



# MATEMÁTICA FINANCEIRA

Roy Martelanc

FEA/USP

0ª edição (v.1.0.beta)

MAIS DE 600  
EXERCÍCIOS, PROBLEMAS,  
CASOS REAIS E DESAFIOS  
(ALGUNS SIMPLES,  
OUTROS QUASE IMPOSSÍVEIS)

\$  
DI  
USD  
IPCA  
SAC  
VF JPY  
VPL/I  
IGP-M  
TIR-M  
SPC GBP  
Prime  
 $(1+i)^n$  TIR  
PGTO %a.a.  
i ef £ i infl vp  
Bullet  
EUR %a.d.u.  
LIBOR € i CAN ¥  
%a.m. Price i real ∞ %a.d.c.  
VPL

© Roy Martelanc, 2017

Martelanc, Roy

Matemática Financeira

São Paulo, SP, Brasil: Roy Martelanc, 2017.

v.1.0.23

ISBN

## PREFÁCIO

A origem do texto. Após vários anos ministrando aulas apenas na pós-graduação, fui brindado com a disciplina matemática financeira na graduação em administração da FEA/USP. Foi aí que resolvi fazer um guia rápido para ajudar os alunos. A ideia era fornecer um material de apoio na sequência prevista das aulas, resolver preventivamente algumas dúvidas usuais e servir de veículo para as listas de exercícios. Aquilo que era para ser apenas um guia rápido cresceu e tornou-se este livro. O estilo ainda é direto ao ponto, como em um guia.

Longa tradição. Este livro bebe da longa tradição dos livros de matemática financeira no Brasil, vários dos quais de professores da FEA, como Assaf (2013), Bruni e Famá (2008a), Bruni e Famá (2008b), Carrete e Tavares (2014), Gomes e Matias (2009), Jurandir (2012), Paschoarelli (2007), Securato (2008), Sousa (2007).

Gerar valor, mais do que calcular taxas. A matemática financeira robusteceu-se no Brasil por causa dos elevados juros e inflação. Permanece robusta (pela tradição e pela precisão), mas está na hora de receber uma mudança de ênfase. O importante era ganhar dinheiro (ou não perdê-lo) nos investimentos e dívidas financeiros (muitos de curto prazo); agora é aumentar o valor das empresas através da geração de caixa operacional (viabilizado pela obtenção de capital) e da estruturação de fontes de recursos (muitos de prazo relativamente longo). A estrutura do livro responde a essa mudança do mercado financeiro.

Eletrônico e gratuito. Para cumprir a sua função, um livro didático deve atingir o maior número possível de pessoas. Um livro eletrônico tem custo de reprodução quase nulo, portanto pode ser gratuito. Este formato e precificação permitem melhor atingir todos os interessados no tema, maximizando a utilidade gerada.

Nível e linguagem. Esta disciplina é ministrada no primeiro ou segundo ano (dependendo da versão do curso) de administração (na FEA), após um pouco de contabilidade e de cálculo (utilizados no texto, mas não essenciais à sua compreensão). Algumas questões (como demonstrações curtas e extensões dos conceitos apresentados, que seriam enfadonhas para a maioria dos leitores) são propostas como desafios (na maior parte simples). Seguindo uma tradição da administração, a linguagem foi mantida o mais próxima possível da natural, de modo a atingir o maior número possível de pessoas.

Matemática e finanças. A matemática financeira é uma das três linguagens fundamentais de finanças (ao lado da contabilidade e do estudo da variabilidade), devendo ser aprendida logo no começo. A parte matemática deste tema é simples. Difícil (nas situações mais interessantes) é projetar o fluxo de caixa e estimar a sua variabilidade. Mais difícil ainda (nos casos práticos) é definir a estratégia financeira que dá origem ao fluxo de caixa e o mantém sob controle. Este livro é apenas um primeiro passo.

Planilhas e calculadoras. As planilhas eletrônicas (e as calculadoras financeiras) são importantes e seu uso é incentivado, pois tornam mais rápido e prazeroso (portanto potencialmente mais profundo e abrangente) o aprendizado dos conceitos que são o nosso objetivo efetivo. Além do que, na prática das decisões financeiras, só se usam planilhas (cada vez menos também calculadoras financeiras) e é importante aprender a usá-las cedo.

Atividades. Nada como a prática. Todos os capítulos trazem exercícios (aplicações diretas de técnicas), problemas (que já têm uma conexão com situações reais) e casos reais. Os casos são extratos (naturalmente simplificados e focados no tema do livro) da realidade que forma o entorno dos problemas de matemática financeira. Para facilitar a autoavaliação do aprendizado, o livro é acompanhado de planilhas, contendo as resoluções de uma parte dos exercícios, problemas e casos.

Agradecimentos. Não é possível agradecer suficientemente as pessoas que apoiaram esta obra. O **Objeto 1** (primeiro e mais importante) traz uma relação (incompleta, nem todos podem ser mencionados, alguns nem querem) das pessoas que contribuíram (e contribuem) e uma indicação da natureza de suas contribuições.

**Objeto 1. Contribuintes e contribuições.** Contribuinte: nome e filiação. Contribuição: teórica (📖), em exercícios, problemas, casos e desafios (📁), didática ou na clareza do texto (✍️), na localização de erros de redação ou de formato (👁️), no processo de publicação (📡), com incentivo (😊) e com outras contribuições (💎).

contribuinte	contribuição
Alan Nader Ackel Ghani, FEA/USP	
Antonia dos Santos Martelanc, esposa	😊
Bruno Cals de Oliveira, FEA/USP	
Eduardo Savarese, FIA	📡
Felipe Turbuk Garran, FIA	😊📁
Jonatan de Sena Silva, FEA/USP	📡
Luciene Soares, FIA	📡
Marcel Cabral, FEA/USP	✍️👁️
Nivaldo Marcusso, FIA	📡
Pablo Turbuk Garran	📡
Rafael Falcão Noda, FEA/USP	📁
Renato Luiz Pereira dos Santos, FEA/USP	📁
Rui Otávio Bernardes de Andrade, consultor	📁

Obrigado.

Prof. Dr. Roy Martelanc  
FEA/USP

## CONTEÚDO

Prefácio	3
Conteúdo	5
<b>PARTE A CÁLCULO FINANCEIRO</b>	<b>10</b>
<b>1 Conceitos Iniciais</b>	<b>11</b>
Equivalência de Capitais	11
Relevância da Matemática Financeira	11
Diagrama de Fluxo de Caixa	12
Atividades	14
Exercícios	15
Problemas	16
Caso: dois amigos e um carro	17
<b>2 Juros simples, compostos e contínuos</b>	<b>18</b>
Juros Simples	18
Conceito e Equações	18
Utilização	18
Polêmica Judicial	19
Juros Compostos	19
Conceito	19
Equações	20
Juros Compostos nas Calculadoras e Planilhas	21
Juros Contínuos	22
Comparação de Juros Simples, Compostos e Contínuos	23
Atividades	25
Exercícios	25
Problemas	26
Caso: vender o imóvel agora ou mais tarde?	27
Caso: Petrobrás e o reajuste da gasolina	27
Caso: boas intenções	28
Caso: juros no Judiciário	28
<b>3 Conversão de Taxas</b>	<b>29</b>
Temporalidade da Taxa de Juros	29
Conversão entre Taxas	30
Conversão entre Taxas Simples	30
Conversão entre Taxas Efetivas	30
Custo Efetivo Total	32
Taxa Real	32
Comparação entre Taxa Nominal e Real	33
Atividades	34
Exercícios	35
Problemas	36
Caso: Plano Cruzado e a dança da taxa nominal	37
Caso: Plano Collor e a dança da taxa real	37
<b>PARTE B SÉRIES DE PAGAMENTOS</b>	<b>39</b>
<b>4 Pagamentos Constantes</b>	<b>40</b>
Pagamentos no Final do Período	40
Pagamentos no Início do Período	42
Atividades	44
Exercícios	44
Problemas	45
Caso: era uma vez uma bicicleta	46
Caso: pagamos metade da última parcela	46
Caso: 5% ou 2x sem juros?	47
Caso: financiamento com ou sem entrada?	47
Caso: sempre de carrão zero financiado	47

Caso: previdência privada e o rendimento de aplicações	48
<b>5 Perpetuidades</b>	<b>49</b>
Perpetuidade Sem Crescimento	49
Conceito	49
Demonstrações	49
Abordagem Numérica	50
Aproximação do Limite	51
Aplicações	53
Perpetuidade Com Crescimento Constante	53
Conceito	53
Demonstração	54
Aproximação do Limite	54
Perpetuidade Com Crescimento Constante e Explicação do Reinvestimento	55
Conceito	55
Demonstração	56
Aplicação	57
Atividades	57
Exercícios	57
Problemas	58
Caso: bônus perpétuos.	58
Caso: quanto vale a padaria.	59
 <b>PARTE C MÉTODOS DE AVALIAÇÃO DE INVESTIMENTOS</b>	 <b>60</b>
<b>6 Conceitos Preliminares</b>	<b>61</b>
Viabilidade de Projetos de Investimento	61
Viabilidade Econômica	61
Outras Viabilidades	61
Custo de Capital e Taxa de Atratividade	63
Custo de Oportunidade	63
Custo de Capital	63
Taxa Mínima de Atratividade	64
Fluxo Convencional e Não Convencional	65
Fluxo de Caixa Convencional	65
Fluxo de Caixa Não Convencional	66
Restrição de Capital, Excludência, Sinergia e Fracionamento de Projetos	67
Abundância e Restrição de Capital	67
Excludência	68
Sinergia	69
Fracionamento	70
Visão de Conjunto e Seleção de Projetos	70
Atividades	71
Exercícios	72
Problemas	72
Caso: recuperação ambiental na mineradora	74
Caso: seleção de projetos na balada naval	74
<b>7 Métodos Baseados no VPL</b>	<b>76</b>
VPL (Valor Presente Líquido)	76
Conceito de VPL	76
Equação e Cálculo do VPL	76
Seleção de Investimentos sob Abundância de Capital em Mercado de Capitais	
Desenvolvido	77
Seleção de Poucos Projetos com Abundante Disponibilidade de Capital	80
VPL e EVA	81
VPL relativo ao investimento	83
Conceito e Equação de VPL/I	83
Seleção Dinâmica de Projetos em Fluxo sob Restrição de Capital	83
Seleção Estática de Múltiplos Projetos sob Capital Restrito	85
Seleção Estática de Projeto com uso de Capital em Excesso ao Disponível	87
Benefício/Custo Econômico-Sócio-Ambiental	89

SUL (Série Uniforme Líquida)	89
Conceito de SUL	89
Equação e Utilização da SUL	91
Atividades	91
Exercícios	92
Problemas	93
Caso: projeto de investimento na impressora 3D	94
Caso: múltiplas alternativas de investimento do fundo de private equity	95
Caso: risco de mercado na geração de energia elétrica	96
Caso: lançamento de cosméticos com vidas comerciais diferentes	97
<b>8 Métodos Baseados em Taxas de Retorno</b>	<b>98</b>
TIR (Taxa Interna de Retorno)	98
Conceito, Equação e Utilização da TIR	98
TIR e VPL	99
TIR em Fluxos Não Convencionais	101
Abordagens para o Uso da TIR em Projetos Não Convencionais	103
TIR Modificada e Reinvestimento à Própria TIR	104
Taxa de Reinvestimento na TIR	104
Conceito e Equação da TIRM (TIR Modificada)	105
Correspondência entre TIRM e VPL/I	106
Correspondência entre TIRM e TIR	107
Retorno Contábil Médio	109
Conceito e Equação	109
Utilização	110
Atividades	111
Exercícios	111
Problemas	113
Caso: concessão com lucro duplicado	114
Caso: supermercado falido	115
Caso: sucateamento da geradora de energia nuclear	116
<b>9 Tempo de Retorno</b>	<b>117</b>
Tempo de Retorno do Investimento	117
Conceito, Equação e Cálculo do Tempo de Retorno	117
Correspondência entre o Tempo de Retorno e a TIR	118
Utilização do Tempo de Retorno enquanto Método de Avaliação da Viabilidade Econômica	118
Utilização do Tempo de Retorno enquanto Método de Avaliação do Risco	120
Payback Descontado	121
Conceito, Equação e Cálculo do Payback Descontado	121
Utilização do Payback Descontado	122
Atividades	122
Exercícios	123
Problemas	123
Caso: metalúrgica.	124
Caso: melhoria de processo.	125
Caso: lançamento de carro.	125
Caso: Venezuela.	126
<b>10 Qual método utilizar: uma Síntese</b>	<b>128</b>
Critérios de Seleção de Investimentos: Visão de Conjunto	128
A Lei do Preço Único	128
Pontos Fortes e Fracos dos Métodos de Avaliação de Investimentos	128
Circunstância em que cada Método é Preferível	129
O lado Quali	131
Efeitos de Difícil Quantificação	131
Soluções	132
Atividades	132
Exercícios	133
Problemas	133
Caso: siderúrgica.	135
Caso: MBA.	136

<b>PARTE D DÍVIDAS</b>	<b>138</b>
<b>11 Sistemas de Amortização</b>	<b>139</b>
Introdução	139
Separação de Amortização e Juros	139
O Caso mais Simples: Bullet	139
Amortização conhecida	140
Amortização Irregular	141
SAC	141
SAC com Carência de Principal	142
SAC com Carência de Principal e Juros	142
Pagamentos conhecidos	143
Pagamentos Irregulares	143
Pagamentos Constantes	144
Pagamentos Conhecidos com Juros Capitalizados	145
Sistemas Mistos	145
Amortização Mista	145
Pagamentos Constantes com Carência	146
Atividades	147
Exercícios	147
Problemas	148
Caso: inadimplência bancária	149
Caso: renegociação de dívida na confecção	150
Caso: porto.	151
<b>12 Operações Pré-fixadas</b>	<b>152</b>
Introdução	152
Conceito e Utilização de Taxa Prefixada	152
Operações Típicas com Taxa Prefixada	153
Taxa do Over	153
Taxa do Over de 252 dias	153
A Obsoleta Taxa Over de 30 dias	154
Descontos	155
Utilização e Cálculo de Descontos	155
Desconto Comercial e Racional	155
Taxa Anual Capitalizada Subanualmente	157
Cálculo e Utilização	157
Cálculo dentro do Período de Capitalização	158
Relação com a Taxa Efetiva	159
Tarifas, Tributos e Reciprocidades	160
Tarifas	160
Tributos	161
Reciprocidade	162
Impacto da Variação da Taxa em Ativos Financeiros Prefixados	166
Variação do Valor da Dívida em decorrência da Variação da Taxa de Juros	166
Duration enquanto Prazo Médio Ponderado pelo Valor Presente	167
Duration enquanto Sensibilidade do Valor Presente	169
Atividades	170
Exercícios	170
Problemas	171
Caso: financiamento do FIES e inflação	172
Caso: casa própria	173
Caso: desconto de recebíveis no atacarejo	174
Caso: cheque especial e o método hamburguês	174
Caso: venda casada em financiamento	175
<b>13 Operações Pós-fixadas</b>	<b>177</b>
Introdução	177
Conceito e Utilização de Taxa Pós-fixada	177
Sistemas de Indexação	177
Operações Indexadas com Índices de Inflação	179
Principais Índices de Inflação no Brasil	179



Utilização e Cálculo	181
Operações Indexadas com Taxas de Juros	182
Principais Taxas de Juros usadas como Indexadores	182
Operações Indexadas com DI	183
Operações Indexadas com a TJLP	184
Operações Indexadas com a TR	186
LFT	187
Operações em Moeda Estrangeira	188
Moedas Estrangeiras Utilizadas	188
Operações com Taxa Fixa	188
Operações com Taxa Flutuante	190
Atividades	191
Exercícios	192
Problemas	194
Caso: limite de garantia do FGC	195
Caso: subsídio ou normalização pelo BNDES?	196
Caso: carência intermediária em financiamento imobiliário	196
Caso: Plano Real e a dança do dólar	197
Caso: a crise da dívida externa e a dança da Libor	198
Caso: renegociação de dívida no conglomerado	199
<b>PARTE E POSFÁCIO</b>	<b>201</b>
<b>14 Próximos Passos</b>	<b>202</b>
<b>15 Bibliografia</b>	<b>203</b>

---

# **PARTE A**

## **CÁLCULO FINANCEIRO**

---

# 1

## CONCEITOS INICIAIS

### EQUIVALÊNCIA DE CAPITALS

A matemática financeira lida com a questão da equivalência de capitais no tempo. Na presença de mecanismos para investir o dinheiro e receber um montante maior após um prazo, é possível converter um valor presente em um valor futuro, definindo uma taxa de juros ou de retorno.

Da mesma forma, havendo a possibilidade de antecipar montantes futuros, em troca do pagamento de juros, é possível converter valor futuro em presente. Mesmo que não haja um mercado de dívidas ou a intenção de utilizar esse mecanismo, a simples perda da rentabilidade de um investimento alternativo permite fazer a mesma conversão. Nessa visão, o valor presente que deveria ser investido para se obter o valor futuro é o quanto esse montante futuro vale no presente.

A equivalência de capitais no tempo (o valor do dinheiro no tempo, VDT) se dá pela utilização de taxas de juros (ou de retorno) que têm (presumidamente) o mesmo risco dos ativos no futuro. Normalmente, é suficiente utilizar a taxa de ativos semelhantes. Quanto maior o risco, maior a taxa de retorno necessária para compensá-lo.

A noção de que a taxa de juros deve ser maior quando o risco é maior é muito antiga (pelo menos 37 séculos). O Código de Hamurabi (1772 a.C.) tentou limitar os juros de empréstimos. A penalidade para quem cobrasse a mais era indenizar a parte lesada (o devedor) em quatro vezes o principal (as sucessivas reedições da lei atentam que ela não vingou, como de resto não vingam tentativas de controlar quaisquer outros preços de mercado, a não ser por períodos muito curtos e em situações muito especiais). A taxa de juros era limitada a 10% a.a. (não sabemos como faziam as contas), exceto no financiamento a navegações (de risco mais alto), em que a taxa podia ir a até 20% a.a..

### RELEVÂNCIA DA MATEMÁTICA FINANCEIRA

Esta é uma disciplina relativamente simples, por lidar com apenas duas dimensões: dinheiro e tempo. Na formulação de juros compostos, que é de longe a mais relevante, utiliza apenas uma equação (a do valor futuro) e suas variantes e extensões. As perguntas típicas que são respondidas são:

- Um valor no presente tem qual valor equivalente no futuro? Alternativamente, um valor no futuro tem qual valor equivalente no presente?
- Qual o retorno de um investimento? Simetricamente, qual o custo efetivo de uma dívi-

da?

- Qual o valor de um ativo? E de uma dívida?
- Qual o fluxo de caixa de um investimento financeiro ou de uma dívida? Complementarmente, quanto falta receber / pagar de juros e de principal?




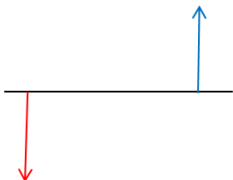
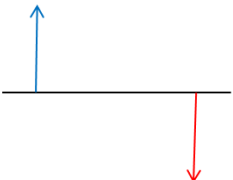

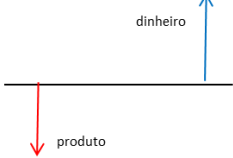


Cada uma das correspondentes respostas leva a um melhor entendimento de uma operação financeira e, provavelmente, a uma melhor decisão.

