $a$  e  $b$  o conjunto  $[a, b]$  formado por todos os números reais  $x$  tais que  $a \leq x \leq b$ , ou seja,

$$[a, b] \doteq \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$$

De forma análoga definimos os seguintes conjuntos:

- intervalo semi-aberto à direita de extremos  $a$  e  $b$ :  $[a, b) \doteq \{x \in \mathbb{R}; a \leq x < b\}$
- intervalo semi-aberto à esquerda de extremos  $a$  e  $b$ :  $(a, b] \doteq \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$
- intervalo aberto de extremos  $a$  e  $b$ :  $(a, b) \doteq \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$

Em algumas situações particulares, pode ser interessante retirar a exigência  $a < b$ . Neste caso vamos nos deparar com algumas situações incomuns, por exemplo:

- No caso em que  $b = a$ , obtemos o intervalo fechado degenerado  $[a, a] = \{a\}$ . Essa situação ocorre em várias demonstrações da Análise Matemática na qual se usa o “Teorema dos Intervalos Encaixados”.
- Também no caso em que  $b = a$ , teremos  $(a, a) = \{x \in \mathbb{R}; x < a \text{ e } x > a\} = \emptyset$ ,  $[a, a) = \emptyset$  e  $(a, a] = \emptyset$ .
- Para  $b < a$ , os intervalos limitados  $[a, b]$ ,  $[a, b)$ ,  $(a, b]$  e  $(a, b)$  serão todos vazios.

Para ajudar na compreensão desses exemplos abstratos, pense em alguns exemplos numéricos.

Para concluir, convém observar que todos os intervalos limitados, com  $a < b$ , são conjuntos infinitos, ou seja, cada um deles tem uma infinidade de elementos.

### 1.13 Intervalos não-limitados em $\mathbb{R}$

Seja  $a$  um número real qualquer. Chamamos de intervalo fechado ilimitado a direita de origem  $a$  o conjunto  $[a, +\infty)$  formado por todos os números reais  $x$  tais que  $x \geq a$ , ou seja,

$$[a, +\infty) \doteq \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}$$

De forma análoga definimos os seguintes conjuntos:

1. intervalo fechado ilimitado a esquerda de origem  $a$ :  $(-\infty, a] \doteq \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\}$ ;
2. intervalo aberto ilimitado a direita de origem  $a$ :  $(a, +\infty) \doteq \{x \in \mathbb{R} : x > a\}$ ;
3. intervalo aberto ilimitado a esquerda de origem  $a$ :  $(-\infty, a) \doteq \{x \in \mathbb{R} : x < a\}$ ;
4. intervalo aberto ilimitado à esquerda e à direita:  $(-\infty, +\infty) \doteq \mathbb{R}$ .



## Capítulo 2

# Igualdade e inclusão

### 2.1 Igualdade de conjuntos

Apesar de já termos usado o símbolo de igualdade previamente nesse texto e de todos nós termos uma ideia intuitiva do que devam ser conjuntos iguais, daremos uma definição precisa desse conceito e estudaremos suas propriedades com um pouco mais de cuidado.

**Definição 2.1.** Dizemos que os conjuntos  $A$  e  $B$  são iguais, e denotamos  $A = B$ , quando esses conjuntos têm exatamente os mesmos elementos.

A definição acima pode ser reescrita na linguagem de lógica matemática de seguinte forma:

$$A = B \iff (\forall x)(x \in A \iff x \in B) \quad (2.1.1)$$

Quando o conjunto  $A$  não é igual ao conjunto  $B$ , dizemos que “ $A$  é diferente de  $B$ ” e usamos a notação usual  $A \neq B$ . Neste caso existe pelo menos um elemento de  $A$  que não pertence a  $B$ , ou existe um elemento de  $B$  que não pertence a  $A$ .

Recordando que a bicondicional  $p \leftrightarrow q$  é equivalente a proposição  $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$ , a negação da bicondicional será:

$$\sim (p \leftrightarrow q) \iff \sim (p \rightarrow q) \vee \sim (q \rightarrow p) \iff (p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim p)$$

Usando essa expressão e o axioma da negação de quantificadores, obtemos

$$\begin{aligned} \sim [(\forall x)(x \in A \iff x \in B)] &\iff (\exists x) \sim [(x \in A \iff x \in B)] \\ &\iff (\exists x)[(x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in B \wedge x \notin A)]. \end{aligned}$$

Logo podemos escrever

$$A \neq B \iff [(\exists x)(x \in A \wedge x \notin B)] \vee [(\exists y)(y \in B \wedge y \notin A)] \quad (2.1.2)$$

**Exemplo:**

1.  $\{a, b, c\} = \{b, c, a\} = \{a, a, b, b, b, c\}$
2.  $\{x \in \mathbb{R}; |x| = 1\} = \{1, -1\}$
3.  $\{|1|\} \neq \{1, -1\}$

### 2.1.1 Propriedades da igualdade

As seguintes propriedades a respeito da igualdade de conjuntos são válidas:

1. Reflexiva:  $(\forall A)(A = A)$

**Dem.:** Como  $(\forall x)(x \in A \Leftrightarrow x \in A)$ , então  $A = A$ .

2. Simétrica:  $(\forall A, B)(A = B \Rightarrow B = A)$

**Dem.:**  $A = B \Rightarrow (\forall x)(x \in A \Leftrightarrow x \in B)$ . Pela comutatividade do bicondicional temos  $(\forall x)(x \in B \Leftrightarrow x \in A) \Rightarrow B = A$

3. Transitiva:  $(\forall A, B, C)(A = B \text{ e } B = C \Rightarrow A = C)$

**Dem.:**  $A = B \text{ e } B = C \Rightarrow (\forall x)(x \in A \Leftrightarrow x \in B) \text{ e } (\forall x)(x \in B \Leftrightarrow x \in C)$ . Pela transitividade do bicondicional temos  $(\forall x)(x \in A \Leftrightarrow x \in C) \Rightarrow A = C$ .

## 2.2 Relação de inclusão

**Definição 2.2.** Dizemos que um conjunto  $A$  está contido em um conjunto  $B$  se e somente se qualquer elemento de  $A$  também é um elemento de  $B$ .

Usamos notação  $A \subset B$  para indicar que  $A$  está contido em  $B$ . Simbolicamente

$$A \subset B \iff (\forall x)(x \in A \Rightarrow x \in B) \quad (2.2.1)$$

Também é muito comum ler a expressão  $A \subset B$  como “ $A$  é um subconjunto de  $B$ ”, o que pode ser mais enfático em algumas situações. Outra possibilidade é dizer que  $B$  contém  $A$ , neste caso usa-se a notação  $B \supset A$ . Existe ainda a expressão “ $B$  é superconjunto de  $A$  para indicar que  $A \subset B$ , apesar de ser raramente usada. Falaremos de subconjuntos com mais cuidado no próximo capítulo

A negação de  $A \subset B$  é indicada pela notação  $A \not\subset B$ , que se lê: “ $A$  não está contido em  $B$ ” ou “ $A$  não é subconjunto de  $B$ ”. Neste caso, existe pelo menos um elemento em  $A$  que não está em  $B$ . Simbolicamente:

$$A \not\subset B \iff (\exists x)(x \in A \text{ e } x \notin B) \quad (2.2.2)$$

Com o mesmo significado de  $A \not\subset B$  escrevemos  $A \not\supset B$ , que se lê: “ $B$  não contém  $A$ ”.

**Exemplo:**

1.  $\{a, b\} \subset \{c, a, b\}$ ;
2.  $P = \{2, 4, 6, \dots\} \subset \mathbb{N}$ ;
3. As seguintes inclusões são válidas:  $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$  e  $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ . Neste caso podemos escrever  $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ .

**Importante:** Para demonstrar uma inclusão do tipo  $A \subset B$ , devemos tomar um elemento qualquer  $x \in A$  e provar que  $x$  também pertence a  $B$ . Dessa forma ficará provado que qualquer elemento de  $A$  também é elemento de  $B$ , que é a definição de  $A \subset B$ .

Por exemplo, vamos demonstrar que  $\mathbb{Z}_+^* \subset \mathbb{Z}^*$ . Com efeito,

$$x \in \mathbb{Z}_+^* \implies x \in \mathbb{Z} \text{ e } x > 0 \implies x \in \mathbb{Z} \text{ e } x \neq 0 \implies x \in \mathbb{Z}^*.$$

Portanto, para todo  $x$ , se  $x \in \mathbb{Z}_+^*$  então  $x \in \mathbb{Z}^*$ , isto é,  $\mathbb{Z}_+^* \subset \mathbb{Z}^*$ .

Na prova acima a primeira e a última implicações ( $\implies$ ) poderiam ser substituídas por equivalências ( $\iff$ ), pois essa é a definição desses conjuntos, apenas a segunda implicação não admite essa substituição. Mas levando em conta o que precisa ser demonstrado, as implicações são suficientes.

### 2.2.1 Propriedades da inclusão

As seguintes propriedades a respeito da inclusão de conjuntos são válidas:

1. Reflexiva:  $(\forall A)(A \subset A)$

**Dem.:** Como  $(\forall x)(x \in A \Rightarrow x \in A)$ , então  $A \subset A$ .

2. Transitiva:  $(\forall A, B, C)(A \subset B \text{ e } B \subset C \Rightarrow A \subset C)$

**Dem.:**  $A \subset B$  e  $B \subset C \Rightarrow (\forall x)(x \in A \Rightarrow x \in B)$  e  $(\forall x)(x \in B \Rightarrow x \in C)$ .

Pela transitividade do bicondicional temos  $(\forall x)(x \in A \Rightarrow x \in C) \Rightarrow A \subset C$ .

3. Antissimétrica:  $(\forall A, B)(A \subset B \text{ e } B \subset A \Rightarrow A = B)$

**Dem.:** Como  $A \subset B$  e  $B \subset A$ , então  $(\forall x)(x \in A \Rightarrow x \in B)$ , e  $(\forall x)(x \in B \Rightarrow x \in A)$ . Como vale a implicação nas duas direções, isso é equivalente a dizer que  $(\forall x)(x \in B \iff x \in A)$ , ou seja, que  $A = B$ .

Observe que a recíproca é óbvia, ou seja,  $A = B \Rightarrow A \subset B$  e  $B \subset A$ .

4. O conjunto vazio está contido em qualquer conjunto, ou seja,  $(\forall A)(\emptyset \subset A)$

**Dem.:** Suponha, por absurdo, que exista um conjunto  $A$  tal que  $\emptyset \not\subset A$ . Isso significa que existe pelo menos um elemento  $x$  tal que  $x \in \emptyset$  e  $x \notin A$ . O que leva a uma contradição, pois o conjunto vazio não possui elementos. Logo a proposição  $(\exists A)(\emptyset \not\subset A)$  é falsa, consequentemente a proposição  $(\forall A)(\emptyset \subset A)$  é verdadeira.