A matemática financeira é um dos três pilares sobre os quais é construído o conhecimento em finanças. As outras duas são a contabilidade e o estudo da variabilidade dos fluxos de caixa. Por ser fundamental, deve ser estudada desde cedo e com atenção.

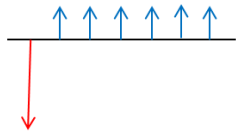
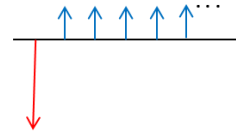
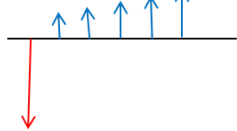
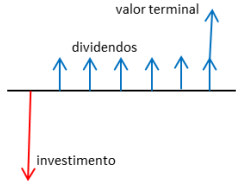
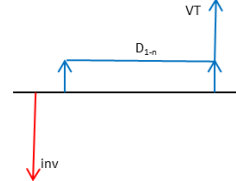
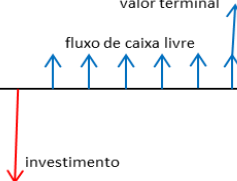
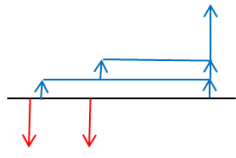
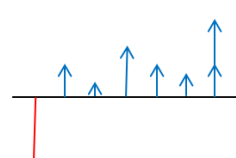
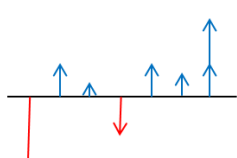
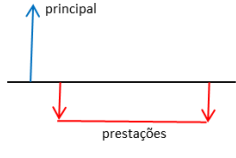
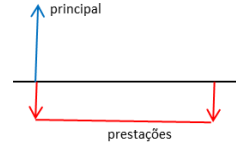
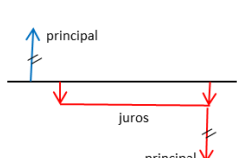
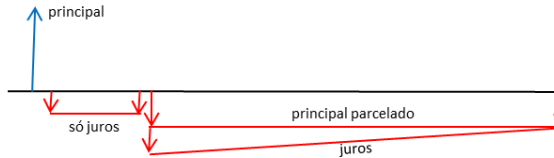
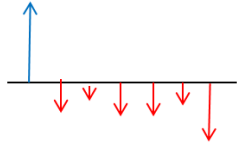
## DIAGRAMA DE FLUXO DE CAIXA

A representação gráfica usual para fluxos de caixa desenha as entradas de caixa (recebimentos) e as saídas de caixa (pagamentos) no tempo, como exemplificado no **Objeto 2**. A palavra fluxo de caixa é usada tanto para se referir a uma entrada ou saída de caixa individual como a um coletivo delas (todo um fluxo de entradas e saídas).

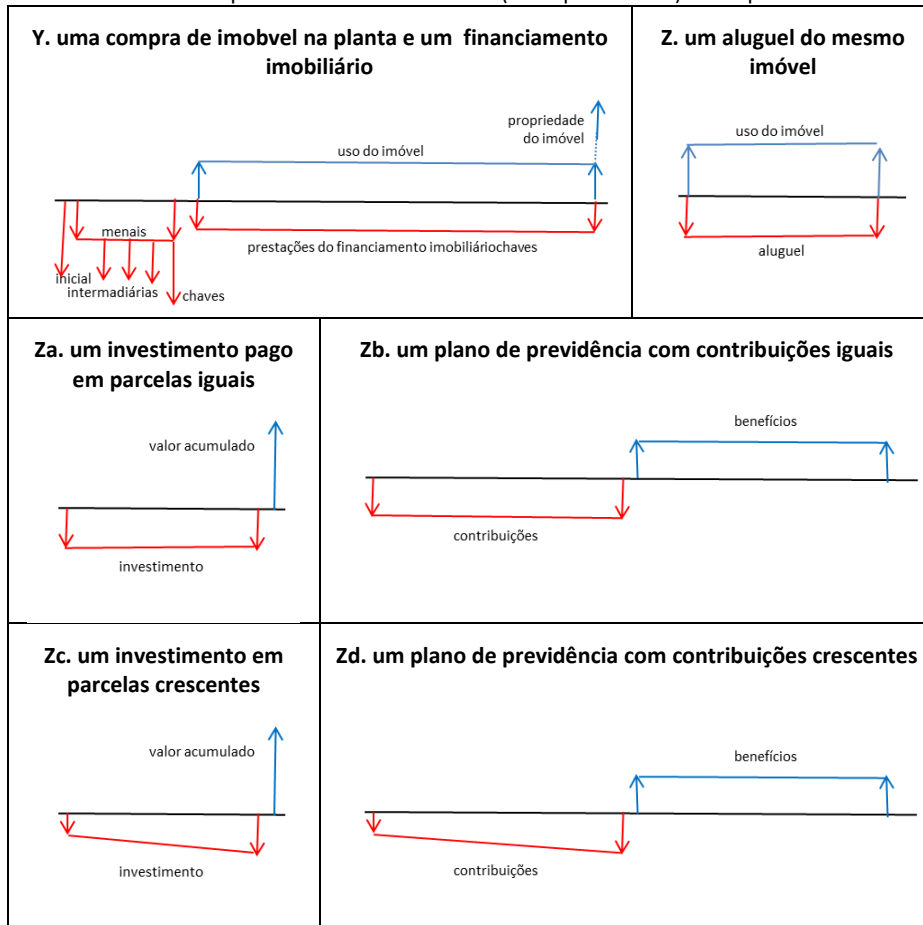
**Objeto 2. Exemplos de diagramas de fluxo de caixa.** O tempo é representado na horizontal. Entradas de caixa são representadas como setas para cima. Saídas de caixa são representadas como setas para baixo. Painéis de A a Z (e um pouco mais): exemplos variados.

<b>A. o tempo</b> 	<b>B. uma saída de caixa em t=0</b> 	<b>C. uma entrada de caixa em t=1</b> 
<b>D. um investimento simples</b> 	<b>E. uma dívida simples</b> 	<b>F. uma venda à vista</b> 
<b>G. uma venda a prazo</b> 	<b>H. uma venda antecipada</b> 	<b>I. uma venda a termo</b> 

**Objeto 2. Exemplos de diagramas de fluxo de caixa.** O tempo é representado na horizontal. Entradas de caixa são representadas como setas para cima. Saídas de caixa são representadas como setas para baixo. Painéis de A a Z (e um pouco mais): exemplos variados.

<p><b>J. um investimento que gera caixa constante por prazo finito</b></p> 	<p><b>K. idem a J, com prazo indeterminado (infinito)</b></p> 	<p><b>L. idem a K, com fluxo de caixa crescente</b></p> 
<p><b>M. um investimento em ações, com fluxo constante e valor terminal</b></p> 	<p><b>N. idem a M, simplificando o desenho da série de fluxos</b></p> 	<p><b>O. um investimento de uma empresa</b></p> 
<p><b>P. idem a O, em duas etapas</b></p> 	<p><b>Q. um investimento com fluxo irregular</b></p> 	<p><b>R. idem a Q, com uma saída (investimento) intermediária</b></p> 
<p><b>S. uma dívida com prestações iguais</b></p> 	<p><b>T. uma dívida com prestações iguais e com entrada igual</b></p> 	<p><b>U. uma dívida com amortização ao final e juros periódicos</b></p> 
<p><b>V. uma dívida com amortização parcelada e carência de principal</b></p> 	<p><b>X. uma dívida com fluxo irregular</b></p> 	

**Objeto 2. Exemplos de diagramas de fluxo de caixa.** O tempo é representado na horizontal. Entradas de caixa são representadas como setas para cima. Saídas de caixa são representadas como setas para baixo. Painéis de A a Z (e um pouco mais): exemplos variados.




Ao lado de cada seta, pode ser escrito o valor (em dinheiro) da entrada ou saída (como no Painel P), o significado da entrada ou saída (como nos Painéis F, G, H e outros), um indicativo de que dois valores são iguais (como no Painel T) ou simplesmente nada.

Após alguma prática, fica claro que a parte matemática da matemática financeira é simples. Entretanto a parte financeira, representada pelo fluxo de caixa e sua variabilidade, pode ser tão complexa quanto se queira.

## ATIVIDADES

Os exercícios são aplicações diretas (mais matemática simples do que finanças) das técnicas apresentadas no capítulo (podem ser usados conceitos de capítulos anteriores). Os problemas já têm enunciados com algum contexto e, em algumas situações, um pouco de dificuldade. Os casos reais trazem situações de aplicação colhidos (e simplificadas) da realidade e são escritos de modo a trazer uma forte impressão do contexto em que ocorreram e permitir fazer os cálculos necessários. Alguns casos podem ser difíceis.

Os exercícios, problemas e casos resolvidos (em planilha) estão assinalados com 🧠. Nem sempre os exercícios, problemas e casos exigem cálculos, podendo se resumir a aplicações dos

conceitos desenvolvidos no capítulo. Em todas as atividades utilize juros compostos, exceto se houver informação em contrário. Algumas atividades podem ser longas (por envolverem muitos períodos), mas são repetitivas (as equações em cada período são as mesmas). Alguns exercícios e problema são continuação de anteriores, caso em que são assinalados com . Os exercícios, problemas e casos podem trazer (e frequentemente trazem) elementos de capítulos anteriores, que são considerados conhecidos.

## Exercícios

Nos exercícios a seguir, esboce o diagrama do fluxo de caixa.

1.

ano	fluxo de caixa
0	-10.000 (saída de caixa)
1	1.200 (entrada de caixa)
2	400 (entrada de caixa)
3	1.500 (entrada de caixa)
4	1.000 (entrada de caixa)
5	12.000 (entrada de caixa)

2.

ano	fluxo de caixa
0	CF0 (saída de caixa)
1	CF1 (entrada de caixa)
2	CF2 (entrada de caixa)
3	CF3 (entrada de caixa)
4	CF4 (entrada de caixa)
5	CF5 (entrada de caixa)

3.

ano	fluxo de caixa
0	-4.700
1	-8.200
2	-300
3	2.500
4	2.600
5	2.700
6	2.800
7	21.500

4.

mês fluxo de caixa	
0	12.000
1	-1.500
2	-1.500
3	-1.500
4	-1.500
5	-1.500
6	-1.500
7	-1.500
8	-1.500
9	-1.500
10	-1.500
11	-1.500
12	-1.500

5.

ano fluxo de caixa	
0	-150.000
1	20.000
2	-50.000
3	40.000
4	-20.000
5	10.000
6	15.000
7	20.000
8	25.000
9	30.000
10	200.000

## Problemas

6. Explique o conceito de equivalência de capitais (use linguagem de ensino básico completo: ginásio completo).

7. A Simone fez um empréstimo e recebeu \$10.000 no ato. Após um mês, paga metade desse valor mais \$300 de juros. Após mais um mês, ela paga a outra metade mais \$150 de juros. Esboce o diagrama de fluxo de caixa desse empréstimo, destacando os vários componentes das parcelas.

8. A Cristiane, vizinha da Simone, comprou uma geladeira para pagar em 12 vezes, sendo a primeira no ato da compra (entrada). A geladeira vale \$3.000 à vista e as prestações são todas iguais de \$400. Esboce o fluxo de caixa do ponto de vista da compradora da geladeira.

9. ☞ Com os dados do problema anterior, esboce o fluxo de caixa do ponto de vista da loja.

10. O Alan está planejando a sua aposentadoria. Decidiu poupar \$1.000 todo mês e investi-los em títulos do governo. Após 20 anos, ele pretende ter juntado \$350.000, dos quais pretende viver. Esboce o diagrama de fluxo de caixa desta fase do plano de aposentadoria.

11. ☞ Após juntar \$350.000, o Alan planeja resgatar \$3.000 por mês e viver desse dinheiro até que o valor investido acabe, o que deve acontecer em uns 15 anos. Esboce o diagrama de fluxo de caixa desta segunda fase do plano de aposentadoria.

12. ☞ Esboce o diagrama de fluxo de caixa que junta ambas as fases do plano de aposentadoria dos dois problemas anteriores.



### **Caso: dois amigos e um carro**

*Equivalência de capitais. Questões éticas.*



Isto aconteceu faz tempo com dois grandes amigos. Quando tinham 20 anos, Felipe emprestou \$25.000 a Pedro. Na época, era possível comprar um carro simples com esse dinheiro. Após 10 anos, quando os dois já estavam bem de vida, Pedro pagou os \$25.000 de volta. Ele estava todo orgulhoso, porque finalmente pagou sua dívida e porque, após todo esse tempo, esse dinheiro ainda comprava um carro simples (equivalente ao original).

13. Explique, em linguagem simples (ensino médio: colegial) por que Felipe saiu perdendo?
14. O que o honesto e agradecido Pedro deveria ter feito?

## 2

# JUROS SIMPLES, COMPOSTOS E CONTÍNUOS

## JUROS SIMPLES

### Conceito e Equações

A formulação de juros simples afirma que os juros são pagos sobre o valor presente original da operação financeira. As equações são as do **Objeto 3**.

**Objeto 3. Equações de juros simples.** VF: valor futuro. VP: valor presente. n: número de períodos (tempo). i: taxa de juros, que deve estar na mesma unidade do tempo.

para encontrar	equação
valor futuro	$VF = VP(1 + i \cdot n)$
valor presente	$VP = \frac{VF}{(1 + i \cdot n)} = VF(1 + i \cdot n)^{-1}$
taxa de juros	$i = \left( \frac{VF}{VP} - 1 \right) \frac{1}{n}$
período	$n = \left( \frac{VF}{VP} - 1 \right) \frac{1}{i}$

### Utilização

Os juros simples são uma simplificação útil em alguns casos em que seu uso causa distorções pequenas e em que a simplicidade do cálculo é bem vinda:

- Operações de pequenas empresas ou pessoas físicas, em que a maior complexidade dos juros compostos dificulta o entendimento do cálculo. Se houver necessidade, as distorções provocadas pelo uso de juros simples podem ser corrigidas pela imposição de taxas mais altas.
- Operações simplificadas, em que a velocidade de cálculo mental é mais importante que a precisão do resultado. Se for desejável, a imprecisão pode ser corrigida por um recálculo posterior.
- Operações com taxas muito baixas, como as tipicamente utilizadas no exterior.
- Operações com prazos curtos, tipicamente de até um ano, em que a imprecisão é de pouca importância.

- Operações com prazo fracionário inferior ao nominal da taxa, em que a imposição da formulação de juros simples dá ganhos ao credor sobre o devedor.

### Polêmica Judicial

No meio judiciário, muitas dívidas seguem a formulação dos juros simples ao invés dos compostos, que são condenados sob o nome de [anatocismo](#) (Vieira Sobrinho, 2012):

- Uma explicação é a antiguidade de alguns conceitos até hoje prevalentes. Em uma fase da idade média, os juros eram proibidos pela igreja (dinheiro copula com dinheiro e gera mais dinheiro, o que é uma abominação e um pecado), como são proibidos no islã (receber juros é como fornicar 36 vezes) e eram ora permitidos ora proibidos em várias civilizações da antiguidade. Após o século 16, os juros foram permitidos pela igreja, mas os juros compostos continuaram a ser, em alguns países mais atrasados, ainda proibidos.
- Outra explicação são os elevados prazos que o judiciário pode levar para julgar uma ação, que, nos casos mais difíceis e de valores mais elevados, podem ser de décadas. Com os elevados juros praticados nas décadas passadas e com prazos judiciais tão dilatados, algumas dívidas podiam crescer astronomicamente, fora da realidade econômica que as gerou. A solução que o judiciário encontrou para mitigar um problema por ele causado foi encontrar uma racionalização que devolvesse o valor das dívidas a valores viáveis, conquanto severamente imprecisos. O uso de juros simples foi uma forma de combater uma distorção com outra, gerando graves imprecisões e prejudicando pelo menos uma das partes.

## JUROS COMPOSTOS

### Conceito

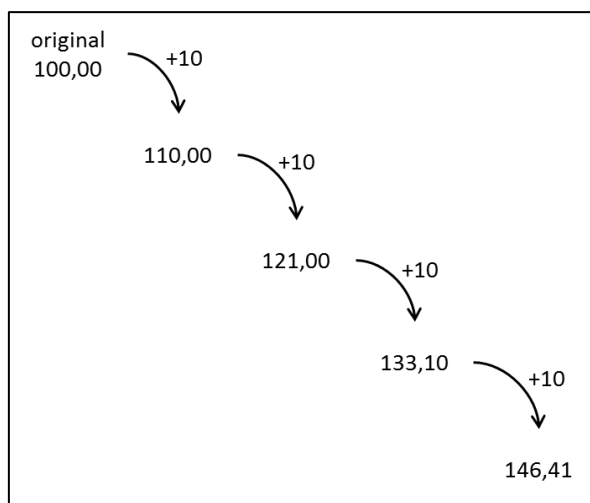
A matemática financeira é a dos juros compostos (ou cumulativos, ou juros sobre juros). A formulação de juros composto pressupõe que os juros são pagos sobre o valor presente original já adicionado dos juros anteriores.

O investidor aplica um principal, o recebe de volta com juros e reaplica o principal e os juros recebidos. Como na segunda etapa investe o principal original mais os juros da primeira, recebe juros sobre ambos. São sucessivas reaplicações do principal e dos juros recebidos anteriormente. Naturalmente, não há necessidade de efetivar o recebimento dos juros e reinvesti-los, bastando que sejam reconhecidos.

A mesma coisa acontece em operações com dívidas, que nada mais são do que investimentos para a outra parte.

O **Objeto 4** mostra a acumulação de juros que caracteriza os juros compostos.

**Objeto 4. Juros sobre juros.** Valor original (presente) de 100, aplicado sucessivamente a uma taxa de 10%. Os juros são compostos: o montante aplicado em um período subsequente é o aplicado no período anterior, acrescido de juros.



Se a taxa de juros e o prazo forem elevados, o valor futuro pode atingir montantes muito altos (**Desafio 15:** O que vale mais: \$ 1,00 ou \$ 1 milhão?). Por isso é tão importante fazer cálculos de longo prazo a taxas que efetivamente sejam realistas no futuro (às vezes distante), mesmo que muito maiores ou menores que as de curto prazo vigentes em cada época.

## Equações

A formulação de juros compostos pressupõe, corretamente, que os juros devidos em um período passam a compor o patrimônio do credor. Esse novo valor, que já é de propriedade do credor é que é reinvestido, gerando novos juros. São os juros sobre juros.

Embora o conceito seja muito antigo, a sua formalização moderna é atribuída a Fischer (2014?). As equações são as do **Objeto 5**.

**Objeto 5. Equações de juros compostos.** VF: valor futuro. VP: valor presente. n: número de períodos (tempo). i: taxa de juros, que deve estar na mesma unidade do tempo.

para encontrar	equação
valor futuro	$VF = VP(1 + i)^n$ (1)
valor presente	$VP = \frac{VF}{(1+i)^n} = VF(1 + i)^{-n}$ (2)
taxa de juros	$i = \left(\frac{VF}{VP}\right)^{\frac{1}{n}} - 1$ (3)
período	$n = \frac{\ln\left(\frac{VF}{VP}\right)}{\ln(1+i)}$ (4)

Quando o tipo de taxa de juros é compatível com a formulação dos juros compostos, diz-se que é uma taxa efetiva. Embora também lide com outras formulações de taxas de juros, a matemática financeira é focada nos juros compostos.