**Observação:** A propriedade antissimétrica da inclusão fornece um método eficiente para demonstrar da igualdade de dois conjuntos, denominado método da dupla inclusão. Para demonstrar que um conjunto  $A = B$  basta provar  $A \subset B$  e que  $B \subset A$ .

**Muito cuidado:** Devemos prestar muita atenção ao uso correto dos símbolos de pertinência “ $\in$ ” e de inclusão “ $\subset$ ”. A pertinência é uma relação entre ‘elemento e conjunto’ e a inclusão é uma relação entre conjuntos.

**Exemplo:**

1.  $\{a\} \subset \{c, a, b\}$  e  $a \in \{c, a, b\}$  são afirmações verdadeiras;
2.  $\{a\} \in \{c, a, b\}$  e  $a \subset \{c, a, b\}$  são afirmações falsas;
3. O correto é  $\emptyset \subset \mathbb{N}$ , enquanto que a proposição  $\emptyset \in \mathbb{N}$  é claramente falsa;
4. Em um exemplo bem artificial, tomando  $A = \{1, \{1\}, \{2\}, 3\}$ , temos:

$$\begin{aligned} 1 \in A, \quad \{1\} \in A, \quad \{1\} \subset A, \quad \{\{1\}\} \subset A, \\ 2 \notin A, \quad \{2\} \in A, \quad \{2\} \not\subset A, \quad \{\{2\}\} \subset A, \\ 3 \in A, \quad \{3\} \notin A, \quad \{3\} \subset A, \quad \{\{3\}\} \not\subset A. \end{aligned}$$

Analise cada uma das linhas da tabela acima com bastante cuidado, para certificar-se que não pairam dúvidas a respeito do uso correto desses símbolos.

## 2.3 Conjuntos comparáveis

**Definição 2.3.** *Dados dois conjuntos  $A$  e  $B$  arbitrários, diremos que  $A$  e  $B$  são comparáveis quando  $A \subset B$  ou  $B \subset A$ , ou seja, dois conjuntos são comparáveis quando um deles está contido no outro.*

Portanto,  $A$  e  $B$  não são comparáveis se  $A \not\subset B$  e  $B \not\subset A$ . Neste caso,  $A$  contém pelo menos um elemento que não pertence a  $B$ , e também  $B$  contém pelo menos um elemento que não pertence a  $A$ .

**Exemplo:**

1. Os conjuntos  $\{a, b\}$  e  $\{a, c, b\}$  são comparáveis, pois  $\{a, b\} \subset \{a, c, b\}$ ;
2. Os conjuntos  $A = \{1, 2\}$  e  $B = \{2, 3\}$  não são comparáveis, pois  $1 \in A$  e  $1 \notin B$  o que garante que  $A \not\subset B$ , enquanto que o fato de  $3 \in B$  e  $3 \notin A$  garante que  $B \not\subset A$ .
3. O conjunto dos números racionais  $\mathbb{Q}$  e o conjuntos dos números irracionais não são comparáveis.

## 2.4 Subconjuntos

**Definição 2.4.** *Diremos que  $A$  é subconjunto (ou parte) de  $B$  quando  $A \subset B$ .*

Note que, para qualquer conjunto  $B$  temos  $B \subset B$  e  $\emptyset \subset B$ , logo esses conjuntos são chamados de subconjuntos triviais ou partes impróprias. No caso particular em que

$$A \subset B, \quad A \neq \emptyset \quad \text{e} \quad A \neq B$$

dizemos que  $A$  um é subconjunto próprio de  $B$  ou que é uma parte própria de  $B$ .

Obviamente, se  $A$  é subconjunto próprio de  $B$ , então: todo elemento de  $A$  é elemento de  $B$  e existe pelo menos um elemento de  $B$  que não pertence a  $A$ .

**Exemplo:**

1. O conjunto  $A = \{1, 2\}$  é um subconjunto próprio de  $B = \{1, 2, 3\}$ .
2. Os conjunto  $A = \{n \in \mathbb{N}; n \text{ é par} \}$  é um subconjunto próprio de  $\mathbb{N}$ .

**Observação:** Vários autores fazem us de notações como  $\subseteq$ ,  $\subsetneq$  e outras variações. O significado preciso dessas notações é o seguinte:

$$A \subsetneq B \iff A \subset B \text{ e } A \neq B \quad (A \text{ é subconjunto próprio de } B)$$

$$A \subseteq B \iff A \subset B \text{ ou } A = B \quad (A \text{ é subcojuntto de } B, \text{ podendo ocorrer a igualdade})$$



### 2.4.1 Subconjuntos de um conjunto finito

Seja  $B$  um conjunto finito com  $n$  elementos. Se  $A \subset B$  então  $A$  é finito e possui no máximo  $n$  elementos. Esse é uma proposição da teoria de conjuntos, logo precisaria de uma demonstração. Entretanto vamos omiti-la, pois está fora dos nossos objetivos nesse curso. Vamos admitir esse resultado como sendo verdadeiro e seguir adiante.

O objetivo nessa seção é encontrar todos os subconjuntos de um conjunto finito. Começaremos essa busca pelo conjunto vazio.

1. O conjunto vazio tem um único subconjunto: o próprio vazio.
2. Um conjunto unitário  $A = \{a\}$  possui dois subconjuntos:  $\emptyset$  e  $A$ .
3. Um conjunto com dois elementos  $A = \{a, b\}$  possui quatro subconjuntos:  $\emptyset, \{a\}, \{b\}, A$ .
4. Ao analisar um conjunto com três ou mais elementos, precisamos tomar um pouco mais de cuidado. A dica é enumerar todos os subconjuntos com um número fixo de elementos e ir aumentando esse número, da seguinte forma.

Se  $A = \{a, b, c\}$  possui três elementos, então  $A$  contém:

- (a) um subconjunto com zero elementos:  $\emptyset$
  - (b) três subconjuntos com um elemento:  $\{a\}, \{b\}$  e  $\{c\}$
  - (c) três subconjuntos com dois elementos:  $\{a, b\}, \{a, c\}$  e  $\{b, c\}$
  - (d) um subconjunto com três elementos:  $\{a, b, c\}$
5. A ideia usada no item anterior pode ser extrapolada para um conjunto com  $n$  elementos. O primeiro passo é recordar que a combinação

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

fornece exatamente o número de subconjuntos distintos de  $A$  com  $p$  elementos.

Se  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  possui  $n$  elementos, então  $A$  contém:

- (a)  $\binom{n}{0} = 1$  subconjunto com zero elementos:  $\emptyset$
- (b)  $\binom{n}{1} = n$  subconjuntos com um elemento:  $\{a_1\}, \{a_2\} \dots \{a_n\}$
- (c)  $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$  subconjuntos com dois elementos:  $\{a_1, a_2\}, \{a_1, a_3\} \dots \{a_{n-1}, a_n\}$ .
- $\vdots$
- (d)  $\binom{n}{n} = 1$  subconjunto com  $n$  elementos:  $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$

**Teorema 2.1.** *Todo conjunto finito com  $n$  elementos tem  $2^n$  subconjuntos distintos.*

**Dem.:** Seguindo a notação do item 5. acima, notamos que o número de subconjuntos é

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n} = (1+1)^n = 2^n$$

Nessa prova usamos o binômio de Newton  $(x+y)^n = \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} x^p y^{n-p}$ , com  $x = y = 1$ .  $\square$

**Observação:** O “quadrado”  $\square$  que usamos no final da demonstração acima serve apenas para avisar o leitor que “essa demonstração encerra-se aqui”.

Essa notação é especialmente útil em textos matemáticos longos, pois permite que o leitor “pule” uma demonstração e faça uma primeira leitura do texto sem entrar em detalhes técnicos de algumas demonstrações, que podem ser bastante extensas e desviar a atenção do leitor do objetivo final do texto.

Em vez de quadradinho aberto, como foi usado acima, alguns autores preferem usar retângulos ou quadradinhos pretos ■ ou ainda a abreviatura “CQD”, cujo significado é “conforme queríamos demonstrar”.

## 2.5 Conjunto das partes

**Definição 2.5.** *Dado um conjunto  $E$ , o conjunto das partes de  $E$  é o conjunto cujos elementos são todos os subconjuntos de  $E$ .*

O conjunto das partes de  $E$  será denotado  $\mathcal{P}(E)$ , assim:

$$\mathcal{P}(E) = \{A; A \subset E\}$$

Na prática, devemos ter em mente as seguintes relações:

- $A \subset E \iff A \in \mathcal{P}(E)$
- $b \in E \iff \{b\} \subset E \iff \{b\} \in \mathcal{P}(E)$

Note que:

1.  $(\forall E)(\emptyset \in \mathcal{P}(E) \text{ e } E \in \mathcal{P}(E))$ ;
2. Se  $E = \{a, b\}$  então  $\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, E\}$ ;
3. Se  $E = \{a, b, c\}$  então  $\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, E\}$
4. Se  $n(E) = k$  então  $n(\mathcal{P}(E)) = 2^k$ ;

**Teorema 2.2.** *Sejam  $E$  e  $F$  dois conjuntos quaisquer, então:*

$$E \subset F \iff \mathcal{P}(E) \subset \mathcal{P}(F).$$

**Importante:** Para demonstrar a equivalência enunciada no teorema acima, devemos provar duas implicações:

1.  $E \subset F \implies \mathcal{P}(E) \subset \mathcal{P}(F)$ .
2.  $E \subset F \longleftarrow \mathcal{P}(E) \subset \mathcal{P}(F)$ .

Cada uma dessas implicações devem ser entendidas da seguinte forma:

1. Sabendo que  $E \subset F$ , mostre  $\mathcal{P}(E) \subset \mathcal{P}(F)$ .
2. Sabendo que  $\mathcal{P}(E) \subset \mathcal{P}(F)$ , mostre que  $E \subset F$ .

Em Matemática, aquilo que já sabemos é chamado de “Hipótese”, e o que queremos provar é chamado de “Tese”.

Na primeira implicação acima temos:

**Hipótese:**  $E \subset F$

**Tese:**  $\mathcal{P}(E) \subset \mathcal{P}(F)$ .

Note que: Para provar que  $\mathcal{P}(E) \subset \mathcal{P}(F)$ , devemos mostrar que todo elemento de  $\mathcal{P}(E)$  está em  $\mathcal{P}(F)$ . Para isso basta tomar um elemento genérico  $A \in \mathcal{P}(E)$  e mostrar que  $A \in \mathcal{P}(F)$ .

Mas se  $A \in \mathcal{P}(E)$  então  $A \subset E$ . Como  $E \subset F$ , por hipótese, e a inclusão é transitiva então  $A \subset F$  e portanto  $A \in \mathcal{P}(F)$ , o que conclui a prova da primeira implicação.