Três décadas de inflação e juros muito elevados geraram uma cultura de juros compostos no Brasil, especialmente no setor financeiro e em operações de finanças corporativas. Depois de vencida a barreira do aprendizado de uma formulação mais difícil, não há motivo para se retornar às distorções trazidas pelos juros simples.

Embora quase sempre se fale de valor presente e valor futuro, é possível (e às vezes muito útil) obter o valor equivalente a um fluxo de caixa em qualquer data. Para levar um fluxo de uma data mais distante para outra mais próxima, é só calcular o valor presente com o número de períodos entre elas (**Desafio**, 16: mostre que um valor presente calculado com um período  $n = n_1 + n_2$  é o mesmo que um trazido a valor presente pelo período  $n_1$  e mais uma vez pelo período  $n_2$ ). O mesmo é feito com o valor futuro se for necessário converter um fluxo de caixa próximo no seu equivalente mais distante.

### Juros Compostos nas Calculadoras e Planilhas

Para facilitar os cálculos, calculadoras financeiras e planilhas têm essas equações automatizadas. O **Objeto 6** mostra os procedimentos para fazer esses cálculos. Naturalmente, eles também podem ser feitos com a utilização das fórmulas mostradas no **Objeto 5** acima.

**Objeto 6. Cálculo com a formulação de juros compostos usando calculadoras financeiras e planilhas.** Os fluxos de caixa devem ser digitados com sinal positivo para entradas de caixa e sinais negativos para saídas de caixa. Na calculadora, os dados de entrada podem ser imputados em qualquer ordem, mas o de saída deve ser o último. A calculadora deve ter as suas memórias apagadas antes de se iniciar a digitação.

para obter	na calculadora	na planilha
VF (valor futuro)	digitar o VP e pressionar <b>PV</b> digitar a taxa e pressionar <b>I</b> digitar o prazo e pressionar <b>n</b> pressionar <b>FV</b>	=VF(taxa; prazo; 0; VP)
VP (valor presente)	digitar o VF e pressionar <b>FV</b> digitar a taxa e pressionar <b>I</b> digitar o prazo e pressionar <b>n</b> pressionar <b>PV</b>	=VP(taxa; prazo; 0; VF)
i (taxa)	digitar o VP e pressionar <b>PV</b> digitar o VF e pressionar <b>FV</b> digitar o prazo e pressionar <b>n</b> pressionar <b>I</b>	=TAXA(prazo; 0; VP; VF)
n (número de períodos)	digitar o VP e pressionar <b>PV</b> digitar o VF e pressionar <b>FV</b> digitar a taxa e pressionar <b>I</b> pressionar <b>n</b>	=NPER(taxa; 0; VP; VF)

As calculadoras financeiras já foram muito importantes para fazer estas contas. Hoje em dia, cálculos financeiros são feitos predominantemente em planilhas ou até em sistemas formais. As calculadoras financeiras servem para ter aula (e fazer prova) e para fazer as 4 operações básicas (mais alguma potenciação). Uma calculadora científica também pode ser utilizada (apli-

cando as fórmulas), mas a sua operação é lenta e repetitiva, portanto cara e sujeita a erros, em aplicações como obtenção da taxa com PGTO, TIR e repetição de fluxos em VPL.

Em algumas calculadoras é necessário fazer uma preparação para que ela possa fazer todas ou algumas das operações com juros compostos. Alguns casos típicos são mostrados no **Objeto 7**. As planilhas não têm esses problemas.

**Objeto 7. Inicialização de calculadoras financeiras.** Para algumas calculadoras, a descrição da situação em que o problema ocorre, a descrição do problema que ocorre se a preparação adequada não tiver sido implementada, a preparação necessária e a informação que a calculadora fornece para que o usuário possa verificar se a preparação foi implementada.

calculadoras	situação	descrição	preparação necessária	verificação da preparação
HP12C	período fracionário como variável de entrada	gera resultado incorreto	apertar em sequência: <b>STO</b> e <b>EE</b>	o visor tem um pequeno C
HP12C	período fracionário como variável de saída	arredondamento para cima (3,001 vira 4,000)	não há solução, devendo ser calculada pela fórmula	nihil
HP12C	sempre	grande demora no cálculo do VPL e da TIR (fica running)	não há solução, sendo uma característica das máquinas da década de 1970	nihil
HPs mais modernas que a HP12C (todas as demais) e a maioria das demais marcas	sempre	considera que a taxa é anual linear e a divide por 12	colocar 1 em <b>P/YR</b>	ao ligar, visualiza-se 1 P/YR
todas	ficam resíduos da operação anterior	os resíduos da operação anterior podem ser considerados parte dos dados da nova operação	apagar todas as memórias antes de começar	nihil

## JUROS CONTÍNUOS

A formulação de juros contínuos simplifica a realidade ao imaginar que os juros são pagos em regime contínuo, em frações de tempo infinitesimais. As equações são as do **Objeto 8**.

**Objeto 8. Equações de juros contínuos.** VF: valor futuro. VP: valor presente. t: tempo. r: taxa de juros contínua, que deve estar na mesma unidade do tempo.

para encontrar	equação
valor futuro	$VF = VP e^{rt}$
valor presente	$VP = VF e^{-rt}$
taxa de juros	$r = t^{-1} \ln(VF.VP^{-1})$
período	$t = r^{-1} \ln(VF.VP^{-1})$

Na realidade os juros são diários, pagos ao final de cada dia útil. A formulação dos juros contínuos pressupõe que existe um mercado de juros dentro do dia (intra day), o que geralmente não é verdade. Entretanto, esta simplificação é útil na precificação de ativos (como opções) quando é utilizada uma abordagem algébrica (cálculo).

A simplificação pode ser inócua, gerando resultados idênticos aos dos juros compostos. Pode-se afirmar, e muitos textos o fazem, que a formulação de juros contínuos é apenas um caso particular, um limite, dos juros compostos. Para isso, devem ser tomados os devidos cuidados:

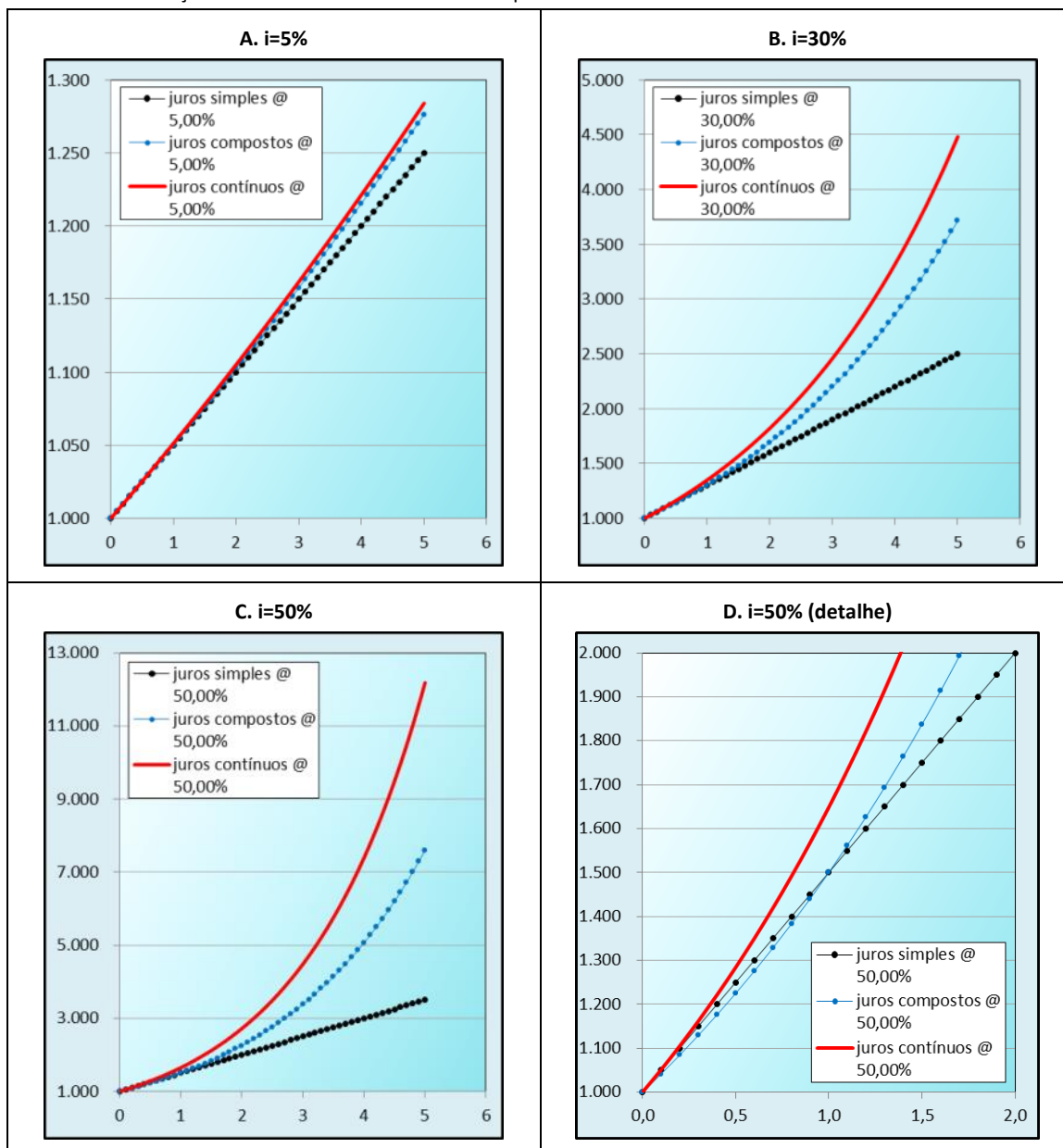
- A aplicação concreta deve levar em conta apenas dias inteiros e não suas frações.
- A taxa deve ser convertida da formulação de juros compostos ( $i_{\text{compostos}}$ ) para a de juros contínuos ( $i_{\text{contínuos}}$ ), segundo a equação:

$$i_{\text{contínuos}} = \ln(1 + i_{\text{compostos}})$$

## COMPARAÇÃO DE JUROS SIMPLES, COMPOSTOS E CONTÍNUOS

Os gráficos do **Objeto 9** mostram o crescimento do valor futuro de \$ 1.000 no tempo, segundo as três formulações apresentadas acima. O Painel A mostra o valor futuro para uma taxa de juros relativamente baixa. Note-se a pouca diferença entre as três formulações. Entretanto, se o período for muito longo, essa diferença crescerá significativamente.

**Objeto 9. Comparação do valor futuro para juros simples, compostos e contínuos.** Valor futuro de \$ 1.000 como função do prazo. Por serem discretos, os juros simples e os compostos geram valores futuros discretos. Painel A: taxa de 5%. Painel B: taxa de 30%. Painel C: taxa de 50%. Painel D: taxa de 50% e escala de tempo até 2 períodos. Observe-se a mudança da escala do valor futuro entre os painéis.



Os Painéis B e C mostram o mesmo gráfico para taxas de juros mais elevadas, em que as diferenças entre as três formulações já são gritantes. A formulação de juros simples apresenta uma linha reta e a de juros compostos uma exponencial fortemente acentuada. É a famosa bola de neve.

Note-se que se a taxa de juros contínuos for convenientemente ajustada (de 5,00% para 4,88%, de 30,00% para 26,24% e de 50,00% para 40,55%) a curva de juros contínuos torna-se indistinguível da de juros compostos.



O gráfico do Painel D é o mesmo do Painel C, com destaque para os primeiros 2 períodos. Note-se que o valor futuro com juros compostos é maior que aquele com juros simples apenas a



partir do encerramento do primeiro período. Em períodos menores que a unidade em que a taxa é medida, o valor futuro com juros simples é que é maior.

## ATIVIDADES

Os exercícios são aplicações diretas (mais matemática simples do que finanças) das técnicas apresentadas no capítulo (podem ser usados conceitos de capítulos anteriores). Os problemas já têm enunciados com algum contexto e, em algumas situações, um pouco de dificuldade. Os casos reais trazem situações de aplicação colhidos (e simplificadas) da realidade e são escritos de modo a trazer uma forte impressão do contexto em que ocorreram e permitir fazer os cálculos necessários. Alguns casos podem ser difíceis.

Os exercícios, problemas e casos resolvidos (em planilha) estão assinalados com . Nem sempre os exercícios, problemas e casos exigem cálculos, podendo se resumir a aplicações dos conceitos desenvolvidos no capítulo. Em todas as atividades utilize juros compostos, exceto se houver informação em contrário. Algumas atividades podem ser longas (por envolverem muitos períodos), mas são repetitivas (as equações em cada período são as mesmas). Alguns exercícios e problema são continuação de anteriores, caso em que são assinalados com . Os exercícios, problemas e casos podem trazer (e frequentemente trazem) elementos de capítulos anteriores, que são considerados conhecidos.

## Exercícios

A tabela a seguir contém uma série de exercícios. Para cada um deles, calcule (juros compostos discretos) o dado faltante (indicado com ???). Se utilizar calculadora financeira ou planilha, não se esqueça de respeitar os sentidos dos fluxos de caixa.

#	VP	VF	i	n
17.	100,00	???	10,0%	4
18.	100,00	???	10,0%	8
19.	2.590,15	???	1,79%	12
20.	1.000	???	0,50%	12
21.	???	100.000	1,71%	18
22.	???	3,5415	0,0418%	10
23.	???	8.500	15,80%	10
24.	120,00	150,00	???	6
25.	7.000	12.000	???	21
26.	1.800	1.810	???	15
27.	35.000	38.500	2,0%	???
28.	15,91	22,00	2,5%	???
29.	100.000	105.000	1,0%	???
30.	100.000	105.200	1,0%	???

31. 📌 Refaça os exercícios anteriores (de toda a tabela) utilizando juros simples. Observe a diferença de resultados e comente.
32. 📌 Refaça os últimos quatro exercícios, calculando o valor futuro a partir do valor presente e taxa do enunciado e do número de períodos calculado (pode haver problemas se a calculadora for a HP12C).

### Problemas

33. Calcule o valor futuro de \$15.876, 92, após 2 meses, à taxa de 17,85% a.m..
34. Calcule o valor futuro de \$10.000,00, após 4,5 meses, à taxa de 10% a.m..
35. Calcule o valor presente de \$10.000,00, após 4 meses, à taxa de 8,31% a.m..
36. Calcule o valor presente de \$8.750,00, após 15 dias úteis, à taxa de 0,0987% a.d.u..
37. Calcule o valor presente de \$8.670.000,00, após 15 dias úteis, que (neste caso) são 22 d.c., à taxa de 0,0987% a.d.c..
38. Calcule a taxa para um valor presente de \$15.000 e um valor futuro de \$16.000 e prazo de 3 meses.
39. Calcule a taxa para um valor presente de \$80.000 e um valor futuro de \$81.000 e prazo de 12 dias úteis.
40. Calcule o prazo para um valor presente de \$750.000 e um valor futuro de \$800.000 e taxa de 2,1% a.m..
41. Calcule o prazo para um valor presente de \$320.000 e um valor futuro de \$1.000.000 e taxa de 25,45% a.a..
42. Usando juros simples, calcule o valor futuro de \$100,00, após 24 meses, à taxa de 10% a.m..
43. Usando juros compostos, calcule o valor futuro de \$100,00, após 24 meses, à taxa de 10% a.m..
44. Compare os resultados dos dois exercícios anteriores e explique a diferença obtida.
45. Com uma taxa de 10% a.a., o que vale mais: \$ 10 mil hoje ou \$ 100 mil dentro de 20 anos? E à taxa de 15% a.a.?
46. Um título paga valores como os da tabela a seguir. À taxa de 14% a.a., qual é o valor presente destes pagamentos?

ano	FC
-	1.000
1	5.000
2	3.000
3	8.000
4	4.000
5	6.000


47. 📌 Um banco quer lhe vender o título acima por \$ 20 mil. Àquela taxa, é um bom negócio para você?
48. Se você tomou emprestados \$10 mil há 6 meses à taxa de 2,5% a.m., quanto deve hoje?
49. De quanto dinheiro você precisa hoje para, aplicando-o a uma taxa de 1,35% a.m. por 15 meses, ter \$40 mil?
50. Um agiota propôs emprestar os \$10 mil necessários a uma cirurgia. Quer que, após três meses, você lhe devolva \$14 mil. Qual é a taxa de juros desta operação?
51. 📌 Vale a pena?
52. Elabore o gráfico do valor futuro em função do prazo para Juros simples às taxas de 1%, 5%, 15% e 50%.
53. 📌 Elabore o gráfico do valor futuro em função do prazo para Juros compostos às taxas de 1%, 5%, 15% e 50%. Compare com o gráfico anterior.

54. A Sabrina emprestou \$500 ao Alex por 3 meses à taxa de 1% ao mês. Quanto o Alex deve pagar ao final do período?

55. Desse valor, quanto corresponde ao principal e quanto aos juros?

56. Um título paga valores como os da tabela a seguir. À taxa de 14% a.a., qual é o valor presente destes pagamentos?

ano	FC
-	1.000
1	5.000
2	3.000
3	8.000
4	4.000
5	6.000


57.  Um banco quer lhe vender o título acima por \$ 20 mil. Àquela taxa, é um bom negócio para você?

58. O Paulo comprou um lote de ações por \$12.000 e, após 6 meses, o vendeu por \$18.000. Qual foi a taxa de retorno mensal?

59. A Beth aplicou \$1.000 por 3 anos à taxa de 12% ao ano. Quanto ela terá ao final?

60. O Paulo pegou emprestados \$800 por 4 meses e devolveu \$900. De quanto foi a taxa que pagou?

61. A Cristiane ganhou R\$1.000 (BRL 1.000) em dólares. Como o dólar está subindo, ela acha que logo poderá comprar o notebook que tanto deseja, que custa BRL 1850. O dólar está subindo à taxa de 5% ao mês. Se continuar a subir nesse ritmo, quanto tempo ela precisará esperar?

62.  No problema anterior, quais os riscos da Cristiane?

### Caso: vender o imóvel agora ou mais tarde?

*Juros compostos. Valor presente. Valor futuro. Taxa de juros. Decisão de preço de venda de ativo.*



Isto aconteceu com um amigo meu. O Jonathan tem um imóvel que consegue vender por \$400.000 em um ano. Ele acabou de receber uma aviltante oferta de apenas \$375.000. Sabendo-se que ele aplica seu dinheiro a 10% ao ano, é melhor pegar a oferta ou esperar um ano?

63. Calcule o valor presente dos \$400.000 e compare o resultado com os \$375.000 no ato.

64. Calcule o valor futuro dos \$375.000 e compare o resultado com os \$400.000 possíveis.

65. Calcule a taxa de juros que leva \$375.000 a \$400.000 e compare-a com a taxa de mercado de 10%.

66. As três soluções acima levam à mesma decisão?

67. Quais os riscos do Jonathan?

### Caso: Petrobrás e o reajuste da gasolina

*Juros compostos. Taxa de juros. Valor futuro. Decisão de investimento em ações.*



Em setembro de 2010, a Petrobrás emitiu e vendeu ao público \$24 bilhões de reais em ações novas (o governo integralizou a sua parte com direitos de exploração de petróleo, ou seja, não pôs dinheiro vivo) por \$26,30 cada ação (preferencial). Os investidores nacionais e internacionais compraram, atraídos pela expectativa altamente positiva das novas jazidas no pré-sal. Logo depois, o governo mudou de ideia e decidiu congelar o preço da gasolina, derrubando a expectativa de lucro da Petrobrás (sempre tome cuidado redobrado com ações de estatais). A ação despencou e chegou, em fevereiro de 2014, a \$14,30.

68. Qual foi a taxa mensal de retorno (negativa) das ações da Petrobrás no período?

69. De quanto deve ser o retorno mensal do investimento em ações da Petrobrás para que, em 12 meses, seja recuperado o valor inicial?

70. Se o preço da ação da Petrobrás começar a aumentar à taxa de 3,0% ao mês, em quantos meses será atingido o seu preço original?

### Caso: boas intenções

*Juros compostos. Valor presente. Valor futuro. Decisão de taxa de empréstimo.*



Seu Chico, morador de uma pequena cidade, ajudava os amigos necessitados com empréstimos. Em contrapartida, pedia apenas que devolvessem o valor emprestado com os mesmos juros da caderneta de poupança. Era época de inflação e a taxa mensal de juros era algo como 5%. A taxa de inadimplência era nula, mas ele fazia todas as contas no regime de juros simples.

71. Qual o valor futuro de um empréstimo de \$300 por 4 meses (juros compostos)?

72. Qual o mesmo valor futuro se os cálculos forem feitos no regime de juros simples?

73. Qual a perda do Seu Chico (no futuro)?

74. Qual o valor presente da perda?

75. Explique a perda em linguagem muito simples (primário completo).

76. O que deveria ter sido feito para evitar a perda?

### Caso: juros no Judiciário

*Juros compostos. Valor presente. Valor futuro. Taxa de juros. Efeito de decisão judicial.*



Uma empresa (cujo nome não pode ser revelado) tem uma causa judicial que já leva 35 anos (e ainda está na primeira instância). O valor original da dívida é de \$350 milhões (ignore a inflação) e os juros, determinados em juízo, são de 1% a.m. (além da inflação, que estamos ignorando porque os valores estão em moeda real). Por se tratar de uma causa judicial, esses juros são simples.

77. Qual o valor atual dessa dívida (valor futuro, por juros simples)?

78. Qual seria o valor atual dessa dívida, à mesma taxa determinada judicialmente, se o judiciário aceitasse os juros compostos?

79. A essa taxa, qual o montante (em termos atuais) que foi transferido pelo judiciário do credor para o devedor?

80. Provavelmente uma taxa de juros reais de 3,0% a.a. seja mais consistente a longo prazo com uma economia como a brasileira, se estabilizada. A essa taxa e com juros compostos, qual é o montante atual da dívida?

81. Nesse caso, qual o valor transferido do credor para o devedor ou vice-versa?

82. O uso de uma taxa exageradamente alta para a operação compensou o malabarismo inconsistente dos juros simples?

### 3

## CONVERSÃO DE TAXAS

### TEMPORALIDADE DA TAXA DE JUROS

Uma taxa de juros é referente a um período de tempo e é expressa em função desse período, como mostrado na tabela do Objeto 10.

Objeto 10. Unidades temporais das taxas de juros. Conforme utilizadas no Brasil.

período	abreviatura usual	convenções usuais de conversão de unidades	principal utilização
dia corrido	% a.d.c.	360 d.c./ano, 365 d.c./ano, 30 d.c./mês	operações de curto prazo no sistema financeiro
dia útil	% a.d.u.	252 d.u./ano (taxa over)	operações de curto prazo no sistema financeiro
mês	% a.m.	12 m./ano	operações de médio prazo no varejo, inflação
bimestre	% a.bim.	6 bim./ano	apenas em exercícios de matemática financeira
trimestre	% a.trim.	3 trim./ano	apenas em exercícios de matemática financeira
quadrimestre	% a. quadr.	3 quadr./ano	apenas em exercícios de matemática financeira
semestre	% a. sem.	2 sem./ano	apenas em exercícios de matemática financeira
ano	% a.a.	-	discussões macroeconômicas, operações de longo prazo, inflação, custo de capital, retorno de projetos de investimento

É comum se dizer que os padrões de ano com 360 dias e mês de 30 dias vêm do Egito antigo. A confirmar.

Aviso ocasionalmente necessário: Quase sempre, as taxas de juros são expressas sob a forma de porcentagem, mesmo quando o sinal de % não chega a ser escrito. O símbolo % significa apenas dividido por 100, como exemplificado no **Objeto 11**.

**Objeto 11. Significado e uso da porcentagem.** O símbolo  $\equiv$  denota identidade (não há operação matemática envolvida; é apenas outra forma de escrever a mesma coisa). O símbolo  $\boxed{i}$  representa um dos botões da calculadora.

definição de %	$10\% \equiv \frac{10}{100} = 0,10$
uso de % em uma expressão	$1 + 10\% = 1 + 0,1 = 1,10$
em uma planilha	para 10%, inputa-se ou calcula-se 0,10 em uma célula e formata-se a mesma como %
em uma calculadora financeira	para 10%, digita-se ou calcula-se 10 em $\boxed{i}$

## CONVERSÃO ENTRE TAXAS

### Conversão entre Taxas Simples

A conversão de taxas simples é trivial e é feita como qualquer conversão de unidades em outras áreas do conhecimento. O **Objeto 12** exemplifica a conversão de taxas de juros simples.

**Objeto 12. Exemplo de conversão de taxas simples.** Conversão de uma taxa de juros simples de 9,00% a.a. para % a.m. A convenção de dias por mês e ano pode ser diferente em outras operações.

abordagem	exemplo
direta	$i = 9,00\% \text{ a. a. } \times \frac{1 \text{ ano}}{12 \text{ meses}} = 0,75\% \text{ a. m.}$
passando pela taxa diária	$i = 9,00\% \text{ a. a. } \times \frac{1 \text{ ano}}{360 \text{ d. c.}} = 0,0250\% \text{ a. d. c.}$ $i = 0,0250\% \text{ a. d. c. } \times \frac{30 \text{ d. c.}}{1 \text{ mês}} = 0,75\% \text{ a. m.}$

Outro exemplo, útil apenas como exemplo didático é o da conversão de uma taxa de juros trimestral de 3,00% a.trim. para quadrimestral, o que é feito no **Objeto 13**.

**Objeto 13. Exemplo de conversão de taxas simples.** Conversão de uma taxa de juros simples de 9,00% a.a. para % a.m. A convenção de dias por mês e ano pode ser diferente em outras operações.

abordagem	exemplo
passando pela taxa anual	$i = 3,00\% \text{ a. trim. } \times \frac{4 \text{ trim.}}{\text{ano}} = 12,00\% \text{ a. a.}$ $i = 12,00\% \text{ a. a. } \times \frac{1 \text{ ano}}{3 \text{ quadr.}} = 4,00\% \text{ a. quadr.}$
direta	$i = 3,00\% \text{ a. trim. } \times \frac{4}{3} \text{ quadr./trim.} = 4,00\% \text{ a. quadr.}$

### Conversão entre Taxas Efetivas

A conversão de taxas de juros compostos exige mais atenção. O primeiro exemplo é o da conversão de uma taxa mensal de 0,50% a.m. em anual. Se os juros fossem simples bastaria multiplicá-la por 12 e obter 6% a.a. Como a taxa é efetiva, é necessário lembrar que os juros são

capitalizados. Uma forma útil de resolver o problema é perguntar quanto dinheiro haveria ao final do ano de \$ 1 for aplicado a 0,50% a.a. pelos 12 meses:

$$VF = VP(1 + i)^n = 1. (1 + 0,50\%)^{12} = 1,0617 = 1 + 6,17\%$$

A resposta é que, ao final de 12 meses, haveria o \$ 1 que foi aplicado mais 6,17%. Em outras palavras, a taxa efetiva de juros é de 6,17% a.a. (Desafio, 83: qual a taxa anual se o valor aplicado for de \$20?)

O segundo exemplo é da conversão de uma taxa de 9,00% a.a. em mensal. O exemplo do **Objeto 12** mostrou que, em juros simples, a resposta é 0,75% a.m. Inverte-se o raciocínio e pergunta-se qual o valor presente de \$ 1 mais 9%:

$$VF = VP(1 + i)^n$$

$$1 + 9,00\% = 1. (1 + i)^{12}$$

$$VP = (1 + 9,00\%)^{1/12} = 1,0072 = 1 + 0,72\%$$

Ao final de 1 mês, o \$ 1 se tornou equivalente a si mesmo mais 0,72%. Ou seja, a taxa de juros é de 0,72% a.m. Note-se que a taxa mensal efetiva é ligeiramente inferior à que seria se os juros fossem simples, o que ocorrerá sempre que o período for inferior a 1 na unidade original. Desafio, 84: reconverta a taxa mensal e anual (cuidado com os arredondamentos).

Outro caso é o da conversão de uma taxa de 3,00% a.trim. para quadrimestral, o que foi feito para juros simples no **Objeto 13**. Uma forma é converte para uma taxa anual e depois para uma quadrimestral:

$$i = (1 + 3,00\%)^4 - 1 = 12,55\% \text{ a. a.}$$

$$i = (1 + 12,55\%)^{1/3} - 1 = 4,02\% \text{ a. quadr.}$$

A solução direta passa pela constatação que em um quadrimestre há 4/3 trimestres:

$$i = (1 + 3,00\%)^{4/3} - 1 = 4,02\% \text{ a. quadr.}$$

Em juros simples, as conversões tanto da taxa como do prazo são lineares. Em juros compostos, a conversão do prazo continua sendo linear, mas a da taxa passa a ser exponencial.

Já em juros contínuos, a conversão de taxas novamente é linear, mas não há notícia de aplicações concretas em que isso seja feito. Talvez em algum exercício de matemática financeira em algum livro.

## CUSTO EFETIVO TOTAL

Muitas vezes a taxa de juros contratada é apenas um dos custos ou benefícios de uma operação financeira. Considere o exemplo de um empréstimo que tem os recebimentos e pagamentos apresentados no **Objeto 14**.

**Objeto 14. Exemplo de custo efetivo total em operação de empréstimo.** CET de uma operação de 1 mês, contratada à taxa de 1,50% a.m.

<b>momento</b>	<b>descrição do pagamento / recebimento</b>	<b>valor</b>	<b>entrada / saída de caixa</b>
instante 0	recebimento do principal	100.000,00	entrada
	tarifa de abertura de crédito (TAC)	-1.000,00	saída
	<b>VALOR PRESENTE (entrada de caixa)</b>	<b>99.000,00</b>	entrada
ao final do mês 1	pagamento do principal	-100.000,00	saída
	pagamento dos juros	-1.500,00	saída
	pagamento do imposto (IOF)	-385,70	saída
	<b>VALOR FUTURO (saída de caixa)</b>	<b>-101.885,70</b>	saída
<b>CUSTO EFETIVO TOTAL (<math>i = VF/VP - 1</math>)</b>			<b>2,91% a.m.</b>

No exemplo, a taxa contratual de 1,50% a.m. (que equivaleria a uma taxa de 19,6% a.a.) foi transformada em um custo efetivo total (CET) de 2,91% a.m. (ou 41,2 %a.a.) pela existência de tarifa bancária e do imposto. O CET é o quanto a pessoa paga efetivamente e é o custo da operação.

## TAXA REAL

Muitas vezes, há interesse em se conhecer o quanto uma taxa de juros ou de retorno é superior à inflação, a taxa real.

Um exemplo. Um contrato garante um pagamento de 11% acima da inflação, que foi de 9%. A simples soma, como seria feito na formulação e juros simples, daria 20%. Na verdade, a remuneração de 11% deve ser aplicada sobre o valor já corrigido, como mostrado no **Objeto 15**.



**Objeto 15. Encadeamento da inflação e da taxa real.** Cálculo do valor futuro de \$ 1,00 corrigido por uma inflação de 9% e remunerado por uma taxa real de 11%.

etapa	cálculo	resultado	comentário
1ª: correção monetária pela inflação	$1 \cdot (1 + i_{infl})$ $= (1 + 9\%)$ $= 1,09$	um valor corrigido pela inflação de \$ 1,09	A correção monetária preserva o poder de compra original do dinheiro. Na média, o \$ 1,00 original comprava, na data original, o mesmo que \$ 1,09 compra hoje. Sem a correção monetária, haveria uma perda de poder aquisitivo de quem vai receber o dinheiro.
2ª: remuneração real	$1,09 \cdot (1 + i_{real})$ $= 1,09(1 + 11\%)$ $= 1,2099$	um valor final de \$ 1,2099	Os juros reais são calculados sobre o valor já corrigido. Com isso, quem recebe pode comprar 11% a mais do que podia na data e com o dinheiro original.

Note-se que, com a simples adição de inflação e juros reais, a taxa nominal resultante seria de 20%. Com a aplicação da inflação e da taxa real em duas etapas sucessivas, a taxa nominal passou a praticamente 21%.

A equação de Fischer (2014?) expressa a taxa nominal ( $i_{nom}$ ) como função da inflação ( $i_{infl}$ ) e da taxa real ( $i_{real}$ ):

$$(1 + i_{nom}) = (1 + i_{infl})(1 + i_{real}) \quad (5)$$

Diz-se que algo é nominal quando parece ser real (ou verdadeiro, ou efetivo), mas não o é: “o valor nominal da ação é \$ 1,00, mas o seu valor contábil é de \$ 3,00 e seu valor de mercado é \$ 17,00”, “o país X tem uma democracia nominal”, etc.

Naturalmente, a equação pode ser invertida. Um exemplo: Um investimento financeiro praticamente sem risco que rende interessantes 6,5% anuais é tão bom assim? A resposta é sim para os EUA, que têm uma inflação por volta dos 2,0%, mas não tanto para o Brasil, cuja inflação tem oscilado na região dos 6,0%.

Na formulação de juros simples, basta fazer uma conta de menos e encontrar uma taxa real de 4,5% a.a. Já com juros compostos, a solução é:

$$(1 + i_{nom}) = (1 + i_{infl})(1 + i_{real})$$

$$(1 + 6,50\%) = (1 + 6,00\%)(1 + i_{real})$$

$$i_{real} = \frac{(1 + 6,50\%)}{(1 + 6,00\%)} - 1 = 0,47\%$$

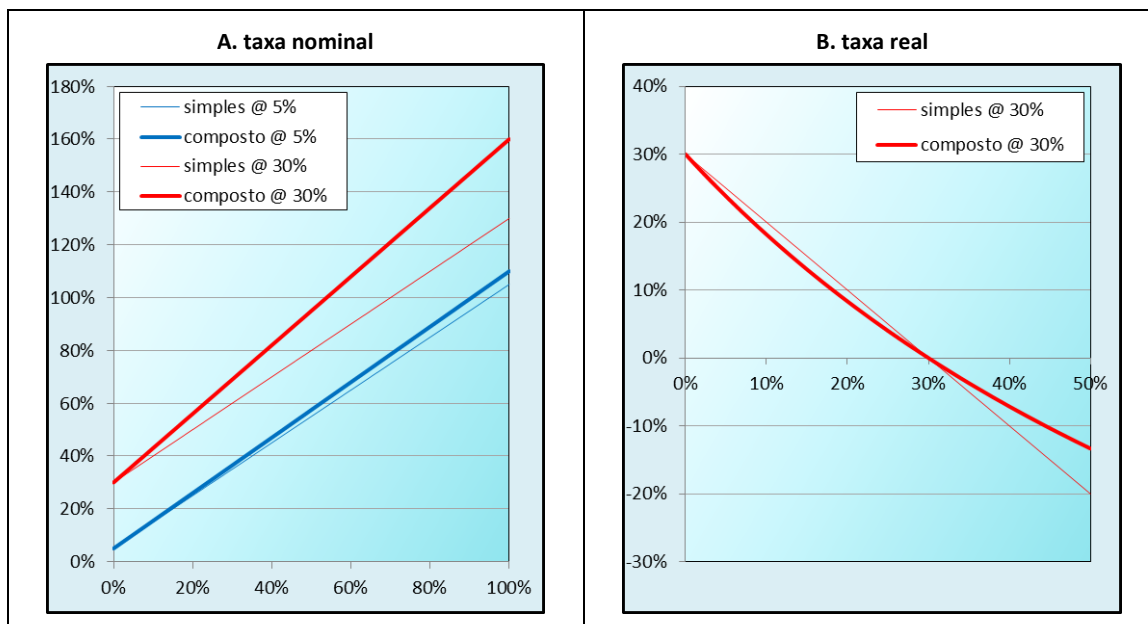
### Comparação entre Taxa Nominal e Real

Parece pouco barulho por nada, afinal são só 0,03% de diferença. E primeiro lugar há uma questão de escala: se o valor base for \$ 1 bilhão, a diferença são não extraordinários porém não

desprezíveis \$ 300 mil. Mas há um segundo fator, que são os tamanhos da inflação e da taxa real.

Se a inflação for baixa, a taxa nominal é próxima à soma simples da inflação e da taxa real. Entretanto, se a inflação é elevada, a distorção de usar a formulação de juros simples torna-se grande, como mostrado no **Objeto 16**.

**Objeto 16. Taxa nominal e taxa real.** Painel A: taxa nominal segundo as formulações de juros simples e compostos em função da inflação, taxas reais de 5% e de 30%. Painel B: taxa real segundo as formulações de juros simples e compostos em função da inflação, para uma taxa nominal de 30%. Observe-se a mudança da escala em ambos os eixos.





O Painel A mostra a taxa nominal como função da inflação. Nota-se a pouca diferença entre a taxa nominal pela formulação de juros simples e compostos quando a taxa real é baixa. Entretanto, quando a taxa real é expressiva, a diferença entre elas torna-se também expressiva.

O Painel B mostra a taxa real como função da inflação. Observa-se que enquanto a taxa nominal é inferior à da inflação, a taxa real segundo a formulação de juros compostos é menor que nos juros simples. A partir desse ponto a relação entre ambas se inverte. Para uma inflação elevada, a formulação de juros simples indica que a taxa real se tornaria menor que -100%, absurdamente implicando que a inflação poderia fazer o indivíduo perder mais do que o total do seu dinheiro (ficaria devendo). Alternativamente, na formulação de juros compostos, a taxa real tende assintoticamente a -100%, nunca chegando a consumir todo o valor. De fato, a inflação, agindo isoladamente, pode reduzir o poder de compra de um montante, mas nunca convertê-lo em dívida.

## ATIVIDADES

Os exercícios são aplicações diretas (mais matemática simples do que finanças) das técnicas apresentadas no capítulo (podem ser usados conceitos de capítulos anteriores). Os problemas já têm enunciados com algum contexto e, em algumas situações, um pouco de dificuldade. Os

casos reais trazem situações de aplicação colhidos (e simplificadas) da realidade e são escritos de modo a trazer uma forte impressão do contexto em que ocorreram e permitir fazer os cálculos necessários. Alguns casos podem ser difíceis.

Os exercícios, problemas e casos resolvidos (em planilha) estão assinalados com . Nem sempre os exercícios, problemas e casos exigem cálculos, podendo se resumir a aplicações dos conceitos desenvolvidos no capítulo. Em todas as atividades utilize juros compostos, exceto se houver informação em contrário. Algumas atividades podem ser longas (por envolverem muitos períodos), mas são repetitivas (as equações em cada período são as mesmas). Alguns exercícios e problema são continuação de anteriores, caso em que são assinalados com . Os exercícios, problemas e casos podem trazer (e frequentemente trazem) elementos de capítulos anteriores, que são considerados conhecidos.