Todos os elementos da prova acima podem ser condensados em uma prova que usa apenas símbolos, da seguinte forma:

$$A \in \mathcal{P}(E) \implies A \subset E \xrightarrow{E \subset F} A \subset F \implies A \in \mathcal{P}(F).$$

Agora, em relação a segunda implicação, temos:

**Hipótese:**  $\mathcal{P}(E) \subset \mathcal{P}(F)$ .

**Tese:**  $E \subset F$

Aqui a prova é mais direta. Note que precisamos mostrar apenas que  $E \subset F$ . Como  $E \in \mathcal{P}(E)$  e  $\mathcal{P}(E) \subset \mathcal{P}(F)$  então  $E \in \mathcal{P}(F)$ , o que significa que  $E \subset F$ .

Limpendo todos os comentários acima a respeito de como demonstrar um teorema que envolve uma equivalência, a demonstração final poderia ser assim.

**Dem. (Teorema 2.2):**

( $\implies$ ) Se  $A \in \mathcal{P}(E)$  então  $A \subset E$ . Como  $E \subset F$  então  $A \subset F$ , ou seja,  $A \in \mathcal{P}(F)$ . Isso mostra que  $\mathcal{P}(E) \subset \mathcal{P}(F)$ .

( $\impliedby$ ) Como  $E \in \mathcal{P}(E)$  e, por hipótese,  $\mathcal{P}(E) \subset \mathcal{P}(F)$ , então  $E \in \mathcal{P}(F) \Rightarrow E \subset F$ .  $\square$

## 2.6 Complementar de um subconjunto

**Definição 2.6.** *Seja  $A$  um subconjunto de  $E$  ( $A \subset E$ ). O complementar (ou complemento) de  $A$  em relação a  $E$  é o conjunto  $\mathcal{C}_E A$  de todos os elementos de  $E$  que não pertencem a  $A$ .*

Simbolicamente:

$$\mathcal{C}_E A = \{x \in E; x \notin A\}$$

Em um universo  $\mathcal{U}$ , podemos falar simplesmente em complementar de um conjunto  $A$ , ficando subentendido que se trata do complementar em relação a esse universo  $\mathcal{U}$ . Neste caso a notação usual é  $A'$  ou  $A^c$ .

$$A^c = \mathcal{C}_{\mathcal{U}} A = \{x; x \notin A\}$$

**Exemplo:** Considere os conjuntos:  $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ,  $A = \{2, 4, 6\}$  e  $B = \{1, 2, 3\}$  então

$$\mathcal{C}_E A = \{1, 3, 5\}, \quad \mathcal{C}_E B = \{4, 5, 6\} \quad \text{e} \quad \mathcal{C}_{\mathbb{N}} E = \{n \in \mathbb{N}; n \geq 7\}.$$

### 2.6.1 Propriedades do complementar

Sejam  $A$  e  $B$  subconjuntos de  $E$ , então:

$$P_1. \mathbb{C}_E \emptyset = E$$

De fato,  $\mathbb{C}_E \emptyset = \{x; x \in E \text{ e } x \notin \emptyset\} = \{x; x \in E\} = E$ .

$$P_2. \mathbb{C}_E E = \emptyset$$

De fato,  $\mathbb{C}_E E = \{x; x \in E \text{ e } x \notin E\} = \emptyset$ .

$$P_3. \mathbb{C}_E(\mathbb{C}_E A) = A$$

De fato,  $\mathbb{C}_E(\mathbb{C}_E A) = \{x; x \in E \text{ e } x \notin (\mathbb{C}_E A)\} = \{x; x \in E \text{ e } x \in A\} = A$ .

$$P_4. A \subset B \iff \mathbb{C}_E A \supset \mathbb{C}_E B$$

( $\Rightarrow$ ) Suponha que  $A \subset B$ , queremos provar que  $\mathbb{C}_E B \subset \mathbb{C}_E A$ .

$x \in \mathbb{C}_E B \Rightarrow x \in E \text{ e } x \notin B \Rightarrow x \in E \text{ e } x \notin A \Rightarrow x \in \mathbb{C}_E A$ .

**Observação:** Em um universo  $\mathcal{U}$  temos:

$$\emptyset^c = \mathcal{U}, \quad \mathcal{U}^c = \emptyset, \quad (A^c)^c = A \quad \text{e} \quad A \subset B \iff A^c \supset B^c.$$

## Capítulo 3

# Operações com conjuntos

### 3.1 Diagramas de Venn

Para ilustrar definições, resultados e demonstrações da teoria de conjuntos, é muito comum usar uma representação gráfica por curvas fechadas simples, tais como círculos, ovais ou curvas poligonais fechadas. Tal representação recebe o nome de diagrama de Venn.

Num diagrama de Venn, os elementos do conjunto são indicados por pontos internos a região delimitada por essas curvas e os elementos que não pertencem ao conjunto são representados por pontos externos a essa região, como no exemplo abaixo.

**Exemplo:** Um diagrama de Venn para os conjuntos  $A = \{a, b, c\}$ ,  $B = \{c, d\}$  e  $C = \{a, b, c, d, e, f\}$ .

Neste modelo de visualização nenhum elemento pode ser representado por pontos exatamente em cima da curva fechada que delimita a região (na fronteira).

Em um diagrama de Venn, é comum representar o conjunto universo  $\mathcal{U}$  por um retângulo e os demais conjuntos por círculos contidos nesse retângulo. Por exemplo, em relação ao universo dos naturais podemos representar os conjuntos  $A = \{1, 2, 3\}$  e  $B = \{2, 4, 6, \dots\}$ .

**Observação:** A única coisa realmente importante em um diagrama de Venn é a visualização do problema que essa ferramenta propicia. Argumentos ou raciocínios baseados em diagramas de Venn não servem como demonstração da validade de uma proposição, apesar de serem muito úteis em sua compreensão.

### 3.2 Interseção

**Definição 3.1.** Chamaremos de *interseção dos conjuntos  $A$  e  $B$*  ao conjunto formado por todos os elementos que pertencem simultaneamente a  $A$  e a  $B$ .

Esse conjunto é denotado  $A \cap B$ , que se lê: *A interseção B* ou, *A inter B*.

Simbolicamente, temos:

$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ e } x \in B\}.$$

Nas demonstrações envolvendo interseção de conjuntos usaremos sempre a seguinte caracterização de seu elementos:

$$x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \text{ e } x \in B.$$

**Exemplo:**

1. Para  $A = \{1, 2, 3, 4\}$  e  $B = \{1, 3, 5, 7\}$  temos  $A \cap B = \{1, 3\}$ ;
2. Considere  $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ ,  $B = \{2, 4, 6, 8\}$ ,  $C = \{1, 2, 3, 4\}$  e  $D = \{2, 4\}$  então
  - (a)  $A \cap B = \emptyset$
  - (b)  $A \cap C = \{1, 3\}$
  - (c)  $B \cap C = D$
  - (d)  $B \cap D = D$
3.  $[0, 3) \cap (1, 5] = (1, 3)$ ,  $[-1, 0] \cap [0, 1] = \{0\}$  e  $[-1, 0) \cap [0, 1] = \emptyset$ .
4. Se  $P = \{2, 4, 6, \dots\} = \{n \in \mathbb{N}; n \text{ é par}\}$  e  $B = \{3, 6, 9, 12, \dots\} = \{n \in \mathbb{N}; n \text{ é múltiplo de } 3\}$  teremos

$$A \cap B = \{6, 12, 18, \dots\} = \{n \in \mathbb{N}; n \text{ é par e múltiplo de } 3\}.$$

5. Sejam  $r$  e  $s$  duas retas contidas um mesmo plano  $\alpha$ . Então três situações distintas podem ocorrer
  - (a)  $r \cap s = \emptyset$  ( $r$  e  $s$  são retas paralelas)
  - (b)  $r \cap s = r$  ( $r$  e  $s$  são retas coincidentes)
  - (c)  $r \cap s = \{P\}$  ( $r$  e  $s$  se intersectam no ponto  $P$ )

Note que é errado escrever  $r \cap s = P$ , pois a interseção de dois conjuntos é um novo conjunto, no caso (c) acima,  $r \cap s$  é um conjunto unitário formado apenas pelo ponto  $P$ .

6. Seja  $\mathcal{R}$  o conjunto dos retângulos,  $\mathcal{L}$  o conjunto dos losangos e  $\mathcal{Q}$  o conjunto dos quadrados da geometria euclidiana. Neste caso

$$\mathcal{Q} = \mathcal{R} \cap \mathcal{L},$$

o que significa dizer que os quadrados são os retângulos e também são losangos.

**Definição 3.2.** Dizemos que dois conjuntos são disjuntos quando não possuem elementos em comum, ou seja,  $A$  e  $B$  são disjuntos quando  $A \cap B = \emptyset$ .

**Exemplo:**

1. Os conjuntos  $A = \{1, 2, 3\}$  e  $B = \{-1, -2, -3\}$  são claramente disjuntos.
2. O conjunto  $\mathcal{P}$  dos triângulos retângulos e o conjunto  $\mathcal{Q}$  dos triângulos equiláteros são disjuntos, pois nenhum triângulo pode ser ao mesmo tempo retângulo e equilátero.

### 3.2.1 Teoremas relacionando inclusões e interseções

**Teorema 3.1.** Sejam  $A$  e  $B$  dois conjuntos quaisquer, então  $A \cap B \subset A$  e  $A \cap B \subset B$ .

**Dem.:** Para provar que  $A \cap B \subset A$  devemos mostrar que qualquer elemento do conjunto  $A \cap B$  também está em  $A$ , o que segue diretamente da definição. Simbolicamente podemos usar a lei da simplificação da lógica e escrever assim:

“Seja  $x \in A \cap B$  um elemento qualquer então

$$x \in A \cap B \Rightarrow x \in A \wedge x \in B \Rightarrow x \in A.$$

Como a prova acima vale para qualquer  $x \in A \cap B$ , segue que  $A \cap B \subset A$ ”.

A prova da segunda inclusão enunciada fica como exercício. □

**Teorema 3.2.** *Sejam  $A$  e  $B$  dois conjuntos quaisquer, então  $A \subset B \Leftrightarrow A \cap B = A$*

**Dem.:** Vamos dividir a demonstração em duas partes. Ida( $\Rightarrow$ ) e volta ( $\Leftarrow$ ).

( $\Rightarrow$ ) Sabendo que  $A \subset B$ , queremos provar que  $A \cap B = A$ . Pelo item acima já sabemos que  $A \cap B \subset A$  logo, para termos a igualdade, só precisamos mostrar que  $A \cap B \supset A$ .

Seja  $x \in A$ , como  $A \subset B$  então  $x \in A$  e  $x \in B$ , ou seja,  $x \in A \cap B$ . Como  $x$  é um elemento qualquer de  $A$ , mostramos que qualquer elemento de  $A$  está em  $A \cap B$ , logo,  $A \cap B \supset A$ .