## Exercícios

A tabela a seguir contém uma série de exercícios. Para cada um deles, converta a taxa de uma unidade para a outra (juros compostos discretos). Para facilitar a padronização das respostas, é fornecido o número de períodos.

#	converter de	para	n
85.	1,3% a.m.	% a.a.	12
86.	0,1301% a.d.c.	% a.m.	30
87.	0,1301% a.d.u.	% a.m.	21
88.	0,1301% a.d.c.	% a.a.	360
89.	0,1301% a.d.u.	% a.a.	252
90.	12,0% a.a.	% a.m.	12
91.	12,0% a.a.	% a.d.c.	360
92.	12,0% a.a.	% a.d.u.	252
93.	3,5% a.trim.	% a.sem.	2
94.	3,5% a.trim.	% a.quadr.	0,75

95. Refaça os exercícios anteriores (toda a tabela) utilizando juros simples. Observe a diferença de resultados e comente.

A tabela a seguir contém uma série de exercícios. Para cada um deles, calcule (juros compostos discretos) a taxa real, a nominal ou a inflação, conforme requerido (indicado com ???).

#	taxa de inflação	taxa real	taxa nominal
96.	1,30% a.m.	0,40% a.m.	???
97.	0,65% a.m.	???	1,11% a.m.
98.	???	0,15% a.m.	1,11% a.m.
99.	6,50% a.a.	0,50% a.a.	???
100.	15,81% a.a.	???	21,50% a.a.
101.	???	2,80% a.a.	8,54% a.a.


102. Refaça os exercícios anteriores (toda a tabela) utilizando juros simples. Observe a diferença de resultados e comente.


A tabela a seguir contém uma série de exercícios. Para cada um deles, calcule a taxa real, a nominal ou a inflação (juros compostos discretos), conforme requerido (indicado com ???). Note que há mudanças de unidades.

#	inflação	taxa real	taxa nominal
103.	1,30% a.m.	0,40% a.m.	??? % a.a.
104.	0,65% a.m.	??? % a.a.	1,11% a.m.
105.	??? % a.a.	0,15% a.m.	1,11% a.m.
106.	6,50% a.a.	0,50% a.a.	??? % a.m.
107.	15,81% a.a.	??? % a.m.	21,50% a.a.
108.	??? % a.m.	2,80% a.a.	8,54% a.a.
109.	1,30% a.m.	3,00% a.a.	??? % a.m.
110.	6,26% a.a.	??? % a.a.	1,11% a.m.
111.	??? % a.a.	9,97% a.a.	1,40% a.m.

## Problemas

112. Explique o significado do termo taxa real (em contraposição à taxa nominal).

113.  Explique o significado do termo efetiva (em contraposição à taxa nominal).

114.  O termo taxa nominal é usado com dois significados distintos: um em contraposição ao termo taxa real e outro em contraposição ao termo taxa efetiva. Explique esses dois significados.

115. Calcule o valor futuro de \$485.000, após 2 quadrimestres, à taxa de 10%% ao trimestre.

116. Calcule o valor futuro de \$18.000, após 1,5 meses comerciais (1 mês comercial = 30 dias corridos), à taxa de 0,1000%% ao dia corrido.

117. Calcule a taxa real, mensal e anual, para uma taxa nominal de 4,90% a.m. e uma inflação de 1,25% a.m.

118. Calcule a taxa real, mensal e anual, para uma taxa nominal de 28,56% a.m. e uma inflação de 25,00% a.m.

119. Calcule a taxa nominal, mensal e anual, para uma inflação de 5,00% a.m. e uma taxa real de 2,00% a.m..

120. Calcule a taxa nominal, mensal e anual, para uma inflação de 3,67% a.m. e uma taxa real de 30,0% a.m..

121. O salário de um indivíduo era de \$600,00 há 3 anos. Hoje é de \$950,00. Se a inflação foi de 12,5% a.a., de quanto foi ao aumento real anual?

122. Estamos em agosto de 1997. Um sindicato propôs um aumento salarial real de 3,5% a.a. entre agosto de 1994 (início do Plano Real) e julho de 1997. A inflação (IPCA) foi de 10,61% de agosto de 1994 a dezembro de 1994, de 23,17% em 1995, de 10,04% em 1996 e de 4,23% de janeiro a julho de 1997. Qual é o aumento nominal anual proposto?

123. A inflação oscila mês a mês, com um acumulado projetado em 6,5% a.a.. Um investidor que deseje uma taxa real de 5,0% a.a., deve obter que remuneração nominal mensal?

124. Uma empresa tem rentabilidade de 5% a.a. Seu retorno é adequado se a inflação for de 8% a.a.?

125. Diz-se que a caderneta de poupança (antiga) tinha uma rentabilidade de 6,00% ao ano (acima da TR). Sabendo-se que, na verdade, ela pagava 0,5% a.m., qual a sua taxa anual efetiva (acima da TR)?

126. Em um dado momento, a taxa do over (ou do overnight, ou taxa over) é de 12,51% a.a., para um ano padronizado em 252 dias úteis. Sabendo-se que um mês, também padronizado, tem 212 dias úteis, qual a taxa mensal equivalente?

127. Um banco emprestou \$3,2 milhões a uma taxa de 4,5% a.a. mais variação cambial, por um prazo de 5 dias corridos. Essa operação pressupõe um ano de 360 dias corridos. Quanto dinheiro será recebido do cliente ao final do prazo acordado?

128. No problema anterior, qual a taxa over (252 dias úteis no ano) da operação, supondo que os 5 dias sejam também úteis.

129. Um fundo ativo de ações deseja dar um retorno mínimo de 10,0% anuais acima da inflação. Sabendo-se que a taxa de inflação está projetada em 7,0% anuais, de quanto é a meta de retorno nominal mensal?

130. Uma aplicação financeira (CDB) de \$100 mil rendeu \$800 em um período de 15 dias corridos, que equivaleu a 9 dias úteis. Calcule a taxa da operação em três padrões: ao período, ao ano de 360 dias corridos e ao ano de 252 dias úteis.

131. No problema anterior, explique por que as duas taxas anuais são diferentes. Para qual proporção entre dias corridos e úteis as duas seriam iguais?

### **Caso: Plano Cruzado e a dança da taxa nominal**

*Inflação. Taxa nominal. Taxa real. Efeito de aumento de inflação.*



Lá nos idos de 1986, na vigência do Plano Cruzado, a inflação estava no patamar dos 3% a.m. já havia 7 meses. Entretanto, por conta da insegurança inicial com a receptividade popular do plano econômico, o governo havia regulamentado um aumento geral de salários que em média foi de 6,7%. Isto gerou um súbito aumento de demanda, um aumento da popularidade do governo e uma grande pressão inflacionária, represada pela proibição de reajustes, acompanhada da falta de vários produtos (tinha se tornado inviável produzi-los), pelo surgimento de um mercado negro (venda por baixo do pano com ágio sobre o preço autorizado; esse preço irregular não é considerado nos índices de inflação) e por repressão policial e midiática (manifestações fechando supermercados, caçada de bois no pasto pela Polícia Federal, etc.). As instituições financeiras financiavam o consumidor a taxas como de 7% a.m., acreditando que teriam suficiente folga para lidar com algum aumento da inflação. O congelamento foi sustentado até logo após as eleições. Em novembro, a inflação havia saltado, quase instantaneamente, para o patamar dos 20% a.m.. Algumas instituições financeiras quebraram.

132. Qual era a taxa real antes do súbito aumento da inflação?

133. Nesse cenário, qual o valor presente de um empréstimo de \$1.000 a devolver em parcela única após 6 meses?

134. Qual era a taxa real após o aumento?

135. Qual o valor presente do mesmo empréstimo após o aumento da inflação (mantenha os 6 meses)?

136. O que as instituições financeiras poderiam ter feito para evitar suas perdas?

### **Caso: Plano Collor e a dança da taxa real**

*Inflação. Taxa nominal. Taxa real. Efeito de aumento de inflação.*



Mais uma de plano econômico. Em fevereiro de 1990, a inflação estava nos 40% a.m. e os juros nominais (já líquidos do imposto de renda) de 45% a.m. (ninguém falava de inflação ou juros anuais). Em

março, o presidente recém-eleito baixou o Plano Collor I. A inflação de março (cortada ao meio pelo plano) era projetada em 80% a.m. e a de abril era esperada de 200% a.m. ou mais. O plano congelou os preços (mais uma vez), reteve (em princípio por dois anos) a maior parte do dinheiro das pessoas físicas e jurídicas (apenas o depositado em bancos) e liberou as importações (que eram praticamente impossíveis para a maioria dos produtos). A eliminação da liquidez travou a demanda e a inflação. A liberação das importações trouxe competição violenta e súbita para um parque industrial tecnologicamente defasado (a proteção do mercado e a oligopolização oficializada impediam a competição e, consequentemente, a modernização). O resultado foi a redução da inflação para quase zero e uma forte recessão econômica. Alguns anos depois, a inflação havia voltado e a recessão continuava. Não surpreendentemente, o presidente impopular foi afastado (impeachment, sob pretexto de corrupção) e o vice assumiu.

137. Qual a taxa real (em % a.m. e em % a.a.) em fevereiro.

138. Qual a taxa nominal esperada para março (sem o plano), se a taxa real (líquida) fosse a mesma.

139. Com uma inflação tão maior, é esperado que os investidores exijam uma taxa real maior (para compensar o risco) e que o governo aumente a taxa real (como medida de controle da inflação). Qual a taxa nominal esperada para março (sem o plano), se a taxa real (líquida) fosse o dobro ( $\times 2$ ) da encontrada no item anterior.

140. De quanto seria a taxa de juros nominal com a inflação esperada para abril (sem o plano) se a taxa real fosse a mesma do item anterior.

---

# **PARTE B**

## **SÉRIES DE PAGAMENTOS**

---

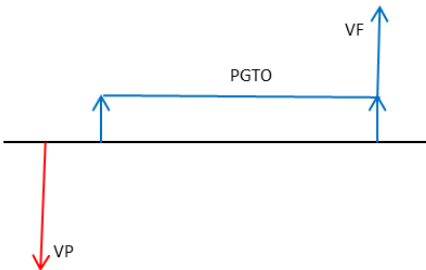
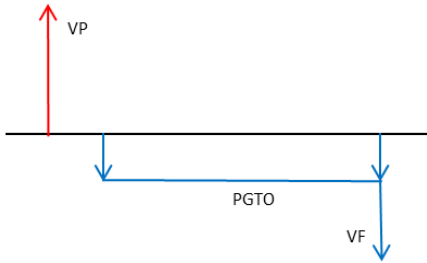

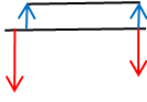


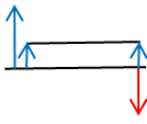

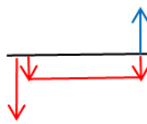
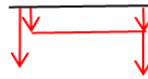
## 4

# PAGAMENTOS CONSTANTES

## PAGAMENTOS NO FINAL DO PERÍODO

Há uma classe de problemas de matemática financeira em que há um investimento seguido de uma série de recebimentos iguais. Naturalmente, invertendo o fluxo de caixa, passa a haver um recebimento seguido de uma série de pagamentos iguais. Em ambos os casos, pode ou não haver um valor futuro adicional, de qualquer sinal. O Objeto 17 traz os fluxos de caixa baseados em pagamentos constantes.

**Objeto 17. Fluxos de caixa com pagamentos constantes no final do período.** Painel A e seus subpainéis: fluxos de caixa baseados em uma série de entradas constantes. Painel B e seus subpainéis: fluxos de caixa baseados em uma série de saídas constantes.

A. fluxos de caixa baseados em entradas constantes		B. fluxos de caixa baseados em saídas constantes	
<b>Aa. fluxo de caixa convencional com entradas constantes</b> 		<b>Ba. fluxo de caixa convencional com saídas constantes</b> 	
<b>Ab. idem Aa sem VF</b> 	<b>Ac. idem Aa com VF invertido</b> 	<b>Bb. idem Ba com VF investido</b> 	<b>Bc. idem Ba com VF invertido</b> 
<b>Ad. Idem Aa com VP e VF invertidos</b> 	<b>Ae. Idem Aa com todos os fluxos positivos</b> 	<b>Bd. Idem Ba com VP e VF invertidos</b> 	<b>Be. Idem Ba com todos os fluxos negativos</b> 

Os Painéis Aa e Ba mostram os fluxos de caixa convencionais para, respectivamente, recebimentos e pagamentos constantes. Os Painéis Ab e Bb são casos particulares em que o valor futuro é nulo.



Os Painéis Ac, Ad, Bc e Bd refletem fluxos de caixa que têm baixa probabilidade de serem encontrados na prática. Dentre eles, os Painéis Ac, e Bc têm o valor futuro de mesmo sinal do valor presente e ambos diferentes dos pagamentos intermediários. Em certas situações, essa característica pode trazer problemas nos cálculos, questão que será abordada quando da discussão dos problemas da TIR.

Os Painéis Ae e Be têm fluxos todos de mesmo sinal, não refletem operações financeiras e não possibilitam o cálculo de uma taxa de juros.

O valor presente de uma série de pagamentos constantes e finitos pode ser calculado com a seguinte equação, demonstrada no **Objeto 18**. Note-se que a demonstração é semelhante à da soma de uma progressão geométrica. Desafio, 141: mostre que a série de fluxos de caixa a valor presente nada mais é do que uma PG.

$$VP = PGTO \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \quad (6)$$

**Objeto 18. Demonstração da fórmula do valor presente de um fluxo de caixa constante finito.** PGTO: valor de cada um dos pagamentos constantes.

Partimos da soma dos valores presentes das prestações

$$VP = \frac{PGTO}{(1+i)^1} + \frac{PGTO}{(1+i)^2} + \frac{PGTO}{(1+i)^3} + \dots + \frac{PGTO}{(1+i)^n} \quad (7)$$

Dividimos ambos os lados de (1) por (1+i)

$$\frac{VP}{(1+i)} = \frac{PGTO}{(1+i)^2} + \frac{PGTO}{(1+i)^3} + \dots + \frac{PGTO}{(1+i)^n} + \frac{PGTO}{(1+i)^{n+1}} \quad (8)$$

Subtraímos (8) de (7) e rearranjamos

$$VP - \frac{VP}{(1+i)} = \frac{PGTO}{(1+i)^1} - \frac{PGTO}{(1+i)^{n+1}}$$

$$VP \frac{i}{(1+i)} = \frac{PGTO}{(1+i)^1} - \frac{PGTO}{(1+i)^{n+1}}$$

$$VP = \frac{PGTO}{i} \left( 1 - \frac{1}{(1+i)^n} \right) = PGTO \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = PGTO \frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n} \quad (\text{c.q.d.})$$

As calculadoras financeiras e planilhas também têm essa equação automatizada, com procedimentos mostrados no **Objeto 19**.

**Objeto 19. Inclusão da série de pagamentos constantes no cálculo com calculadoras financeiras e planilhas.** Os fluxos de caixa devem ser digitados com sinal positivo para entradas de caixa e sinais negativos para saídas de caixa. Na calculadora, os dados de entrada podem ser imputados em qualquer ordem, mas o de saída deve ser o último. A calculadora deve ter as suas memórias apagadas antes de se iniciar a digitação.

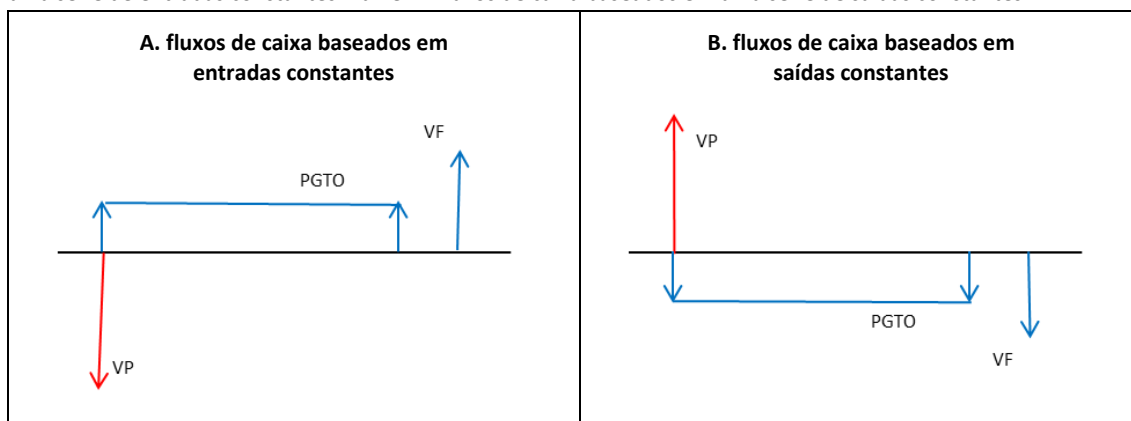
para obter	na calculadora	na planilha
VF (valor futuro)	digitar o VP e pressionar $\boxed{PV}$ digitar o PGTO e pressionar $\boxed{PMT}$ digitar a taxa e pressionar $\boxed{i}$ digitar o prazo e pressionar $\boxed{n}$ pressionar $\boxed{FV}$	=VF(taxa; prazo; PGTO; VP)
VP (valor presente)	digitar o VF e pressionar $\boxed{FV}$ digitar o PGTO e pressionar $\boxed{PMT}$ digitar a taxa e pressionar $\boxed{i}$ digitar o prazo e pressionar $\boxed{n}$ pressionar $\boxed{PV}$	=VP(taxa; prazo; PGTO; VF)
PGTO (pagamentos constantes)	digitar o VP e pressionar $\boxed{PV}$ digitar o VF e pressionar $\boxed{FV}$ digitar o PGTO e pressionar $\boxed{PMT}$ digitar a taxa e pressionar $\boxed{i}$ digitar o prazo e pressionar $\boxed{n}$	=PGTO(taxa; prazo; VP; VF)
i (taxa)	digitar o VP e pressionar $\boxed{PV}$ digitar o VF e pressionar $\boxed{FV}$ digitar o PGTO e pressionar $\boxed{PMT}$ digitar o prazo e pressionar $\boxed{n}$ pressionar $\boxed{i}$	=TAXA(prazo; PGTO; VP; VF)
n (número de períodos)	digitar o VP e pressionar $\boxed{PV}$ digitar o VF e pressionar $\boxed{FV}$ digitar o PGTO e pressionar $\boxed{PMT}$ digitar a taxa e pressionar $\boxed{i}$ pressionar $\boxed{n}$	=NPER(taxa; PGTO; VP; VF)

## PAGAMENTOS NO INÍCIO DO PERÍODO

Uma variante é quando os fluxos de uma série de pagamentos constantes ocorrem no início dos períodos e não ao seu final. É o que ocorre em uma venda parcelada com entrada, que é modelada com o pagamento do mês ocorrendo no início e não no fim do mês.

O **Objeto 20** mostra os fluxos de caixa equivalentes aos Painéis Aa e Ba do **Objeto 17**. Note-se que o instante do valor futuro não é alterado, pelo menos nas calculadoras financeiras e planilhas, pela antecipação do fluxo de pagamentos constantes.

**Objeto 20. Fluxos de caixa com pagamentos constantes no início do período.** Painel A: fluxos de caixa baseados em uma série de entradas constantes. Painel B: fluxos de caixa baseados em uma série de saídas constantes.



Os cálculos em calculadora e planilha são feitos da mesma forma que foi mostrada no **Objeto 19**, apenas com a adição da informação de que se trata de uma série de pagamentos antecipados. Nas calculadoras, deve-se inserir a informação, geralmente teclando **BEG** ou **BEGIN** antes de fazer o cálculo. Os cálculos serão feitos com as séries de pagamentos no início do período até que seja teclado **END**. Nas planilhas, deve-se incluir o número 1 ou o texto VERDADEIRO no último campo da função. Esse campo é opcional e pode ser omitido quando os pagamentos são ao final do período.

É possível, e as calculadoras e funções de planilhas fazem o cálculo, adicionar um valor futuro a uma série de pagamentos de início de período. Mas a virtual ausência de aplicações práticas, torna esse caminho pouco relevante.

Enquanto a variante de pagamentos ao final do período tem aplicações diversificadas, tanto em dívidas quanto em investimentos, os pagamentos no início do período praticamente estão limitados ao financiamento de compras no varejo. Isso ocorre nos casos em que o parcelamento é feito com a primeira parcela à vista, ou seja, com entrada. Há duas explicações para a preferência dos comerciantes em vender com entrada:

- A antecipação dos pagamentos em um mês (no varejo, quase todas as prestações são mensais) eleva a taxa efetiva de juros da operação, mantendo-se a taxa anunciada ao consumidor. Como pessoas físicas geralmente se perdem nas contas, não percebem que, na prática, estão pagando uma taxa mais alta que a anunciada. O Código de Defesa do Consumidor ([Lei 8.078, 1990](#)) exige o anúncio da taxa efetiva de uma venda a prazo, o que mitiga o problema (mas não o elimina, pois muitas lojas não seguem a legislação à risca). De qualquer forma, no Brasil, o consumidor de crédito de varejo parece ser pouco sensível às taxas de juros, concordando em pagar taxas muito elevadas.
- Uma explicação mais forte para a venda com entrada é o seu impacto positivo na probabilidade de receber as parcelas futuras. Clientes que não desejam pagar entrada são provavelmente os que trarão problemas na hora de pagar as parcelas. Portanto, exigir uma entrada é uma forma de selecionar a clientela: prefere-se os normais e descarta-se os que provavelmente serão maus pagadores.

Nas lojas, uma terminologia às vezes usada é a parcela de entrada ser separada das demais. Nada como um exemplo: se um lojista deseja comunicar que vende em 6 parcelas (obviamente mensais) e não cobra entrada, pode escrever “0 + 6”, indicando serem as 6 parcelas devidas no final dos respectivos meses. Em contraposição, havendo entrada mais 5 parcelas, o lojista escreveria as 6 parcelas como “1+5”, indicando que a primeira é no ato.

Normalmente, quando nada é dito, considera-se que os pagamentos são no final do período. As planilhas usam essa variante como default. Esse pressuposto pode ser invertido no contexto dos financiamentos no varejo. Neste caso, como em outros, os padrões dependem do contexto.

## ATIVIDADES

Os exercícios são aplicações diretas (mais matemática simples do que finanças) das técnicas apresentadas no capítulo (podem ser usados conceitos de capítulos anteriores). Os problemas já têm enunciados com algum contexto e, em algumas situações, um pouco de dificuldade. Os casos reais trazem situações de aplicação colhidos (e simplificadas) da realidade e são escritos de modo a trazer uma forte impressão do contexto em que ocorreram e permitir fazer os cálculos necessários. Alguns casos podem ser difíceis.

Os exercícios, problemas e casos resolvidos (em planilha) estão assinalados com 🧮. Nem sempre os exercícios, problemas e casos exigem cálculos, podendo se resumir a aplicações dos conceitos desenvolvidos no capítulo. Em todas as atividades utilize juros compostos, exceto se houver informação em contrário. Algumas atividades podem ser longas (por envolverem muitos períodos), mas são repetitivas (as equações em cada período são as mesmas). Alguns exercícios e problema são continuação de anteriores, caso em que são assinalados com 🔗. Os exercícios, problemas e casos podem trazer (e frequentemente trazem) elementos de capítulos anteriores, que são considerados conhecidos.

## Exercícios

A tabela a seguir contém uma série de exercícios, referentes a financiamentos do ponto de vista do tomador. Todas as séries de pagamento ocorrem ao final dos respectivos períodos. Para cada um dos exercícios, calcule o dado faltante (indicado com ???). Não se esqueça de respeitar os sentidos dos fluxos de caixa.

#	VP	PGTO	VF	n	i
142.	1.000,00	-150,00	0,00	8	???
143.	???	-300,00	0,00	10	1,05%
144.	60.000,00	???	0,00	36	1,90%
145.	1.500.000	-16.500	0	180	???
146.	???	-38,50	0,00	15	7,20%
147.	2.650,00	???	0,00	12	2,75%

148. 🔗 Refaça os cálculos da relação de exercícios acima, agora considerando que os pagamentos das séries ocorram no início dos períodos. Compare os resultados.

A tabela a seguir contém uma série de exercícios, referentes a financiamentos do ponto de vista do “do-ador” (banco, etc.). Todas as séries de pagamento ocorrem ao final dos respectivos períodos. Para cada um dos exercícios, calcule o dado faltante (indicado com ???). Não se esqueça de respeitar os sentidos dos fluxos de caixa.

#	VP	PGTO	VF	n	i
149.	???	1.250,00	0,00	6	3,50%
150.	7.000,00	1.000,00	0,00	10	???
151.	-450,00	???	0,00	12	4,00%
152.	18.000,00	1.285,00	0	???	6,3%

153. ☛ Refaça os cálculos da relação de exercícios acima, agora considerando que os pagamentos das séries ocorram no início dos períodos. Compare os resultados.

A tabela a seguir contém uma série de exercícios, referentes a investimentos. Todas as séries de pagamento ocorrem ao final dos respectivos períodos. Para cada um dos exercícios, calcule o dado faltante (indicado com ???). Não se esqueça de respeitar os sentidos dos fluxos de caixa.

#	VP	PGTO	VF	n	i
154.	???	400	3.800	60	10,5%
155.	-12.000	2.000	18.000	8	???
156.	-200.000	50.000	0	???	9,7%
157.	-1.500	???	2.000	18	16,0%

## Problemas

158. Uma loja vende um computador por \$1.700,00 à vista (já após todos os descontos) e em 8 vezes iguais (a primeira à vista) de \$270,00. Qual a taxa mensal cobrada?

159. ☛ No problema anterior e se a inflação for de 11,5% a.a., qual a taxa real anual?

160. Um lojista deseja parcelar um sofá de \$8.000,00 em 12 vezes sem entrada, cobrando uma taxa de 5,5% a.m. Qual o valor da prestação?

161. Um banco emprestou \$4.500,00 à taxa de 1,88% a.m. por 36 meses (0+36). De quanto é a prestação?

162. Uma pessoa precisa de um empréstimo pessoal de \$30.000,00 e pode pagar até \$850,00 por mês. A uma taxa de 2,8% a.m., quanto tempo ela levará para quitar o empréstimo?






163. Um cidadão comprou uma televisão em 18 parcelas de \$950,00. Se a taxa básica de juros é de 1,1% a.m., qual o valor presente que ele pagou pela TV?

164. Um banco fez um empréstimo de \$100.000, que devem ser devolvidos ao final do período de 3 anos. Os juros anuais são de \$10.000. Qual a taxa de juros?

165. ☛ Refaça o cálculo da taxa para prazos de 5, 8 e 70 anos. Explique por que a taxa é sempre a mesma?

166. ☛ No problema anterior, se a mesma televisão custa, à vista, \$12.000,00, de quanto foi o montante, a valor presente, dos juros pagos.

167. Uma empresa está considerando fazer um investimento que renderá \$15 milhões (esperados) ao ano pelos próximos 10 anos e que poderá ser vendido por \$150 milhões (esperados) ao final desse período. Em razão do risco do projeto, a taxa é de 15% a.a. Qual o valor presente do caixa que (espera-se) será gerado pelo projeto?

168.  No problema anterior, se o investimento inicial for de \$100 milhões, qual o ganho (a valor presente) trazido pelo investimento?
169. Outra empresa investirá \$2,5 milhões para obter \$0,8 milhões (esperados) por ano por 5 anos e vender tudo ao final por \$4,0 milhões (esperados). Qual a taxa de retorno esperada desse investimento?
170.  O mesmo projeto de investimento anterior, logo após o investimento, passou a gerar \$0,2 milhões por ano e foi vendido, após apenas 2 anos, por \$1 milhão. De quanto foi o retorno efetivamente realizado?
171. Uma empresa é tomadora de um empréstimo de capital de giro no qual recebe \$ 10.000 agora, paga três parcelas mensais de \$ 600 e amortiza (devolve) o empréstimo ao final (junto com a terceira parcela). Construa o fluxo de caixa da operação e calcule a taxa de juros.
172.  Com os dados do problema anterior, calcule a taxa de juros se o prazo for de 12 meses? E de 6 meses? E de 48 meses? Comente.
173. Um apartamento custa \$450 mil à vista e é financiável em 300 mensais iguais de \$5.600. Você até tem (e não vai precisar dele) o dinheiro para comprar o apartamento à vista. Este dinheiro está investido em uma aplicação que deverá render algo como 0,8% a.m. nos próximos anos. Vale a pena pagar à vista ou a prazo?
174.  Como pode mudar a resposta ao problema anterior se você não tiver o dinheiro?
175. Uma loja vende uma geladeira à vista por \$899,90 ou em seis parcelas mensais iguais (1+5) de \$174,90. Uma pessoa que tenha dinheiro para aplicar, o fará à taxa de 1,0% a.m. Qual é a taxa de juros deste financiamento?
176.  Com os dados do problema anterior, calcule o valor presente das parcelas pela taxa de aplicação financeira.
177. “A diferença entre o valor presente das parcelas calculado com uma taxa normal de aplicação e o preço à vista é um ágio, pago pelo consumidor para ter acesso ao mercado de consumo.” Comente.

### Caso: era uma vez uma bicicleta

*Prazo em aplicação financeira. Inflação. Taxa real. Taxa nominal. Decisão de investimento com objetivo definido.*



O Marcel quer comprar uma bicicleta nova (roubaram a anterior no campus da USP, conforme o costume), no valor de \$6.000. Para isso, pretende poupar parte de sua rica bolsa de estudos e aplicar \$300 por mês a uma taxa de 1,30% a.m..

178. Quanto tempo ele deverá esperar para alcançar o seu objetivo?
179. Se a inflação for de 7,0% a.a. (e o preço da bicicleta nova acompanhar a inflação) quanto tempo ele deverá esperar para alcançar o seu objetivo?

### Caso: pagamos metade da última parcela

*Pagamentos constantes. Decisão de financiamento no varejo.*

**PAGUE EM DIA  
E PAGAMOS METADE  
DA ÚLTIMA PARCELA**

Uma loja tem o seguinte plano de parcelamento: “pague tudo em 12 vezes (a primeira no ato); se não atrasar nenhuma parcela, a última tem um desconto de 50%”. A taxa de juros com que as 12 parcelas iguais (sem o desconto) são calculadas é de 4,7% a.m.

180. Qual a taxa de juros efetiva se o cliente pagar todas em dia (e o cliente obtiver o desconto)?
181. Quais são os motivos pelos quais a loja tem esse plano de pagamento?

182. Por que esse formato de plano de pagamento é quase inexistente no mercado?

### Caso: 5% ou 2x sem juros?

*Pagamentos constantes. Decisão de financiamento no varejo.*

**IMPERDÍVEL**  
**5% ou**  
**2x sem juros**

Uma loja tem o seguinte plano de pagamento: “5% à vista ou 2 x sem juros (1+1)”. Considere uma compra no valor de \$100,00.

183. Esboce os diagramas de fluxo de caixa da compra à vista com desconto, da compra parcelada sem desconto e o da diferença entre ambas.

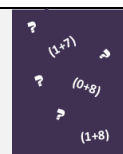
184. Qual a taxa de juros embutida no parcelamento (lembre-se que a comparação é com o valor com desconto)?

185. Na realidade, a venda a prazo tem juro zero?

186. É melhor comprar à vista ou a prazo?

### Caso: financiamento com ou sem entrada?

*Pagamentos constantes. Decisão de financiamento no varejo.*



Uma rede de lojas de eletrodomésticos está considerando oferecer três modalidades de pagamento aos clientes: o tradicional 8 vezes com entrada (1+7), o convidativo 8 vezes sem entrada (0+8) e o meio termo de 9 vezes com entrada (1+8). A taxa de juros a ser embutida nas parcelas é de 4,3%. Considere o financiamento de um bem de \$1.000. Tanto as parcelas como a taxa de juros são obviamente mensais.

187. Calcule o valor das prestações no plano (0+8).

188. Calcule o valor das prestações no plano (1+7).

189. Calcule o valor das prestações no plano (1+8).

190. Qual o impacto do valor da prestação na atração de consumidores?

191. E da ausência da entrada?

192. Qual o impacto da ausência de entrada nas perdas com insolvência de clientes?

### Caso: sempre de carrão zero financiado

*Pagamentos constantes com valor presente e futuro. Decisão de financiamento no varejo..*

Uma loja de automóveis de luxo vende seus carros financiados em uma operação de leasing financeiro: o contrato é de aluguel (mais fácil de retomar se houver insolvência e pode ter algumas vantagens tributárias, mas na prática é só um financiamento), o cliente pode comprar o bem ao final (por um valor geralmente irrisório, para que o cliente sempre acabe comprando-o). A loja propôs uma forma criativa de leasing a seus clientes: o cliente paga 10% à vista (normal), 40% ao final (uma enormidade) e o restante em 36 parcelas mensais iguais (normal). O valor do carro ao final de 3 anos é algo como 60% do valor do zero. Ao comprar o carro por 40% do seu valor e vendê-lo por 60%, o cliente, além de andar sempre de carro de luxo novinho (até 3 anos de uso, único dono), ainda recebe um bom dinheiro na mão a cada 3 anos. Nos cálculos, considere um auto novo de \$ 300 mil, uma taxa de 1,5% a.m. e ignore quaisquer efeitos tributários (pessoa física ou lucro presumido).

193. De quanto deverão ser as prestações do leasing?
194. De quanto deveriam ser as prestações se a modalidade fosse um financiamento convencional: 10% à vista e todo o restante em 36 vezes iguais.
195. Do ponto de vista comercial, qual é o atrativo desta forma criativa de financiamento?
196. Escreva um texto comercial (até 300 caracteres) que explique (para que fique bem claro) e venda (para que comprem) essa forma de financiamento. O público alvo é de profissionais com nível superior.

### **Caso: previdência privada e o rendimento de aplicações**

*Pagamentos constantes com valor futuro. Decisão de poupança de longo prazo.*



O Alan está planejando a sua aposentadoria. Decidiu poupar \$1.000 todo mês e investi-los em títulos do governo. Nas suas aplicações, ele espera obter um rendimento de 3% a.a. (após o imposto de renda e a inflação). Após 20 anos (período de acumulação, ou contribuição), ele pretende ter acumulado um bom dinheiro, do qual pretende viver até se acabar.

197. Qual o montante de dinheiro que ele pretende ter ao final do período de acumulação?
198. Com esse dinheiro, por quanto tempo ele pode viver gastando \$3.000 por mês?
199. De quanto dinheiro acumulado ele precisa para gastar \$3.000 por mês por 20 anos.
200. E por 5, 10, 15, 25, 30, 35 e 40 anos?
201. Se as probabilidades dele viver 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35 e 40 anos forem iguais (de 12,5%), de quanto dinheiro acumulado ele precisa para gastar \$3.000 por mês enquanto viver?
202. O dinheiro acumulado que ele terá será suficiente para dar a ele uma renda vitalícia de \$3,000 mensais?
203. O que acontece se a taxa de aplicação for de 6% a.a. (após o imposto de renda e a inflação)?



## 5

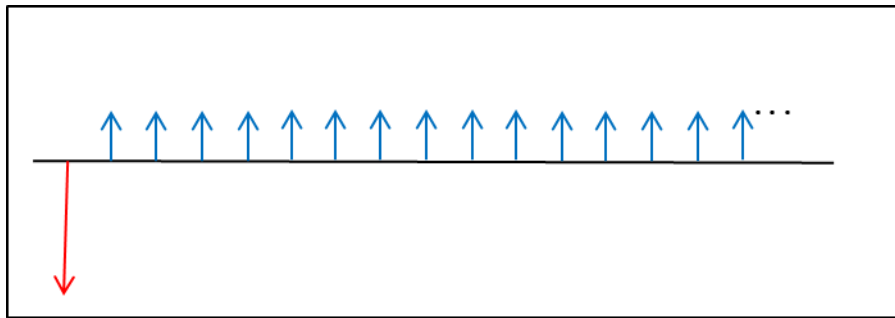
# PERPETUIDADES

### PERPETUIDADE SEM CRESCIMENTO

#### Conceito

Há um caso especial de série de fluxo constante que ocorre quando o prazo não é determinado, ou seja, o fluxo não tem data para terminar. A indeterminação do prazo do fluxo é modelada sob a forma de fluxo de caixa infinito. O caso básico é aquele em que há uma série infinita de recebimentos constantes, como apresentado no diagrama de fluxo de caixa do **Objeto 21**.

**Objeto 21. Série infinita de pagamentos constantes.** Prazos indefinidos usualmente são modelados como infinitos.



Esse tipo de fluxo, em que o prazo é modelado como infinito, recebe o nome de perpetuidade. Se todos os fluxos forem iguais, é uma perpetuidade constante (ou homogênea, ou uniforme). A pergunta geralmente feita é qual o valor presente de uma perpetuidade. Muitas vezes, esse valor presente também é chamado de perpetuidade (a nomenclatura pode ficar confusa). Apesar do prazo da perpetuidade constante ser infinito, o seu valor presente é finito:

$$VP = \frac{PGTO}{i} \quad (9)$$

#### Demonstrações

Há três formas de mostrar que essa expressão é válida. A primeira, e mais direta, é o limite da equação (6) para o prazo tendendo ao infinito:

$$VP = \lim_{n \rightarrow \infty} PGTO \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} = \frac{PGTO}{i} \quad (10)$$

A segunda, e mais simples, parte da ideia de que alguém possa fazer um investimento por prazo indeterminado, para viver da renda desse investimento. Um valor é investido no presente (VP) a uma dada taxa de juros ( $i$ ). Enquanto houver um mercado financeiro, a taxa ficar a

mesma e permanecer o interesse do investidor, esse investimento gerará um rendimento (PGTO) equivalente à multiplicação de VP por i:

$$PGTO = VP \cdot i, \text{ ou seja } VP = \frac{PGTO}{i} \quad (11)$$

### **Abordagem Numérica**

A terceira forma de mostrar a validade da equação (9) é numérica e mais extensa. Suponha uma série de pagamentos anuais e constantes de 1.200, a serem trazidos a valor presente por uma taxa de 15% a.a.. O **Objeto 22** traz os valores presentes dessas parcelas. O valor presente de infinitas parcelas é 8.000 (=PGTO/i).