( $\Leftarrow$ ) Sabendo que  $A \cap B = A$ , queremos provar que  $A \subset B$ . Mas, por hipótese,  $A = A \cap B$  e, pelo item 1 acima,  $A \cap B \subset B$ , logo  $A \subset B$ . O que conclui a prova do teorema.  $\square$

**Teorema 3.3.** *Sejam  $A, B$  e  $X$  conjuntos quaisquer. Então  $X \subset A$  e  $X \subset B \Leftrightarrow X \subset A \cap B$ .*

**Dem.:** Também dividiremos essa demonstração em duas partes. Ida( $\Rightarrow$ ) e volta ( $\Leftarrow$ ). Mas em vez de falar

( $\Rightarrow$ ) Suponha que  $X \subset A$  e  $X \subset B$ , e vamos provar que  $X \subset A \cap B$ .

Seja  $x \in X$  um elemento qualquer, como  $X \subset A$  e  $X \subset B$  então  $x \in A$  e  $x \in B$ , ou seja,  $x \in A \cap B$ . Mostramos assim que qualquer elemento de  $X$  está em  $A \cap B$ , ou seja,  $X \subset A \cap B$ .

( $\Leftarrow$ ) Suponha agora que  $X \subset A \cap B$ . Mas  $A \cap B \subset A$  e  $A \cap B \subset B$ , pelo teorema 3.1, logo  $X \subset A$  e  $X \subset B$ .  $\square$

**Teorema 3.4.** *Sejam  $A, B$  e  $X$  conjuntos quaisquer. Se  $A \subset B$  então  $X \cap A \subset X \cap B$ .*

**Dem.:** Sabemos que  $A \subset B$ , e queremos provar que  $X \cap A \subset X \cap B$ . Para isso começamos tomando um  $x \in X \cap A$  qualquer teremos

$$x \in X \cap A \Rightarrow x \in X \text{ e } x \in A \xrightarrow{A \subset B} x \in X \text{ e } x \in B \Rightarrow x \in X \cap B.$$

Como  $x$  acima foi escolhido arbitrariamente, segue que todo elemento de  $X \cap A$  está em  $X \cap B$ , ou seja  $X \cap A \subset X \cap B$ .  $\square$

### 3.2.2 Propriedades da interseção

Sejam  $A, B$  e  $C$  conjuntos quaisquer em um universo  $\mathcal{U}$ .

$P_1.$   $A \cap \emptyset = \emptyset$ ; [todo conjunto é disjunto do vazio]

De fato, como  $\emptyset \subset A$ , pelo teorema 3.2 temos  $A \cap \emptyset = \emptyset$ .

$P_2.$   $A \cap \mathcal{U} = A$ ; [elemento neutro]

Com efeito, como  $A \subset \mathcal{U}$ , pelo teorema 3.2 temos  $A \cap \mathcal{U} = A$ .

$P_3.$   $A \cap A^c = \emptyset$ ; [todo conjunto é disjunto de seu complementar]

Basta observar que  $A \cap A^c = \{x; x \in A \text{ e } x \in A^c\} = \{x; x \in A \text{ e } x \notin A\} = \emptyset$ .

$P_4.$   $A \cap A = A$ ; [idempotência]

Mais uma vez, como  $A \subset A$ , pelo teorema 3.2 temos  $A \cap A = A$ .

$P_5.$   $A \cap B = B \cap A$ ; [comutatividade]

Com efeito,  $A \cap B = \{x; x \in A \text{ e } x \in B\} = \{x; x \in B \text{ e } x \in A\} = B \cap A$

$P_6$ .  $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ ; [associatividade]

Com efeito,  $x \in (A \cap B) \cap C \Leftrightarrow x \in (A \cap B)$  e  $x \in C \Leftrightarrow (x \in A \text{ e } x \in B) \text{ e } x \in C$   
 $\Leftrightarrow x \in A \text{ e } (x \in B \text{ e } x \in C) \Leftrightarrow x \in A \text{ e } x \in (B \cap C) \Leftrightarrow x \in A \cap (B \cap C)$ .

**Observação:** A interseção é uma propriedade binária (transforma dois conjuntos em um terceiro conjunto). A associatividade garante que as duas formas de colocar os parênteses na expressão  $A \cap B \cap C$  para efetuar essas operações binárias conduzem ao mesmo resultado. Por este motivo podemos indicar o conjunto  $(A \cap B) \cap C$  ou  $A \cap (B \cap C)$  simplesmente por  $A \cap B \cap C$ , sem perigo de confusão.

### 3.2.3 Interseção de vários conjuntos

A noção de interseção, definida acima para dois conjuntos, pode ser estendida de maneira natural para qualquer número finito  $n$  de conjuntos,  $n > 2$ .

**Definição 3.3.** A interseção dos conjuntos  $A_1, A_2, \dots, A_n$  é o conjunto dos elementos que pertencem simultaneamente a todos esses  $n$  conjuntos. Neste caso usamos as notações

$$A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n \quad \text{ou} \quad \bigcap_{j=1}^n A_j$$

Dessa forma

$$\bigcap_{j=1}^n A_j = \{x; x \in A_1 \text{ e } x \in A_2 \text{ e } \dots x \in A_n\},$$

ou ainda

$$\bigcap_{j=1}^n A_j = \left\{x; \forall j \in \{1, 2, \dots, n\} \ x \in A_j\right\}.$$

E teremos

$$x \in \bigcap_{j=1}^n A_j \Leftrightarrow \forall j \in \{1, 2, \dots, n\} \ x \in A_j.$$

**Exemplo:**

1. Se  $A_1 = [0, 1]$ ,  $A_2 = [0, 2]$ ,  $A_3 = [0, 3]$ ,  $\dots$ ,  $A_n = [0, n]$ . Então

$$\bigcap_{j=1}^n A_j = [0, 1]$$

2. Se  $A_1 = [1, +\infty)$ ,  $A_2 = [2, +\infty)$ ,  $A_3 = [3, +\infty)$ ,  $\dots$ ,  $A_n = [n, +\infty)$ . Então

$$\bigcap_{j=1}^n A_j = [n, +\infty)$$

3. Considere os conjuntos

$$A_3 = \{3, 6, 9, \dots\} = \{n \in \mathbb{N}; n \text{ é múltiplo de } 3\};$$

$$A_4 = \{4, 8, 12, \dots\} = \{n \in \mathbb{N}; n \text{ é múltiplo de } 4\},$$



$$A_5 = \{5, 10, 15, \dots\} = \{n \in \mathbb{N}; n \text{ é múltiplo de } 5\},$$

então  $n \in (A_3 \cap A_4 \cap A_5)$  se, e somente se,  $n$  é múltiplo de 3, 4 e 5 simultaneamente, ou seja, se  $n$  é múltiplo de  $3 \times 4 \times 5 = 60$ , logo

$$\bigcap_{j=3}^5 A_j = \{60, 120, 180, 240, \dots\}$$

### 3.3 Reunião

**Definição 3.4.** Chamaremos de reunião (ou união) dos conjuntos  $A$  e  $B$  ao conjunto formado por todos os elementos que pertencem ao conjunto  $A$  ou ao conjunto  $B$ .

Esse conjunto é denotado  $A \cup B$ , que se lê: “ $A$  reunião  $B$ ” ou “ $A$  união  $B$ ”. Logo

$$A \cup B = \{x; x \in A \text{ ou } x \in B\}.$$

Nas demonstrações envolvendo reunião de conjuntos usaremos sempre a seguinte caracterização de seu elementos:

$$x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \text{ ou } x \in B.$$

**Exemplo:**

1. Para  $A = \{1, 2, 3, 4\}$  e  $B = \{1, 3, 5, 7\}$  temos  $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 7\}$ ;
2. Considere  $A = \{1, 3, 5\}$ ,  $B = \{2, 4\}$ ,  $C = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  e  $D = \{4, 6\}$  então
  - (a)  $A \cup B = C$
  - (b)  $A \cup C = C$
  - (c)  $B \cup D = \{2, 4, 6\}$
3.  $[0, 2) \cup (1, 4] = [0, 4]$ ,  $(-\infty, 0] \cup [0, +\infty) = \mathbb{R}$ , e  $\mathbb{N} \cup \{-n; n \in \mathbb{N}\} = \mathbb{Z}$ .
4. Se  $A = \{2, 4, 6, 8, \dots\}$  e  $B = \{3, 6, 9, 12, \dots\}$  teremos

$$A \cup B = \{2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 12, \dots\} = \{n \in \mathbb{N}; n \text{ é múltiplo de } 2 \text{ ou de } 3\}.$$

**Observação:** Nos teoremas abaixo não especificamos quem são os conjuntos  $A$ ,  $B$  e  $X$ . Sempre que isso ocorrer, deve-se entender que o autor não está impondo nenhuma restrição adicional aos objetos que estão sendo estudados.

**Teorema 3.5.**  $A \subset A \cup B$  e  $B \subset A \cup B$ .

**Dem.:** Seja  $x \in A$  um elemento qualquer então pela lei da adição da lógica

$$x \in A \Rightarrow x \in A \text{ ou } x \in B \Rightarrow x \in A \cup B.$$

Como as implicações acima valem para qualquer  $x \in A$ , segue que  $A \subset A \cup B$ . A prova da segunda inclusão enunciada fica como exercício.  $\square$

**Teorema 3.6.**  $A \subset B \Leftrightarrow A \cup B = B$

**Dem.:** ( $\Rightarrow$ ) Sabendo que  $A \subset B$ , queremos provar que  $A \cup B = B$ . Pelo teorema anterior sabemos que  $B \subset A \cup B$  logo, para termos a igualdade, só precisamos mostrar que  $B \supset A \cup B$ . Como  $A \subset B$ , se  $x \in A$  então  $x \in B$ . Logo valem as implicações

$$x \in A \cup B \Rightarrow x \in A \text{ ou } x \in B \Rightarrow x \in B \text{ ou } x \in B \Rightarrow x \in B.$$

Como  $x$  é um elemento qualquer de  $A \cup B$ , mostramos que qualquer elemento de  $A \cup B$  está em  $B$ , ou seja,  $A \cup B \subset B$ .

( $\Leftarrow$ ) Sabendo que  $A \cup B = B$ , queremos provar que  $A \subset B$ . Como  $A \subset A \cup B$  e  $A \cup B = B$  então  $A \subset B$ . O que conclui a prova do teorema.  $\square$

**Teorema 3.7.**  $A \subset X$  e  $B \subset X \Leftrightarrow A \cup B \subset X$ .

**Dem.:** ( $\Rightarrow$ ) Seja  $x \in A \cup B$  um elemento qualquer, então  $x \in A$  ou  $x \in B$ . Como  $A \subset X$  e  $B \subset X$  então  $x \in X$ , ou seja, qualquer elemento de  $A \cup B$  está em  $X$ , e portanto  $A \cup B \subset X$ .