**Objeto 22. Valores presentes das parcelas de \$ 1.200 @ 15% a.a..** VP da parcela do ano: valor presente VP(15%; n; 0; 1.000). VP das parcelas até o ano: VP(15%; n; 1.000; 0). % do VP do conjunto das parcelas: VP(15%; n; 1.000; 0) / 8.000.

ano	VP da parcela do ano	VP das parcelas até o ano	% do VP do conjunto das parcelas
1	1.043	1.043	13,0%
2	907	1.951	24,4%
3	789	2.740	34,2%
4	686	3.426	42,8%
5	597	4.023	50,3%
6	519	4.541	56,8%
7	451	4.993	62,4%
8	392	5.385	67,3%
9	341	5.726	71,6%
10	297	6.023	75,3%
11	258	6.280	78,5%
12	224	6.505	81,3%
13	195	6.700	83,7%
14	170	6.869	85,9%
15	147	7.017	87,7%
16	128	7.145	89,3%
17	112	7.257	90,7%
18	97	7.354	91,9%
19	84	7.438	93,0%
20	73	7.511	93,9%
...	...	...	...
30	18	7.879	98,5%
...	...	...	...
40	4	7.970	99,6%
...	...	...	...
50	1	7.993	99,9%
...	...	...	...
60	0	7.998	100,0%
...	...	...	...
70	0	8.000	100,0%
...	...	...	...
80	0	8.000	100,0%
...	...	...	...
90	0	8.000	100,0%
...	...	...	...
100	0	8.000	100,0%

Note-se que a soma dos valores presentes tende assintoticamente ao seu limite, como era de esperar, o que ilustra a equação (9).

### Aproximação do Limite

A pergunta ainda a responder é qual o conceito de infinito utilizado. Em uma concepção purista, um prazo infinito é todo o tempo até o fim do mundo e além. Em uma visão pragmática,

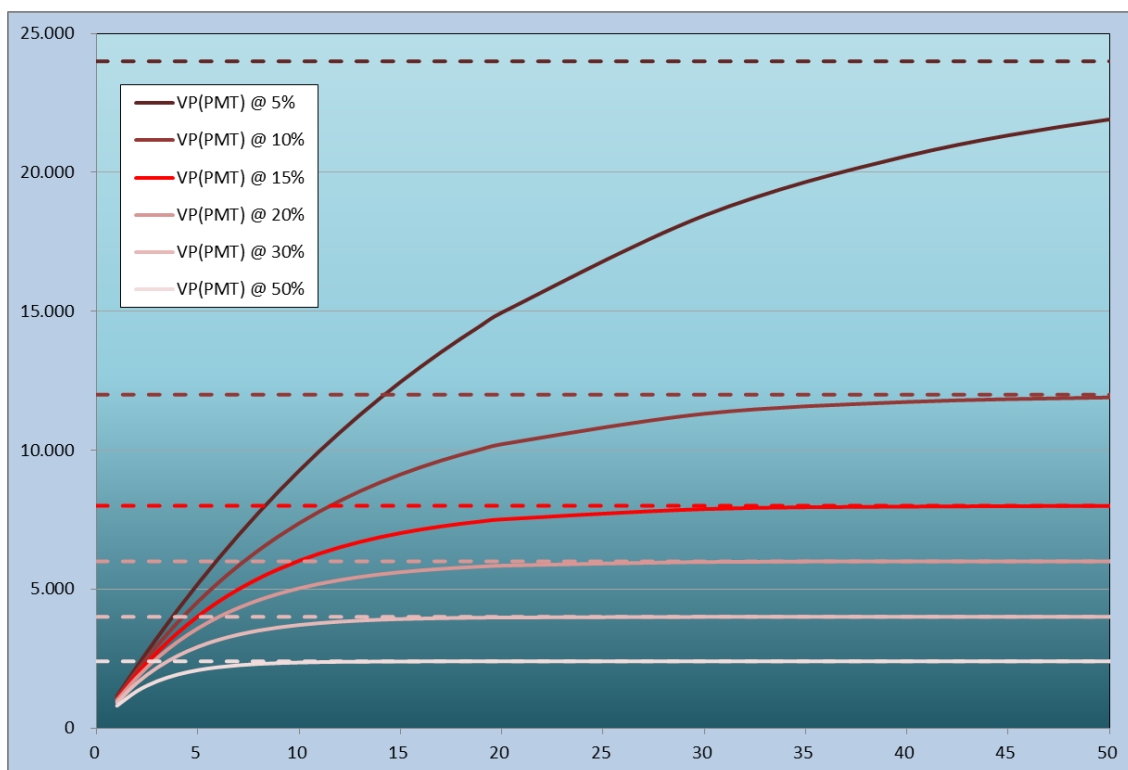
um prazo torna-se equivalente ao infinito quando aquilo que ocorre depois dele deixa de ser relevante.

Note-se que o valor presente das parcelas no ano 60 é 100,0% (que continua sendo um número aproximado equivalente à totalidade) do valor presente total. Como 99% do total é atingido pouco antes do 40º ano e quase sempre é irrelevante desprezar os 1% restantes, 40 anos podem equivaler a um tempo infinito.

A essa taxa, 90% de todo o valor presente ocorre até o 17º ano, que pode ser considerado um prazo infinito, para todos os fins práticos. A precisão na estimação de muitos fluxos de caixa é relativamente baixa, gerando imprecisões bem superiores a 10%. Levando o conceito ao extremo, 50% do valor presente ocorre até o ano 5. Em outras palavras, do ponto de vista do valor presente a essa taxa, o tempo se divide em duas metades: até o 5º ano e depois dele até a eternidade.

Dito de outra forma, o infinito é uma aproximação útil, que simplifica alguns cálculos sem trazer grande imprecisão. A velocidade de aproximação do limite do valor presente depende da taxa, como mostrado no gráfico do **Objeto 23**. Note-se que tanto os limites de valor presente como a velocidade de convergência assintótica se tornam menores com a taxa.

**Objeto 23. Valores presentes de uma perpetuidade uniforme a várias taxas.** Valores presentes de uma série de pagamentos uniformes de \$ 1.200, como função do número de anos a várias taxas. Em tracejado: os respectivos  $VP(n \rightarrow \infty)$ .



## Aplicações

As perpetuidades têm várias aplicações importantes:

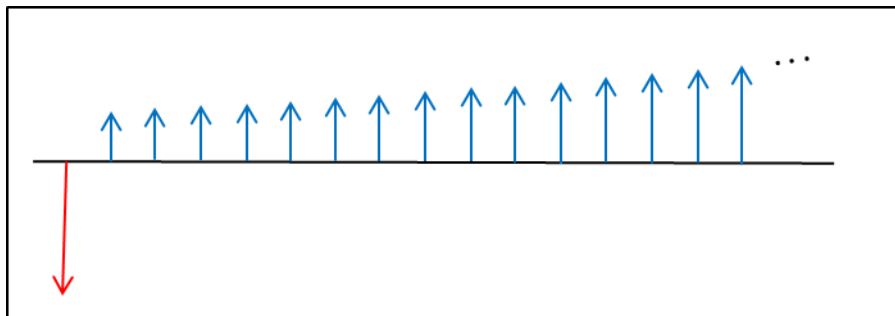
- Na estimação por múltiplos do valor de empresas e do VPL de projetos de investimento.
- No valor terminal de fluxos de caixa, tanto na avaliação de empresas como de projetos de investimento. Para uma discussão sobre como as perpetuidades são usadas nem laudos no mercado de capitais brasileiro, ver Serra (2013).
- Na estimação do custo de capital implícito das empresas. Uma aplicação importante no Brasil é Noda (2013).
- Na apresentação e discussão de conceitos de finanças corporativas baseados em modelos rápidos porém conceitualmente completos.

## PERPETUIDADE COM CRESCIMENTO CONSTANTE

### Conceito

Em muitos casos, a perpetuidade não tem um fluxo de caixa constante, e sim exponencialmente crescente a uma taxa  $g$ , como no gráfico do **Objeto 24**.

**Objeto 24. Série infinita de pagamentos com crescimento constante.** Os fluxos de caixa crescem a uma taxa constante  $g$ .



Nesse caso, a equação (9) transforma-se na equação (12), que é demonstrada no **Objeto 25**.

$$VP = \frac{PGTO_1}{i-g} = \frac{PGTO_0(1+g)}{i-g} \quad (12)$$

## Demonstração

**Objeto 25. Demonstração da fórmula do valor presente de uma perpetuidade crescente.** Crescimento exponencial com taxa constante.

Partimos da soma dos valores presentes dos fluxos

$$VP = \frac{PGTO_0(1+g)^1}{(1+i)^1} + \frac{PGTO_0(1+g)^2}{(1+i)^2} + \frac{PGTO_0(1+g)^3}{(1+i)^3} + \dots + \frac{PGTO_0(1+g)^n}{(1+i)^n} \quad (13)$$

Dividimos ambos os lados de (1) por  $(1+i)$

$$\frac{VP(1+g)}{(1+i)} = \frac{PGTO_0(1+g)^2}{(1+i)^2} + \frac{PGTO_0(1+g)^3}{(1+i)^3} + \dots + \frac{PGTO_0(1+g)^{n+1}}{(1+i)^{n+1}} \quad (14)$$

Subtraímos (14) de (13) e rearranjamos

$$VP - \frac{VP(1+g)}{(1+i)} = \frac{PGTO_0(1+g)^1}{(1+i)^1} - \frac{PGTO_0(1+g)^{n+1}}{(1+i)^{n+1}}$$

$$VP \frac{i-g}{(1+i)} = PGTO_0 \frac{(1+g)}{(1+i)} - PGTO_0 \frac{(1+g)^{n+1}}{(1+i)^{n+1}}$$

No limite

$$VP \frac{i-g}{(1+i)} = \lim_{n \rightarrow \infty} PGTO_0 \frac{(1+g)}{(1+i)} - PGTO_0 \frac{(1+g)^{n+1}}{(1+i)^{n+1}} = PGTO_0 \frac{(1+g)}{(1+i)}$$

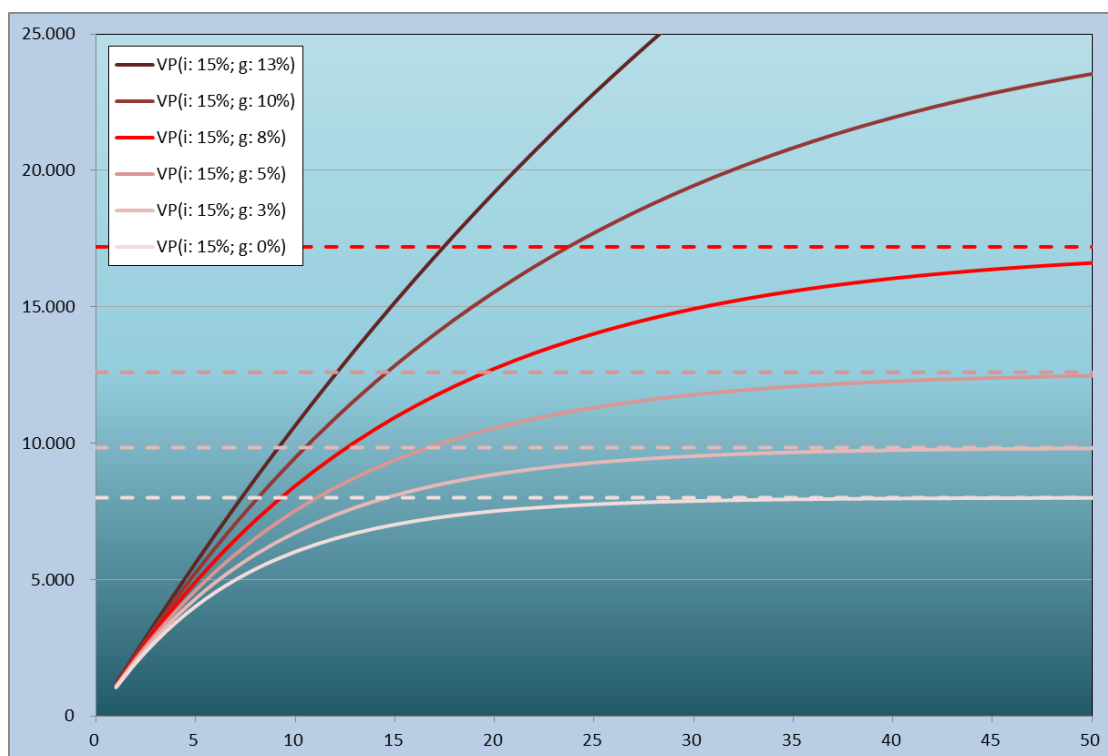
$$VP = \frac{PGTO_0(1+g)}{i-g} = \frac{PGTO_1}{i-g} \quad (\text{c.q.d.})$$

Note-se que a equação (12) torna-se instável, e o resultado gritantemente impreciso, quando  $g$  se aproxima de  $i$ .

## Aproximação do Limite

O **Objeto 26** mostra que tanto o valor presente no limite quanto o tempo que o valor presente leva para se aproximar desse limite são maiores com elevadas taxas de crescimento. Esse é o mesmo efeito de uma taxa de juros baixa. A diferença  $i - g$  pode ser entendida como uma taxa de juros (ou custo de capital) ajustada pelo crescimento.

**Objeto 26. Valores presentes de uma perpetuidade em crescimento.** Valores presentes de uma série de pagamentos de \$ 1.200 a uma taxa de 15%, com várias taxas de crescimento, como função do número de anos. Em tracejado: os respectivos  $VP(n \rightarrow \infty)$ .



## PERPETUIDADE Com Crescimento Constante e Explicitação do Reinvestimento

### Conceito

No caso geral, o crescimento do lucro das empresas o dos seus projetos de investimento é viabilizado (e antecipado) por investimentos em capacidade operacional. Para tal, uma parte do caixa gerado deve ser reinvestida e, enquanto o crescimento for muito grande, capital externo (dívidas, emissão de ações) pode ter de ser aportado.

Para modelar essa realidade, é necessário definir mais claramente algumas variáveis:

- O lucro proveniente das operações, independente de como são financiadas, já após os tributos sobre a renda, é o NOPAT (net operating profit after taxes). O reinvestimento necessário para repor os ativos depreciados é considerado equivalente à depreciação, o que torna o NOPAT equivalente ao fluxo de caixa gerado pelas operações (Desafio, 204: mostre que esta última afirmação é verdadeira).
- O ativo relevante às operações da empresa, já descontados os passivos operacionais, é o AOL (ativo operacional líquido). É nele que a empresa investe para crescer e aumentar seu NOPAT. O investimento se dá no ano anterior à entrada dos novos ativos em operação.

- A taxa  $r$  é o retorno operacional (NOPAT/AOL) dos investimentos futuros e é constante. Portanto, a taxa  $g$  o crescimento do NOPAT será a mesma do AOL (Desafio, 205: mostre que esta última afirmação é verdadeira).
- O custo de capital  $k$  é constante no tempo. Essa é a taxa, até agora chamada de  $i$ , utilizada para trazer o fluxo de caixa a valor presente.

O valor presente de uma perpetuidade em crescimento constante com reinvestimento é dado pela equação (15) e demonstrada no **Objeto 27**.

$$VP = \frac{PGTO_1}{k-g} \left(1 - \frac{g}{r}\right) \quad (15)$$

### Demonstração

**Objeto 27. Demonstração da fórmula do valor presente de uma perpetuidade crescente com reinvestimento.**  
Crescimento exponencial com taxa constante e uso de caixa como investimento.

NOPAT é a rentabilidade do AOL:

$$NOPAT_t = r \cdot AOL_{t-1} \quad (16)$$

Tanto NOPAT quanto AOL crescem à taxa  $g$ :

$$\begin{aligned} NOPAT_t &= NOPAT_{t-1}(1+g) = NOPAT_0(1+g)^t \\ AOL_t &= AOL_{t-1}(1+g) \end{aligned} \quad (17)$$

O investimento em expansão (Inv) é o acréscimo de AOL, que, com (16) e (17), se torna:

$$Inv_t = AOL_t - AOL_{t-1} = g \cdot AOL_{t-1} = \frac{g}{r} NOPAT_t$$

O fluxo de caixa de um período é a entrada de caixa (NOPAT) menos a saída (Inv):

$$FC_t = NOPAT_t - Inv_t = NOPAT_t \left(1 - \frac{g}{r}\right) = NOPAT_0(1+g)^t \left(1 - \frac{g}{r}\right)$$

O valor da empresa ou do projeto de investimento é o valor presente do fluxo de caixa até o infinito:

$$VP = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{FC_t}{(1+k)^t} = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{NOPAT_0(1+g)^t \left(1 - \frac{g}{r}\right)}{(1+k)^t} = NOPAT_0 \left(1 - \frac{g}{r}\right) \sum_{t=1}^{\infty} \frac{(1+g)^t}{(1+k)^t}$$

No limite, da mesma forma como foi feito em (1):

$$VP = NOPAT_0 \left(1 - \frac{g}{r}\right) \frac{(1+g)}{k-g}$$

$$VP = \frac{NOPAT_1}{k-g} \left(1 - \frac{g}{r}\right) \quad (\text{c.q.d.})$$

Como ocorre com (12), a equação (15) é inviavelmente imprecisa quando  $g$  se aproxima de  $k$ .



## Aplicação

Essa equação é importante, pois permite compreender alguns aspectos importantes da criação de valor nas empresas e nos seus projetos de investimento. Três condições são destacadas:

- Não há qualquer investimento. A equação (15) torna-se igual à (9), pois, se não há crescimento, não há necessidade de investimento em expansão.

$$\text{Se } g=0, \quad VP = \frac{NOPAT_1}{k}$$

- O investimento em expansão gera um retorno igual ao custo de capital. Nesse caso, a equação (15) também se torna igual à (9). Se o crescimento não é capaz de gerar valor, pois rende o mesmo que o capital custa, é como se ele não existisse (Desafio, 206: mostre que esta última afirmação é verdadeira).



$$\text{Se } r=k, \quad VP = \frac{NOPAT_1}{k}$$

- O investimento em expansão é feito a uma taxa de retorno infinita. Uma aproximação convincente dessa situação pode ocorrer em setores de serviços pessoais (escritórios de consultoria, advocacia, engenharia, consultórios médicos, serviços de limpeza, de vigilância, etc.), em que o capital necessário é ínfimo. Desta vez, a equação (15) se torna igual à (12).

$$\text{Se } r \rightarrow \infty, \quad VP = \frac{NOPAT_1}{k-g}$$

## ATIVIDADES

Os exercícios são aplicações diretas (mais matemática simples do que finanças) das técnicas apresentadas no capítulo (podem ser usados conceitos de capítulos anteriores). Os problemas já têm enunciados com algum contexto e, em algumas situações, um pouco de dificuldade. Os casos reais trazem situações de aplicação colhidos (e simplificadas) da realidade e são escritos de modo a trazer uma forte impressão do contexto em que ocorreram e permitir fazer os cálculos necessários. Alguns casos podem ser difíceis.

Os exercícios, problemas e casos resolvidos (em planilha) estão assinalados com . Nem sempre os exercícios, problemas e casos exigem cálculos, podendo se resumir a aplicações dos conceitos desenvolvidos no capítulo. Em todas as atividades utilize juros compostos, exceto se houver informação em contrário. Algumas atividades podem ser longas (por envolverem muitos períodos), mas são repetitivas (as equações em cada período são as mesmas). Alguns exercícios e problema são continuação de anteriores, caso em que são assinalados com . Os exercícios, problemas e casos podem trazer (e frequentemente trazem) elementos de capítulos anteriores, que são considerados conhecidos.