( $\Leftarrow$ ) Suponha agora que  $A \cup B \subset X$ . Segue do teorema ?? que  $A \subset A \cup B = X$  e  $B \subset A \cup B = X$ , o que conclui a prova.  $\square$

**Teorema 3.8.** Se  $A \subset B$  então  $A \cup X \subset B \cup X$ .

**Dem.:** Seja  $x \in A \cup X$  um elemento qualquer, então

$$x \in A \cup X \Rightarrow x \in A \text{ ou } x \in X \xrightarrow{A \subset B} x \in B \text{ ou } x \in X \Rightarrow x \in B \cup X.$$

Como  $x$  acima foi escolhido arbitrariamente, segue que  $A \cup X \subset B \cup X$ .  $\square$

### 3.3.1 Propriedades da reunião

Sejam  $A$ ,  $B$  e  $C$  conjuntos quaisquer em um universo  $\mathcal{U}$ .

$P_1$ .  $A \cup \emptyset = A$ ; [elemento neutro]

De fato, por 3.5 temos  $A \subset A \cup \emptyset$ . Por outro lado, se  $x \in A \cup \emptyset \Rightarrow x \in A$  ou  $x \in \emptyset$ , como não existem elementos no vazio então  $x \in A$  e portanto  $A \cup \emptyset \subset A$ . Como valem as duas inclusões, segue que  $A \cup \emptyset = A$ .

$P_2$ .  $A \cup \mathcal{U} = \mathcal{U}$ ;

Com efeito, como  $A \subset \mathcal{U} \Rightarrow A \cup \mathcal{U} = \mathcal{U}$ .

$P_3$ .  $A \cup A^c = \mathcal{U}$ ;

Basta observar que  $A \cup A^c = \{x; x \in A \text{ ou } x \in A^c\} = \{x; x \in A \text{ ou } x \notin A\} = \mathcal{U}$ .

$P_4$ .  $A \cup A = A$ ; [idempotência]

Como  $A \subset A$ , pelo teorema 3.6 temos  $A \cup A = A$ .

$P_5$ .  $A \cup B = B \cup A$ ; [comutatividade]

Com efeito,  $A \cup B = \{x; x \in A \text{ ou } x \in B\} = \{x; x \in B \text{ ou } x \in A\} = B \cup A$

$P_6$ .  $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ ; [associatividade]

Com efeito,  $x \in (A \cup B) \cup C \Leftrightarrow x \in (A \cup B) \text{ ou } x \in C \Leftrightarrow (x \in A \text{ ou } x \in B) \text{ ou } x \in C$   
 $\Leftrightarrow x \in A \text{ ou } (x \in B \text{ ou } x \in C) \Leftrightarrow x \in A \text{ ou } x \in (B \cup C) \Leftrightarrow x \in A \cup (B \cup C)$ .

### 3.3.2 Teoremas relacionando interseção e reunião de conjuntos

Sejam  $A, B$  e  $C$  conjuntos quaisquer em um universo  $\mathcal{U}$ .

**Teorema 3.9.**  $A \cap (A \cup B) = A$  e  $A \cup (A \cap B) = A$ .

**Dem.:** Como  $A \subset A \cup B$ , segue do teorema 3.6 que  $A \cap (A \cup B) = A$ . Analogamente, de  $A \cap B \subset A$  temos  $A \cup (A \cap B) = A$ .  $\square$

As duas identidades acima são conhecidas como “leis de absorção”, pois no lado direito das igualdades o termo  $B$  desaparece (é absorvido).

**Observação:** Na prova acima usamos o termo “analogamente” para enfatizar que os argumentos usados na prova da segunda identidade eram análogos. É muito comum o autor dizer apenas que “a prova da segunda identidade é análoga”, deixando para o leitor a obrigação de verificar que os argumentos usados são muito parecidos, apesar de poder guardarem diferenças substanciais.

A seguir provaremos a distributividade da interseção em relação a reunião e da reunião em relação a interseção.

**Teorema 3.10.**

1.  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$  e
2.  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ .

**Dem.:** A demonstração dessas propriedades usa apenas as leis distributivas da lógica. Faremos uma delas e deixaremos a outra como exercício.

$$\begin{aligned} x \in A \cap (B \cup C) &\Leftrightarrow x \in A \text{ e } x \in B \cup C \Leftrightarrow x \in A \text{ e } (x \in B \text{ ou } x \in C) \\ &\Leftrightarrow (x \in A \text{ e } x \in B) \text{ ou } (x \in A \text{ e } x \in C) \\ &\Leftrightarrow (x \in A \cap B) \text{ ou } (x \in A \cap C) \Leftrightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C) \end{aligned}$$

$\square$

O último teorema dessa subseção é conhecido como “Leis de De Morgan” que afirmam: O complementar da interseção é a reunião dos complementares; e o complementar da reunião é a interseção dos complementares.

**Teorema 3.11.**

1.  $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$  e
2.  $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ .

**Dem.:** Aqui também a demonstração consiste em aplicar as leis de De Morgan da lógica. Como no teorema anterior, faremos uma delas e deixaremos a outra como exercício.

$$\begin{aligned} x \in (A \cap B)^c &\Leftrightarrow x \notin A \cap B \Leftrightarrow \sim (x \in A \cap B) \Leftrightarrow \sim (x \in A \text{ e } x \in B) \\ &\Leftrightarrow \sim (x \in A) \text{ ou } \sim (x \in B) \Leftrightarrow x \notin A \text{ ou } x \notin B \\ &\Leftrightarrow x \in A^c \text{ ou } x \in B^c \Leftrightarrow x \in A^c \cup B^c \end{aligned}$$

$\square$

### 3.3.3 Reunião de vários conjuntos

A noção de reunião de dois conjuntos também pode ser estendida de maneira natural para qualquer número finito  $n$  de conjuntos,  $n > 2$ , como fizemos com a interseção.

**Definição 3.5.** *A reunião dos conjuntos  $A_1, A_2, \dots, A_n$  é o conjunto formado pelos elementos que pertencem a pelo menos um desses  $n$  conjuntos. Neste caso usamos as notações*

$$A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n \quad \text{ou} \quad \bigcup_{j=1}^n A_j$$

Dessa forma

$$\bigcup_{j=1}^n A_j = \{x; x \in A_1 \text{ ou } x \in A_2 \text{ ou } \dots x \in A_n\},$$

ou ainda

$$\bigcup_{j=1}^n A_j = \left\{ x; \exists j \in \{1, 2, \dots, n\} \ x \in A_j \right\}.$$

E teremos

$$x \in \bigcup_{j=1}^n A_j \Leftrightarrow \exists j \in \{1, 2, \dots, n\} \ x \in A_j.$$

**Exemplo:**

1. Se  $A_1 = [0, 1]$ ,  $A_2 = [0, 2]$ ,  $A_3 = [0, 3]$ ,  $\dots$ ,  $A_n = [0, n]$ . Então

$$\bigcup_{j=1}^n A_j = [0, n]$$

2. Se  $A_1 = [1, +\infty)$ ,  $A_2 = [2, +\infty)$ ,  $A_3 = [3, +\infty)$ ,  $\dots$ ,  $A_n = [n, +\infty)$ . Então

$$\bigcup_{j=1}^n A_j = A_1$$

### 3.3.4 Álgebra de conjuntos

As propriedades das operações de reunião, interseção e complementação, juntamente com as relações de igualdade e inclusão conjuntos, introduz uma estrutura algébrica na teoria de conjuntos chamada Álgebra dos Conjuntos.

A álgebra de conjuntos possui uma analogia muito forte com a álgebra de números usual (aritmética).

- Na aritmética a adição e a multiplicação são operações associativas e comutativas; na álgebra de conjuntos a reunião e interseção de conjuntos também gozam dessas propriedades.
- Na aritmética temos a relação “menor ou igual” que é reflexiva, anti-simétrica e transitiva; e o mesmo vale para a relação de inclusão de conjuntos.

Obviamente também existem grandes diferenças, por exemplo, dois conjuntos  $A$  e  $B$  nem sempre são comparáveis, enquanto que dois números (reais) serão sempre comparáveis, ou seja, dados  $a, b \in \mathbb{R}$  teremos  $a \leq b$  ou  $b \leq a$ .

Essa estrutura algébrica nos leva naturalmente a pensar em expressões algébricas e simplificação de expressões, que simplificam a compreensão dos conjuntos que estamos estudando. A ideia é usar todas as propriedades que provamos envolvendo reunião, interseção e complementação para obter expressões mais simples.

**Exemplo:**

1.  $A \cap (B \cap A^c) = A \cap (A^c \cap B) = (A \cap A^c) \cap B = \emptyset \cap B = \emptyset$ .
2.  $A \cup (A^c \cup \emptyset) = A \cup A^c = \mathcal{U}$ .
3.  $(A \cup B) \cap B^c = (A \cup B^c) \cup (B \cap B^c) = (A \cup B^c) \cup \emptyset = A \cup B^c$ .
4.  $(A \cup B)^c \cup (A^c \cap B) = (A^c \cap B^c) \cup (A^c \cap B) = A^c \cap (B^c \cup B) = A^c \cap \mathcal{U} = A^c$ .

### 3.4 Diferença de dois conjuntos

**Definição 3.6.** A diferença entre dois conjuntos  $A$  e  $B$  é o conjunto de todos os elementos de  $A$  que não pertencem a  $B$ .

Esse conjunto é denotado  $A - B$  ou  $A \setminus B$ , que se lê: “ $A$  menos  $B$ ” ou “diferença entre  $A$  e  $B$ ”. Assim

$$A - B = \{x; x \in A \text{ e } x \notin B\}.$$

Nas demonstrações envolvendo diferença de conjuntos usaremos sempre a caracterização:

$$x \in A - B \Leftrightarrow x \in A \text{ e } x \notin B.$$

**Observação:**

- Note que  $x \in A - B \Rightarrow x \in A$  e  $x \notin B \Rightarrow x \in A$ , ou seja,  $A - B \subset A$ .
- No caso particular em que  $B \subset A$ , temos  $A - B = \{x; x \in A \text{ e } x \notin B\} = \mathbb{C}_A B$ , isto é,

$$B \subset A \Rightarrow \mathbb{C}_A B = A - B$$

- se  $A$  e  $B$  são subconjuntos quaisquer de um mesmo conjunto  $E$ , então

$$A - B = \{x \in E; x \in A \text{ e } x \notin B\} = \{x \in E; x \in A \text{ e } x \in \mathbb{C}_E B\} = A \cap \mathbb{C}_E B.$$

Em particular, se  $E = \mathcal{U}$  temos  $A - B = A \cap B^c$ .

**Exemplo:**

1. Sejam  $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ,  $B = \{1, 3\}$ ,  $C = \{2, 4\}$  e  $D = \{3, 4\}$ . Então  
 $A - B = C$ ,  $A - C = B$ ,  $A - D = \{1, 2\}$ ,  $B - C = B$ ,  
 $B - A = \emptyset$ ,  $C - A = \emptyset$ ,  $B - D = \{1\}$ ,  $C - D = \{2\}$ .  
 Note que  $A - B \neq B - A$ , logo a diferença de conjuntos não é comutativa.
2.  $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} - \{0\}$ ,  $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$ ,  $\mathbb{R}_+ = \mathbb{R} - (-\infty, 0)$  e  $\mathbb{R}_+^* = \mathbb{R} - [0, +\infty)$ .

### 3.4.1 Propriedades da diferença

Sejam  $A$ ,  $B$  e  $C$  conjuntos quaisquer em um universo  $\mathcal{U}$ .

$$P_1. A - \emptyset = A.$$

Basta observar que  $\forall x, x \in (A - \emptyset) \Leftrightarrow x \in A$  e  $x \notin \emptyset \Leftrightarrow x \in A$ .

$$P_2. \mathcal{U} - A = A^c.$$

Observe que,  $x \in (\mathcal{U} - A) \Leftrightarrow x \in \mathcal{U}$  e  $x \notin A \Leftrightarrow x \in \mathcal{U}$  e  $x \in A^c \Leftrightarrow x \in A^c$ .

$$P_3. A - A = \emptyset.$$

Com efeito,  $x \in (A - A) \Leftrightarrow x \in A$  e  $x \notin A$ . Como não existe  $x$  que satisfaça essas duas condições simultaneamente, então  $A - A = \emptyset$ .

$$P_4. A - A^c = A.$$

Note que  $x \in A - A^c \Leftrightarrow x \in A$  e  $x \notin A^c \Leftrightarrow x \in A$  e  $x \in A \Leftrightarrow x \in A$ .

$$P_5. (A - B)^c = A^c - B.$$

Com efeito,

$$\begin{aligned} x \in (A - B)^c &\Leftrightarrow x \notin A - B \Leftrightarrow \sim (x \in A - B) \Leftrightarrow \sim (x \in A \text{ e } x \notin B) \\ &\Leftrightarrow \sim (x \in A) \text{ ou } \sim (x \notin B) \Leftrightarrow x \notin A \text{ ou } x \in B \\ &\Leftrightarrow x \in A^c \text{ ou } x \in B \Leftrightarrow x \in A^c \cup B. \end{aligned}$$

$$P_6. A - B = B^c - A^c.$$

Pois,  $x \in B^c - A^c \Leftrightarrow x \in B^c$  e  $x \notin A^c \Leftrightarrow x \notin B$  e  $x \in A \Leftrightarrow x \in A$  e  $x \notin B \Leftrightarrow x \in A - B$ .

$$P_7. (A - B) - C = A - (B \cup C).$$

De fato,

$$\begin{aligned} x \in (A - B) - C &\Leftrightarrow x \in A - B \text{ e } x \notin C \\ &\Leftrightarrow (x \in A \text{ e } x \notin B) \text{ e } x \notin C \\ &\Leftrightarrow x \in A \text{ e } (x \notin B \text{ e } x \notin C) \\ &\Leftrightarrow x \in A \text{ e } (\sim (x \in B) \text{ e } \sim (x \in C)) \\ &\Leftrightarrow x \in A \text{ e } \sim (x \in B \text{ ou } x \in C) \\ &\Leftrightarrow x \in A \text{ e } \sim (x \in B \cup C) \\ &\Leftrightarrow x \in A - (B \cup C). \end{aligned}$$

$$P_8. A - (B - C) = (A - B) \cup (A \cap C).$$

Note que,

$$\begin{aligned} x \in (A - B) \cup (A \cap C) &\Leftrightarrow x \in A - B \text{ ou } x \in A \cap C \\ &\Leftrightarrow (x \in A \text{ e } x \notin B) \text{ ou } (x \in A \text{ e } x \in C) \\ &\Leftrightarrow x \in A \text{ e } (x \notin B \text{ ou } x \in C) \\ &\Leftrightarrow x \in A \text{ e } \sim (x \in B \text{ e } x \notin C) \\ &\Leftrightarrow x \in A \text{ e } \sim (x \in B \cap C) \\ &\Leftrightarrow x \in A \text{ e } x \notin B \cap C \\ &\Leftrightarrow x \in A - (B \cap C). \end{aligned}$$

$$P_9. A \cup (B - C) = (A \cup B) - (C - A) \text{ e}$$

$$A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C).$$

$$P_{10}. A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C) \text{ e}$$

$$A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C).$$

$$P_{11}. (A \cup B) - C = (A - C) \cup (B - C) \text{ e}$$

$$(A \cap B) - C = (A - C) \cap (B - C).$$

$$P_{12}. A - (A - B) = A \cap B \text{ e}$$

$$(A - B) - B = A - B.$$

**Exercício:** Faça as demonstrações das propriedades  $P_9$  a  $P_{12}$ .

### 3.5 Diferença simétrica

**Definição 3.7.** A diferença simétrica de dois conjuntos  $A$  e  $B$  é o conjunto formado por todos os elementos que pertencem a um e somente a um dos conjuntos  $A$  e  $B$ .

Esse conjunto é denotado  $A \triangle B$ , que se lê: “diferença simétrica de  $A$  e  $B$ ”. Assim

$$A \triangle B = \{x; (x \in A \text{ e } x \notin B) \text{ ou } (x \in B \text{ e } x \notin A)\}.$$

Note que

$$x \in A \triangle B \Leftrightarrow (x \in A \text{ e } x \notin B) \text{ ou } (x \in B \text{ e } x \notin A) \Leftrightarrow x \in (A - B) \cup (B - A),$$

ou seja,

$$A \triangle B = (A - B) \cup (B - A).$$

Também é fácil ver que a diferença simétrica dos conjuntos  $A$  e  $B$  é o conjunto de todos os elementos que estão na reunião de  $A$  e  $B$  e não estão na interseção de  $A$  e  $B$ , ou seja,

$$A \triangle B = (A \cup B) - (B \cap A).$$

A diferença simétrica raramente aparece em textos matemáticos, na verdade não lembro de nenhum grande resultado da matemática que dependa desse conceito. Apesar disso é um assunto que relaciona os conceitos de reunião, interseção e diferença de conjuntos, logo vale a menção e uma lista de propriedades relacionadas abaixo que ficam com exercício para o leitor.

$$P_1. A \triangle B = B \triangle A;$$

$$P_2. (A \triangle B)^c = (A \cap B) \cup (A^c \cap B^c);$$

$$P_3. (A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C);$$

$$P_4. A \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C);$$

$$P_5. A \cup (B \triangle C) = (A \cup B \cup C) - (A^c \cap B^c \cap C^c);$$

### 3.6 Reuniões e interseções arbitrárias

As leis associativas nos permitem falar em uniões e interseções de uma quantidade finita de conjuntos conforme vimos acima.

Porém, na matemática, muitas vezes precisamos considerar uniões e interseções de coleções infinitas de conjuntos. Neste caso, precisamos voltar às idéias originais de união e interseção para formular uma definição alternativa que não dependa da quantidade de conjuntos que estamos trabalhando.

Há duas notações distintas que são comumente usados, dependendo do contexto. Suponha primeiramente que para cada elemento  $i$  de algum conjunto  $I$  corresponde um conjunto  $A_i$ . Vamos nos referir à coleção

$$\{A_i; i \in I\}$$

como uma família indexada de conjuntos, sendo  $I$  o conjunto de índices dessa família.

**Exemplo:** Para cada  $j \in \mathbb{N}$  considere o intervalo fechado  $A_j = [0, j]$ . A coleção de todos esses intervalos pode ser denotada por

$$\mathcal{A} = \{A_j; j \in \mathbb{N}\}$$

é uma família indexada de conjuntos cujo conjunto de índices é  $\mathbb{N}$ .

**Exemplo:** Para cada número racional  $a$  considere o conjunto  $R_a = \{x \in \mathbb{Q}; x < a\}$ . Neste caso a família indexada de conjuntos é

$$\mathcal{R} = \{R_a; a \in \mathbb{R}\}$$

e o conjunto de índices é  $\mathbb{Q}$ .

**Observação:** A família  $\mathcal{R}$  acima é particularmente importante em análise matemática. Seus elementos são chamados de cortes racionais e aparecem na construção dos números reais pelo método dos cortes de Dedekind.

**Definição 3.8.** A união de uma família indexada  $\{A_i : i \in I\}$  é o conjunto  $\bigcup_{i \in I} A_i$  formado por todos os elementos que se encontram em um ou mais dos conjuntos  $A_i$  da família, ou seja

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x; (\exists i \in I) x \in A_i\}$$

dessa forma

$$x \in \bigcup_{i \in I} A_i \Leftrightarrow \exists i \in I, x \in A_i.$$

**Definição 3.9.** A interseção de uma família indexada  $\{A_i : i \in I\}$  é o conjunto  $\bigcap_{i \in I} A_i$  formado por todos os elementos que se encontram em todos os conjuntos  $A_i$  da família, ou seja

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{x; (\forall i \in I) x \in A_i\}$$

dessa forma

$$x \in \bigcap_{i \in I} A_i \Leftrightarrow \forall i \in I, x \in A_i.$$

Observe que o caso em que o conjunto de índices  $I$  consiste de apenas dois elementos, digamos  $I = \{1, 2\}$  então

$$\bigcup_{i \in I} A_i = A_1 \cup A_2 \quad \text{e} \quad \bigcap_{i \in I} A_i = A_1 \cap A_2.$$



assim as noções de união e intersecção arbitrária de famílias indexadas são generalizações das noções de união e intersecção de pares de conjuntos e, portanto, também de reuniões e intersecções finitas de conjuntos.

O próximo teorema, apesar de simples, ilustra muito bem o papel que essas definições arbitrárias de reunião e intersecção desempenham na teoria e a forma correta de manipulá-las.

**Teorema 3.12.** *Seja  $\{A_i : i \in I\}$  uma família indexada de conjuntos. Então para qualquer  $i_o \in I$  temos*

$$A_{i_o} \subset \bigcup_{i \in I} A_i \quad e \quad \bigcap_{i \in I} A_i \subset A_{i_o}.$$

**Dem.:** Seja  $x \in A_{i_o}$  um elemento qualquer, logo  $\exists i \in I$  tal que  $x \in A_i$  (neste caso  $i$  é o próprio  $i_o$ ). Assim, por definição,  $x \in \bigcup_{i \in I} A_i$ . Isso prova que  $A_{i_o} \subset \bigcup_{i \in I} A_i$ .

Para provar que  $\bigcap_{i \in I} A_i \subset A_{i_o}$ , seja  $x \in \bigcap_{i \in I} A_i$  um elemento qualquer. Pela definição de intersecção de família indexada de conjuntos sabemos que  $\forall i \in I, x \in A_i$ . Como  $i_o \in I$ , então  $x \in A_{i_o}$ , o que conclui a prova do teorema.  $\square$

Observe que nas demonstrações acima não foi mencionado nem uma vez se o conjunto de índices era finito ou infinito. Também não foi feito qualquer menção se determinado conjunto  $A_i$  seria o primeiro ou o segundo ou ainda que exista uma ordem qualquer estabelecida entre eles.

De fato, o conjunto de índices não precisa ter nenhuma ordem particular (por exemplo: do menor para o maior), portanto não precisa haver uma maneira natural indexar uma família de conjuntos. As demonstrações dependem exclusivamente das definições de união e intersecção em termos de quantificadores sobre o conjunto de índices. Esse mesmo tipo de raciocínio será usado nos próximos teoremas.

**Teorema 3.13.** *Seja  $\{A_i : i \in I\}$  uma família indexada de conjuntos qualquer e  $B$  um conjunto arbitrário, então:*

$$a. B \cup \bigcup_{i \in I} A_i = \bigcup_{i \in I} (B \cup A_i);$$

$$b. B \cap \bigcap_{i \in I} A_i = \bigcap_{i \in I} (B \cap A_i);$$

**Dem.:** Faremos apenas a prova do item  $a.$ , o item  $b.$  fica para o leitor.

$$\begin{aligned} x \in B \cup \bigcup_{i \in I} A_i &\Leftrightarrow x \in B \text{ ou } x \in \bigcup_{i \in I} A_i \Leftrightarrow x \in B \text{ ou } (\exists i \in I, x \in A_i) \\ &\Leftrightarrow \exists i \in I, (x \in B \text{ ou } x \in A_i) \Leftrightarrow \exists i \in I, (x \in B \cup A_i) \\ &\Leftrightarrow x \in \bigcup_{i \in I} (B \cup A_i) \end{aligned}$$

$\square$

**Teorema 3.14** (Leis Distributivas). *Seja  $\{A_i : i \in I\}$  uma família indexada de conjuntos qualquer e  $B$  um conjunto arbitrário, então:*

$$a. B \cap \bigcup_{i \in I} A_i = \bigcup_{i \in I} (B \cap A_i);$$

$$b. B \cup \bigcap_{i \in I} A_i = \bigcap_{i \in I} (B \cup A_i);$$

**Dem.:** Como no teorema anterior, faremos apenas a prova do item *a.* e deixaremos o item *b.* para o leitor.

$$\begin{aligned}
 x \in B \cap \bigcup_{i \in I} A_i &\Leftrightarrow x \in B \text{ e } x \in \bigcup_{i \in I} A_i \Leftrightarrow x \in B \text{ e } \left( \exists i \in I, x \in A_i \right) \\
 &\Leftrightarrow \exists i \in I, \left( x \in B \text{ e } x \in A_i \right) \Leftrightarrow \exists i \in I, \left( x \in B \cap A_i \right) \\
 &\Leftrightarrow x \in \bigcup_{i \in I} (B \cap A_i)
 \end{aligned}$$

□

**Teorema 3.15** (Leis de De Morgan). *Seja  $\{A_i : i \in I\}$  uma família indexada de conjuntos qualquer e  $B$  um conjunto arbitrário, então:*

- a.*  $(\bigcup_{i \in I} A_i)^c = \bigcap_{i \in I} A_i^c$ ;
- b.*  $(\bigcap_{i \in I} A_i)^c = \bigcup_{i \in I} A_i^c$ ;

Existe uma notação alternativa para uniões e interseções arbitrárias quando o família de conjuntos não é indexada. Seja  $\mathcal{F}$  uma coleção de conjuntos qualquer. Vamos denotar a reunião de todos os elementos da família por

$$\bigcup \mathcal{F} = \{x; (\exists A \in \mathcal{F}) x \in A\},$$

ou seja,  $x \in \bigcup \mathcal{F} \Leftrightarrow (\exists A \in \mathcal{F}) x \in A$ .

Analogamente,

$$\bigcap \mathcal{F} = \{x; (\forall A \in \mathcal{F}) x \in A\},$$

e assim,  $x \in \bigcap \mathcal{F} \Leftrightarrow (\forall A \in \mathcal{F}) x \in A$ .

Obviamente, caso a coleção  $\mathcal{F}$  possa ser indexada por um conjunto de índices  $I$ , teremos  $\mathcal{F} = \{A_i; i \in I\}$  e

$$\bigcup \mathcal{F} = \bigcup_{i \in I} A_i \quad \text{e} \quad \bigcap \mathcal{F} = \bigcap_{i \in I} A_i$$

## Capítulo 4

# Produto Cartesiano

**Definição 4.1.** *Dados dois elementos,  $x$  e  $y$ , chamaremos de par ordenado um terceiro elemento denotado  $(x, y)$ . Também dizemos que  $x$  é a primeira coordenada e  $y$  é a segunda coordenada do par ordenado  $(x, y)$ .*

Aqui o adjetivo “ordenado” enfatiza que a ordem na qual os elementos  $x$  e  $y$  aparecem entre os parênteses é essencial. Também é comum chamar os elementos  $x$  e  $y$  de primeira projeção e segunda projeção do par ordenado  $(x, y)$ , respectivamente, e denotar isso por:

$$x = \pi_1(x, y) \quad \text{e} \quad y = \pi_2(x, y)$$

Note que o par ordenado  $(a, b)$  não é o mesmo que o conjunto  $\{a, b\}$ .

**Definição 4.2.** *Dizemos que dois pares ordenados  $(x, y)$  e  $(a, b)$  são iguais se e somente se  $x = a$  e  $y = b$ . Simbolicamente, temos:*

$$(x, y) = (a, b) \Leftrightarrow x = a \text{ e } y = b$$

Em particular,  $(x, y) = (y, x)$  se e somente se  $x = y$ .

Em geometria analítica convencionamos associar a cada ponto do plano um par ordenado de números reais (fixando uma origem e um par de eixos ortogonais). O plano cartesiano, como conhecemos, é o conjunto de todos os pares ordenados de números reais. Vamos formalizar esse conceito.

**Definição 4.3.** *Sejam  $A$  e  $B$  dois conjuntos quaisquer. O conjunto de todos os pares ordenados  $(x, y)$ , com  $x \in A$  e  $y \in B$ , é chamado o produto cartesiano de  $A$  e  $B$ , e denotado  $A \times B$ . Simbolicamente*

$$A \times B = \{(x, y); x \in A \text{ e } y \in B\}$$

**Exemplo:** Sejam  $A = \{a, b\}$  e  $B = \{1, 2, 3\}$  então

$$\begin{aligned} A \times B &= \{(a, 1), (a, 2), (a, 3), (b, 1), (b, 2), (b, 3)\} \text{ e} \\ B \times A &= \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b)\}. \end{aligned}$$

Note que, em geral,  $A \times B \neq B \times A$ .

**Observação:** Se os conjuntos  $A$  e  $B$  são finitos, com número de elementos  $n(A) = m$  e  $n(B) = n$ , então o produto cartesiano  $A \times B$  também é um conjunto finito com  $n(A \times B) = m \cdot n$ , ou seja,

$$n(A \times B) = n(A) \cdot n(B).$$

**Exemplo:**

1.  $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y); x, y \in \mathbb{R}\}$  é identificado com o plano cartesiano usual da geometria analítica;
2.  $[0, 1] \times [0, 1] = \{(x, y); x, y \in \mathbb{R} \text{ e } 0 \leq x \leq 1 \text{ e } 0 \leq y \leq 1\}$  pode ser descrito geometricamente como um quadrado (fechado) de lado 1 com vértices nos pontos  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$ ,  $(1, 1)$  e  $(0, 1)$  do plano cartesiano.

Uma forma mais comum de escrever esse conjunto é observar que  $[0, 1] \times [0, 1]$  é subconjunto de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  e escrever

$$[0, 1] \times [0, 1] = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}; 0 \leq x, y \leq 1\}.$$

Neste caso, a expressão  $0 \leq x, y \leq 1$  deve ser entendida como  $0 \leq x \leq 1$  e  $0 \leq y \leq 1$ .

3.  $[-2, 2] \times [-1, 1] = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}; |x| \leq 2 \text{ e } |y| \leq 1\}$  pode ser descrito geometricamente como um retângulo de base 4 e altura 2 do plano cartesiano.
4.  $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}; x^2 + y^2 = 1\}$  pode ser descrito geometricamente como o círculo de raio 1 e centro no ponto  $(0, 0)$  do plano cartesiano. Note que  $S^1$  é um conjunto de pares ordenados, porém não é possível escrevê-lo como um produto cartesiano de dois conjuntos.

## 4.1 Quadrado cartesiano de um conjunto

No caso particular em que  $B = A$ , o produto cartesiano  $A \times A$  é chamado de quadrado cartesiano de  $A$  ou apenas o quadrado do conjunto  $A$ , e indicado pela notação  $A^2$ , que se lê: " $A$  dois".

$$A^2 = \{(x, y); x, y \in A\}$$

O conjunto de todos os pares ordenados da forma  $(x, x)$ , com  $x \in A$ , é chamado de diagonal do quadrado  $A^2$  e indicado por  $D_{A^2}$ , ou seja,

$$D_{A^2} = \{(x, x); x \in A\}$$

Se o conjunto  $A$  é finito e tem  $m$  elementos, o quadrado cartesiano  $A^2$  também é um conjunto finito e tem  $m^2$  elementos. Obviamente, a diagonal  $D_{A^2}$  de  $A$  também é um conjunto finito e tem  $m$  elementos.

**Exemplo:** Considere o conjunto  $A = \{a, b, c\}$ , então

$$A^2 = \{(a, a), (a, b), (a, c), (b, a), (b, b), (b, c), (c, a), (c, b), (c, c)\}$$

e

$$D_{A^2} = \{(a, a), (b, b), (c, c)\}$$

Observe-se que o quadrado  $A^2$  tem exatamente  $3^2 = 9$  elementos e que a sua diagonal  $D_{A^2}$  tem 3 elementos.

**Observação:** Dispondo os elementos de  $A^2$  em forma de quadrado, os pares ordenados  $(a, a)$ ,  $(b, b)$ , e  $(c, c)$  estarão dispostos na diagonal indicada abaixo,

$$\begin{array}{ccc} \boxed{(a, a)} & (a, b) & (a, c) \\ (b, a) & \boxed{(b, b)} & (b, c) \\ (c, a) & (c, b) & \boxed{(c, c)} \end{array}$$

**Exemplo:** No caso em que  $A = \mathbb{R}$ , o quadrado é  $\mathbb{R}^2 = \{(x, y); x, y \in \mathbb{R}\}$  e sua diagonal é  $D_{\mathbb{R}^2} = \{(x, x); x \in \mathbb{R}\}$ .

## 4.2 Propriedades do produto cartesiano

Sejam  $A$ ,  $B$  e  $C$  conjuntos quaisquer:

$P_1$ .  $A \times B = \emptyset \Leftrightarrow A = \emptyset$  ou  $B = \emptyset$ ;

Suponha, por absurdo, que  $A \neq \emptyset$  e  $B \neq \emptyset$ , neste caso existe pelo menos um elemento  $x_o \in A$  e pelo menos um elemento  $y_o \in B$ , logo  $(x_o, y_o) \in A \times B$ , o que contraria a hipótese de  $A \times B = \emptyset$ .

**Observação:** Note que a prova acima não está completa, pois a demonstração de um teorema do tipo “se e somente se” deve sempre ter duas partes: suficiência ( $\Rightarrow$ ) e necessidade ( $\Leftarrow$ ). Na propriedade acima está provada somente a suficiência (usando a técnica de redução ao absurdo).

Isso é bastante comum quando a demonstração da outra implicação é “trivial”. Neste caso, para provar a necessidade, devemos supor que um dos conjuntos,  $A$  ou  $B$ , é vazio, neste caso é óbvio que não existirão pares ordenados em  $A \times B$ .

A moral da história aqui é a seguinte: quando o autor não fala nada de uma parte da demonstração é porque (muito provavelmente) essa parte da demonstração é trivial. No seu caso, como estudante, jamais deixe de fazer uma demonstração por achá-la fácil. Caso não haja realmente o que escrever, diga pelo menos que a prova é trivial, evidente ou consequência direta da definição ou de outro resultado.

Na propriedade abaixo um dos lados também é trivial. Antes de ler a prova, tente descobrir qual é o lado trivial e qual merece uma prova mais detalhada.

$P_2$ . Se  $A$  e  $B$  são não vazios então  $A \times B = B \times A \Leftrightarrow A = B$ ;

A necessidade é evidente e segue da definição. Para a suficiência vamos provar a contrapositiva, ou seja, sabendo que  $A \neq B$  mostraremos que  $A \times B \neq B \times A$ .

Como  $A \neq B \Leftrightarrow A \not\subset B$  ou  $B \not\subset A \Leftrightarrow (i)(\exists x)(x \in A \wedge x \notin B)$  ou  $(ii)(\exists y)(y \in B \wedge y \notin A)$ .

No caso  $(i)$ , da hipótese  $B \neq \emptyset$  sabemos que existe  $y_o \in B$ . Logo  $(x, y_o) \in A \times B$  e  $(x, y_o) \notin B \times A$ , pois  $x \in A$  e  $x \notin B$ . O caso  $(ii)$  é análogo e fica como exercício.

$P_3$ .  $A \subset B \Rightarrow (i) A \times C \subset B \times C$  e  $(ii) C \times A \subset C \times B$ ;

Para provar  $(i)$ , basta mostrar que todo elemento  $(x, y) \in A \times C$  também é elemento de  $B \times C$ . Mas  $(x, y) \in A \times C \Leftrightarrow x \in A$  e  $y \in C$ . Como  $A \subset B$  então  $x \in B$  e  $y \in C \Leftrightarrow (x, y) \in B \times C$ . A prova de  $(ii)$  é análoga e fica como exercício.

$P_4$ . Se  $A$  é não vazio então  $A \times B \subset A \times C \Leftrightarrow B \subset C$ ;

Note que a proposição é verdadeira no caso particular em que  $B = \emptyset$ . Logo podemos supor que  $B \neq \emptyset$ . Seja  $y \in B$  um elemento qualquer, como  $A \neq \emptyset$  então existe  $x \in A$ . Assim

$$x \in A \text{ e } y \in B \Rightarrow (x, y) \in A \times B \Rightarrow (x, y) \in A \times C \Rightarrow x \in A \text{ e } y \in C \Rightarrow y \in C.$$

Como a prova acima vale para qualquer  $y \in B$ , podemos concluir que  $B \subset C$ .

$P_{4'}$ . Se  $A$  é não vazio então  $B \times A \subset C \times A \Leftrightarrow B \subset C$ ;

Essa prova fica como exercício, pois a ideia é a mesma da propriedade anterior.

$P_5$ . Distributividade do produto cartesiano em relação a interseção, a reunião e a diferença:

- a.  $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$
- b.  $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$
- c.  $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$
- d.  $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$
- e.  $A \times (B - C) = (A \times B) - (A \times C)$
- f.  $(A - B) \times C = (A \times C) - (B \times C)$

Vamos fazer a prova de apenas duas das proposições acima para ilustrar todos os passos. Pense na justificativa para cada uma das passagens e porque essa lista de equivalências é suficiente para garantir a prova.

$$\begin{aligned} (x, y) \in A \times (B \cup C) &\Leftrightarrow x \in A \text{ e } y \in (B \cup C) \\ &\Leftrightarrow x \in A \text{ e } (y \in B \text{ ou } y \in C) \\ &\Leftrightarrow (x \in A \text{ e } y \in B) \text{ ou } (x \in A \text{ e } y \in C) \\ &\Leftrightarrow (x, y) \in A \times B \text{ ou } (x, y) \in A \times C \\ &\Leftrightarrow (x, y) \in (A \times B) \cup (A \times C) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} (x, y) \in A \times (B - C) &\Leftrightarrow x \in A \text{ e } y \in (B - C) \\ &\Leftrightarrow x \in A \text{ e } (y \in B \text{ e } y \notin C) \\ &\Leftrightarrow (x \in A \text{ e } x \in A) \text{ e } (y \in B \text{ e } y \notin C) \\ &\Leftrightarrow x \in A \text{ e } (x \in A \text{ e } y \in B) \text{ e } y \notin C \\ &\Leftrightarrow x \in A \text{ e } (y \in B \text{ e } x \in A) \text{ e } y \notin C \\ &\Leftrightarrow (x \in A \text{ e } y \in B) \text{ e } (x \in A \text{ e } y \notin C) \\ &\Leftrightarrow (x, y) \in A \times B \text{ e } (x, y) \notin A \times C \\ &\Leftrightarrow (x, y) \in ((A \times B) - (A \times C)) \end{aligned}$$

### 4.3 $n$ -uplas ordenadas

**Definição 4.4.** Fixado um número natural  $n$ , chamaremos de  $n$ -upla ordenada ao elemento  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ . Neste caso, para cada  $j$  ( $1 \leq j \leq n$ ), dizemos que  $x_j$  é a  $j$ -ésima coordenada da  $n$ -upla ordenada  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  e usaremos a notação  $x_j = \pi_j(x_1, x_2, \dots, x_n)$  para indicar esse fato.

Assim como no caso de pares ordenados, a ordem dos elementos é importante e a lista de elementos  $x_1, x_2, \dots, x_n$  pode conter repetições.

Com essa notação, um par ordenado é uma  $n$ -upla ordenada com  $n = 2$ . Quando  $n = 3, 4, 5 \dots$  costuma-se usarmos os nomes tripla ordenada, quadrupla ordenada, quintupla ordenada etc. Também é válido falar 5-upla ordenada, 8-upla ordenada e assim por diante.

**Definição 4.5.** Dizemos que duas  $n$ -uplas ordenadas  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  e  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  são iguais se todo elemento da primeira é igual ao elemento correspondente da segunda. Isto é

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) = (x_1, x_2, \dots, x_n) \Leftrightarrow a_j = x_j, \forall j \text{ com } 1 \leq j \leq n.$$

## 4.4 Produto cartesiano de varios conjuntos

A noção de produto cartesiano, definida para dois conjuntos, pode ser estendida para qualquer número natural  $n > 2$  de conjuntos.

**Definição 4.6.** Chamaremos de produto cartesiano dos  $n$  conjuntos  $A_1, A_2, \dots, A_n$  (na ordem em que estão escritos) ao conjunto de todas as  $n$ -uplas  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  tais que  $x_1 \in A_1, x_2 \in A_2, \dots, x_n \in A_n$ , e denotamos esse conjunto por

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n \quad \text{ou} \quad \prod_{j=1}^n A_j,$$

dessa forma

$$\begin{aligned} \prod_{j=1}^n A_j &= \{(x_1, x_2, \dots, x_n); x_1 \in A_1 \text{ e } x_2 \in A_2 \text{ e } \dots \text{ e } x_n \in A_n\} \\ &= \{(x_1, x_2, \dots, x_n); \forall j \in \{1, 2, \dots, n\}, x_j \in A_j\}, \end{aligned}$$

ou seja

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \prod_{j=1}^n A_j \Leftrightarrow \forall j \in \{1, 2, \dots, n\}, x_j \in A_j.$$

Os conjuntos  $A_1, A_2, \dots, A_n$  são chamados de fatores do produto cartesiano  $\prod_{j=1}^n A_j$ .

No caso particular em que todos os fatores são iguais  $A = A_1 = A_2 = \dots = A_n$ , o produto cartesiano  $A \times A \times \dots \times A$  ( $n$  vezes) recebe o nome de  $n$ -ésima potência cartesiana de  $A$ . Denotamos esse conjunto  $A^n$ , notação que é lida " $A$  ene".

A diagonal de  $A^n$  é o conjunto de todas as  $n$ -uplas  $(x, x, \dots, x)$  tais que  $x \in A$ .

**Exemplo:** Dados  $A = \{a_1, a_2\}$ ,  $B = \{b_1, b_2, b_3\}$  e  $C = \{c_1, c_2\}$  temos

$$\begin{aligned} A \times B \times C &= \{(a_1, b_1, c_1), (a_1, b_1, c_2), (a_1, b_2, c_1), (a_1, b_2, c_2), (a_1, b_3, c_1), (a_1, b_3, c_2), \\ &\quad (a_2, b_1, c_1), (a_2, b_1, c_2), (a_2, b_2, c_1), (a_2, b_2, c_2), (a_2, b_3, c_1), (a_2, b_3, c_2)\}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A^3 &= \{(a_1, a_1, a_1), (a_1, a_1, a_2), (a_1, a_2, a_1), (a_1, a_2, a_2), \\ &\quad (a_2, a_1, a_1), (a_2, a_1, a_2), (a_2, a_2, a_1), (a_2, a_2, a_2)\}; \end{aligned}$$

$$D_{A^3} = \{(a_1, a_1, a_1), (a_2, a_2, a_2)\};$$

$$D_{B^4} = \{(b_1, b_1, b_1, b_1), (b_2, b_2, b_2, b_2), (b_3, b_3, b_3, b_3)\}.$$





## Capítulo 5

# Relações