## Exercícios

A tabela a seguir contém uma série de exercícios, referentes a perpetuidades uniformes. Para cada um dos exercícios, calcule o dado faltante (indicado com ???).

#	VP	FC	i
207.	???	400	14,1%
208.	4.000.000	350.000	???
209.	100.000	???	10,50%
210.	???	300.000	17,8%
211.	1.000.000	70.000	???
212.	2.000.000	???	0,50%

A tabela a seguir contém uma série de exercícios, referentes a perpetuidades com crescimento uniforme. Para cada um dos exercícios, calcule o dado faltante (indicado com ???).

#	VP	FC	i	g
213.	???	400	14,1%	3,80%
214.	4.000.000	350.000	???	1,00%
215.	100.000	???	10,50%	3,00%
216.	???	300.000	17,8%	8,17%
217.	1.000.000	70.000	???	2,10%
218.	2.000.000	???	1,00%	0,50%

## Problemas

219. Um título de \$1.000 rende \$100 anuais. De quanto é sua taxa de juros? Não é óbvio que essa deve ser a taxa?

220. Projeta-se que um fluxo de caixa será de \$200 por 4 anos e de \$300 daí em diante (sem crescimento e sem data para acabar). Qual o valor presente desse fluxo de caixa a uma taxa de 8,5% a.a.?

221. Um recém-aposentado juntou \$350.000, de cujo rendimento pretende viver. Como ele não quer apostar contra si mesmo, ele prefere que esse montante seja suficiente para sustenta-lo por um número indeterminado de anos. Qual a renda mensal que ele terá se o mercado financeiro lhe trazer uma rentabilidade de 0,5% a.a. líquida real (após os impostos e acima da inflação)?

222. Uma empresa gerou um fluxo de caixa de \$4,5 milhões no ano que terminou. Não há previsão de término da vida da empresa (considera-se perpétua) e o crescimento do fluxo de caixa é de 3% a.a.. A um custo de capital de 14,4% a.a., qual o valor da empresa.

223. Estima-se que uma empresa gere um fluxo de caixa de \$4,5 milhões no ano que vem. Não há previsão de término da vida da empresa (considera-se perpétua) e o crescimento do fluxo de caixa é de 3% a.a.. A um custo de capital de 14,4% a.a., qual o valor da empresa.

### Caso: bônus perpétuos.

*Perpetuidade sem crescimento. Efeito de mudança da taxa de juros no valor de título.  
Decisão de captação de capital de terceiros.*



Em novembro de 2007, a BRMalls (investidora e operadora de shopping centers) emitiu títulos de dívida no valor de \$175 milhões de USD. Esses bônus são perpétuos (nunca vencem) e rendem 9,75% a.a. em

dólares. Esses juros expressavam a precificação que o mercado financeiro fazia na época para a taxa básica de juros, o risco da operação, os tributos e alguns custos transacionais. Um investidor (necessariamente domiciliado nos EUA) comprou um lote de \$100.000 USD.

224. De quanto são os juros pagos anualmente (em dólares, USD) por esse lote de bônus?

225. O mercado mudou e, em outubro de 2012, a empresa foi capaz de emitir \$175 milhões adicionais, de USD, desta vez à taxa de 8,5% a.a. Qual o valor presente, à nova taxa de mercado, do fluxo de caixa perpétuo calculado no item anterior?

226. Como os bônus antigos e os novos têm características idênticas (inclusive o prazo e o risco) a taxa de remuneração deve ser idêntica. Portanto, o valor presente calculado no item anterior é o novo valor de mercado dos bônus antigos. Qual foi o ganho do investidor?

### **Caso: quanto vale a padaria.**

*Perpetuidade. Avaliação de empresa. Determinação de custo de capital implícito.*



O padrão de mercado para o valor de uma padaria é um múltiplo de 6 a 12 receitas mensais, a depender da sua lucratividade (lucro/receita) e do seu crescimento de vendas.

227. Mostre que esse múltiplo é apenas a interação entre a margem de lucro (lucro/receita) e do valor de uma perpetuidade.

228. A lucratividade de uma padaria é algo entre 20% (bem trabalhada) e 10% (mediocre). Essa variabilidade é suficiente para explicar a variabilidade do múltiplo de receita?

229. Qual deve ser a taxa de retorno esperada pelo mercado para uma padaria que tenha valor de mercado de 9 meses de receita, lucratividade de 15% e crescimento de 1% a.a..

230. Expresse a taxa de retorno como função das demais variáveis mencionadas.

---

# **PARTE C**

## **MÉTODOS DE AVALIAÇÃO DE INVESTIMENTOS**

---

## CONCEITOS PRELIMINARES

### VIABILIDADE DE PROJETOS DE INVESTIMENTO

#### Viabilidade Econômica

Um projeto de investimento será empreendido se for considerado atraente o bastante, portanto viável. O foco deste texto é a **viabilidade econômica** dos projetos de investimento. A pergunta a se responder é se, de um ponto de vista da geração de valor econômico, vale a pena executar esse projeto em particular. Em outras palavras: o caixa gerado pelo projeto de investimento é suficiente para compensar o capital investido e remunerá-lo adequadamente?

Quem toma a decisão de investimento é o investidor. Ele é que decide, ao investir ou não, se o projeto seguirá adiante. Os projetos de viabilidade econômica são feitos para mostrar a ele se é vantagem investir o capital necessário. Os vários métodos para aferir a viabilidade econômica de um investimento são o objeto das partes seguintes deste texto.

#### Outras Viabilidades

Há outras formas de viabilidade de projetos de investimento, que também devem ser atendidas. Geralmente, podem ser inseridas na projeção do fluxo de caixa ou na sua variabilidade, mas comumente são destacadas e tratadas qualitativamente, em adição à avaliação da viabilidade econômica:

- **Financeira.** Há capital suficiente para financiar o projeto? Pode ser obtido, seja sob forma de ações, seja como dívida? Se o projeto for economicamente viável, ceder uma parte do caixa gerado pode ser suficiente para atrair o capital faltante. Isso se o investidor tiver suficiente segurança de não ser expropriado depois que entregou seu dinheiro. A viabilidade financeira é avaliada com respostas a questões como: a empresa tem o capital necessário para fazer o investimento inicial? e para financiar investimentos posteriores? a empresa pode obter o capital que falta a um custo razoável?
- **Comercial.** Qual o efetivo volume de vendas é a dúvida que permanece até o fim na maioria dos projetos de investimento. É claro que as vendas podem ser aumentadas com o enriquecimento do produto, uma redução de preço, um canal mais caro ou propaganda maciça, mas tudo isso pode tornar o projeto economicamente inviável. São dúvidas como: há mercado suficiente para absorver os produtos e serviços da empresa? até que ponto a receita poderá ser inferior à projetada e o projeto ainda ser econômica ou financeiramente viável?
- **Técnica.** Se não dá para fazer, então acabou. Ou não? Dizem que tudo é tecnicamente viável, só depende do custo e do prazo. Talvez não, mas muita coisa aparentemente impossível.

vel se viabiliza se o interesse (inclusive financeiro) for forte o suficiente. Perguntas típicas são: é possível executar a parte técnica do projeto com a tecnologia atual? é possível desenvolver a tecnologia que falta? se o desenvolvimento da nova tecnologia não ocorrer a tempo, é possível utilizar a atual?

- **Estratégica**. A estratégia é o caminho que leva (espera-se) até o estado desejado. Também é um padrão em um feixe de decisões. É desejável que um projeto de investimento seja coerente com as demais decisões que compõem a estratégia da organização. O projeto contribui para outras atividades ou planos da empresa? Atrapalha? É consistente com o caminho principal escolhido pela empresa? Distrai de projetos muito mais importantes?
- **De equipe**. Quem executa o projeto é a equipe da empresa. Se essa equipe for insuficiente, quantitativa ou qualitativamente (ou se estiver alocada a outros projetos prioritários), a execução de um projeto pode ser inviável. Uma parcela importante da equipe é a gerencial (é difícil encontrar bons executivos e gerentes), razão pela qual este tipo de viabilidade também é referido como gerencial. A restrição pode também ser em relação a técnicos chave para o projeto ou mesmo em relação ao pessoal de nível operacional. Deve se responder se há ou podem ser obtidas pessoas com atributos e em quantidade suficiente.
- **De suprimento**. Especialmente em projetos de grande porte, há de se verificar se há alternativas adequadas de fornecimento dos insumos necessários. Como, em princípio, podem ser trazidos de outros lugares, também é conhecida como viabilidade logística. São questões típicas: é possível adquirir os insumos necessários na especificação, quantidade, qualidade, prazo e custo necessários? Será necessário (ou vantajoso) produzi-los internamente? Se o fornecimento der errado, qual a perda para o projeto?
- **Cultural**. Se o projeto se contrapuser à cultura da empresa, pode ser mal avaliado, ignorado ou até sabotado. Mais tarde, mesmo que aprovado, a execução pode ser difícil ou até impossível. Questões que são feitas são: o projeto contraria algum preceito da cultura da empresa? haverá resistência à aprovação / implementação? como a resistência pode ser mitigada? a cultura pode ser modificada para acomodar o novo projeto?
- **Jurídica**. É óbvio que um projeto deve seguir a legalidade estabelecida, mas resta a questão do que é ou não legal. Como o judiciário é incrivelmente lento, as regras só se definem após muitos anos. O conservador não arrisca, mas não faz negócio. No limbo jurídico, prosperam os legalmente agressivos. São dúvidas: há algum impedimento jurídico ao projeto? vale a pena correr o risco jurídico?
- **Política**. Política é a busca e o uso do poder. Mesmo que os governantes atuais aprove o projeto, aparecerá alguém ou algum movimento querendo algo? Se sim, melhor que o investimento tenha um retorno rápido, antes que os poderosos do dia tenham chance de exigir uma parte (ou todo) o valor criado. Busca-se responder a questões como: haverá forte oposição política de pessoas contrariadas com o projeto? as pessoas contrariadas podem ser compensadas? ignoradas? derrotadas?
- **Ética**. O empreendedor aprovaria um projeto antiético? A resposta geral é não: todos seguem algum sistema ético. O problema é que esses sistemas são inconsistentes interna-

mente e diferentes entre si. O que é ético para um, pode não sê-lo para outros. O que é errado para os outros, pode ser o certo para os uns.

- **Econômico-sócio-ambiental.** No setor privado, é um recorte particular de viabilidade econômica, política e ética. Nos setores público e terceiro, é a razão de ser dos investimentos. A grande questão é: os benefícios gerados para a sociedade são suficientes para justificar o investimento que ela fará?

## CUSTO DE CAPITAL E TAXA DE ATRATIVIDADE

### Custo de Oportunidade

Um conceito fundamental para a avaliação da viabilidade econômica de um investimento é o de custo de oportunidade. O custo de oportunidade de um projeto é o benefício que seria trazido pela melhor alternativa que teve de ser descartada para aprova-lo. Ou seja, é o benefício abandonado em troca de fazer o projeto. O **Objeto 28** exemplifica este conceito.

**Objeto 28. Custo de oportunidade.** Alternativas não excludentes não sinérgicas sob restrição de capital: todas poderiam ser aprovadas se houvesse capital suficiente, sendo que a aprovação de uma não modifica o capital necessário ou o retorno das demais. As alternativas são ordenadas pelo retorno do projeto, que é calculado com base em seu fluxo de caixa (p. ex. TIR). O capital disponível é suficiente para a aprovação das alternativas A e B, mas não da C (p. ex. 300). É empregado capital apenas nos projetos aprovados. O custo de oportunidade dos projetos A e B é o retorno que teria sido obtido no melhor projeto recusado (projeto C).

alternativa	retorno	capital necessário	aprovação do projeto?	capital empregado	custo de oportunidade
A	32%	100	sim	100	21%
B	26%	150	sim	150	21%
C	21%	100	não	0	n/d
D	15%	200	não	0	n/d
E	5%	150	não	0	n/d
F	3%	100	não	0	n/d
G	-8%	200	não	0	n/d
<b>total</b>				<b>250</b>	

### Custo de Capital

Especialmente quando o mercado de capitais é capaz de fornecer ampla quantidade dos recursos necessário aos investimentos, é possível estabelecer um custo de capital baseado no mercado. Esse custo de capital é um custo de oportunidade, pois o investidor deixa de investir seu dinheiro no mercado, em que obteria 12%.

Como o investidor é avesso ao risco, o custo de capital será maior quando o risco do investimento o for. O **Objeto 29** apresenta o mesmo exemplo do **Objeto 28**, se a restrição de capital for externa à empresa (a restrição passa a ser o mercado de capitais, que oferece recursos em

abundância desde que sua remuneração seja superior ao custo de capital). Esta tabela modifica apenas o custo de oportunidade dos projetos, que passa a ser de 12% para todos. Note-se que, atuando em um mercado de capitais funcional, a empresa consegue ter um nível de investimento mais elevado.

**Objeto 29. Custo de capital como custo de oportunidade.** Alternativas não excludentes não sinérgicas sob abundância de capital: todas poderiam ser aprovadas e a aprovação de uma não modifica o capital necessário ou o retorno das demais. As alternativas são ordenadas pelo retorno do projeto, que é calculado com base em seu fluxo de caixa (p. ex. TIR). O mercado de capitais é capaz de fornecer recursos suficientes para todas as alternativas, a um custo de 12%. São aprovados todos os projetos de investimento que tiverem retorno acima do custo de capital. É empregado capital apenas nos projetos aprovados.

alternativa	retorno	capital necessário	aprovação do projeto?	capital empregado	custo de oportunidade
A	32%	100	sim	100	12%
B	26%	150	sim	150	12%
C	21%	100	sim	100	12%
D	15%	200	sim	200	12%
E	5%	150	não	0	12%
F	3%	100	não	0	12%
G	-8%	200	não	0	12%
<b>total</b>				<b>550</b>	

O custo de capital também pode ser definido como o retorno que os projetos de investimento devem ter para que o valor da empresa não se modifique ao aprova-los. Em princípio, um projeto que tenha retorno esperado superior (mesmo que apenas um pouco) ao custo de capital trará um aumento no valor da empresa (Desafio, 231: mostre que a primeira frase do parágrafo é verdadeira).

### Taxa Mínima de Atratividade

A taxa mínima de atratividade – TMA (ou taxa de atratividade, ou retorno mínimo) é aquela que a empresa define como custo de oportunidade na avaliação do projeto de investimento. Ela é baseada no custo de capital da empresa.

O **Objeto 30** traz uma série de impactos positivos e negativos do projeto de investimento sobre o executivo e a sua carreira. Em geral, os positivos predominam, o que provoca uma predisposição em favor de aprovar projetos. Essa predisposição recorrentemente faz com que as projeções de fluxo de caixa tenham viés otimista, levando a retornos superavaliados.



**Objeto 30. Impactos pessoais do projeto de investimento sobre o executivo.** Impactos do projeto de investimento sobre o indivíduo positivos (a favor do investimento) e negativos (contra o investimento).

atributo	a favor do investimento	contra o investimento
uso de novas tecnologias	técnicos atualizados têm maior empregabilidade	nova tecnologia traz novos problemas
controle interno mais fraco em projetos do que na rotina	maior liberdade de ação; facilita apropriação indébita	prováveis acusações de apropriação indébita
crescimento da empresa	empresas maiores / que crescem pagam mais	administrar empresas maiores / que crescem dá mais trabalho
visibilidade do executivo na empresa	reconhecimento	atritos políticos, inveja
visibilidade do executivo no mercado	valorização do ego, empregabilidade	ameaça à carreira no mercado em caso de fracasso
volatilidade do sucesso na implantação	adrenalina, criação de soluções decisivas	risco na implantação (orçamento, prazo, performance posterior)
impactos na carreira na empresa	bônus / promoção no sucesso	estagnação / demissão no fracasso

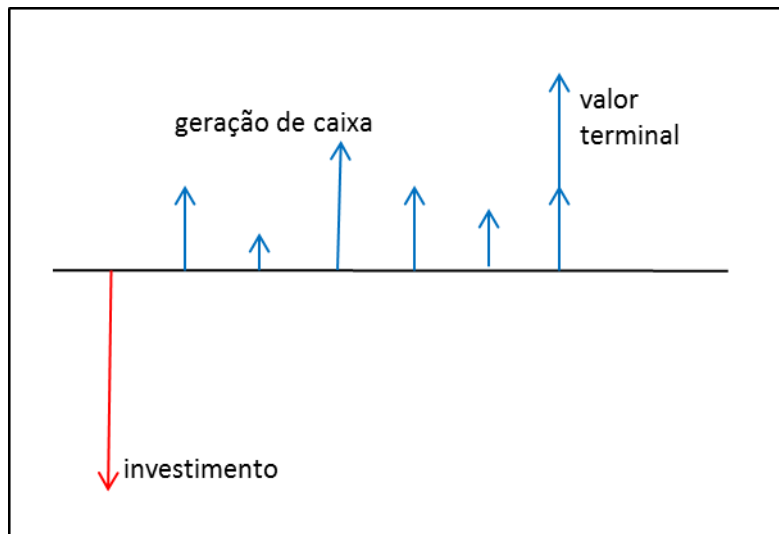
Uma das soluções que muitas empresas adotam é a fixação de uma TMA superior ao custo de capital. Com isso, compensa-se, de forma simplificada e imprecisa, o típico viés otimista na projeção do fluxo de caixa. Esse adendo costuma ser arbitrário, baseado na experiência da empresa e de seus dirigentes.

## FLUXO CONVENCIONAL E NÃO CONVENCIONAL

### Fluxo de Caixa Convencional

Um projeto convencional é um que tem uma fase de investimento seguida de uma de geração de caixa, podendo ter um valor terminal. O diagrama de fluxo de caixa correspondente é mostrado no **Objeto 31**.

**Objeto 31. Fluxo de caixa convencional.** Projeto de investimento (de dívida seria invertido). O fluxo inicia com investimentos e há uma única inversão de sentido no fluxo de caixa.



### Fluxo de Caixa Não Convencional

Alternativamente, um projeto não convencional pode ter várias fases de investimento, intercaladas por fases de geração de caixa, ou uma fase de geração de caixa que antecede o investimento ou até uma fase de geração de caixa seguida de uma de investimento. O inconveniente dos fluxos de caixa não convencionais é que: (i) pode não ficar claro qual seria o investimento inicial; (2) podem trazer problemas no uso de alguns métodos, como a TIR.

Por sorte, fluxos de caixa não convencionais são infrequentes e a maioria dos casos encontráveis na prática pode ser facilmente reduzida a um fluxo de caixa convencional com uma combinação de poupança e financiamento, como mostrado no **Objeto 32**.

**Objeto 32. Conversão de um fluxo de caixa não convencional em convencional.** O fluxo de caixa original é não convencional por incluir investimentos complementares intermediários. Na operação de poupança, a empresa poupa parte do caixa gerado e o investe à taxa de aplicação em renda fixa para uso no investimento intermediário. Na operação de financiamento, a empresa financia o restante do investimento intermediário, à taxa de operações de crédito. O fluxo de caixa resultante foi convertido em convencional.

ano	fluxo de caixa original (não convencional)	poupança	financiamento	fluxo de caixa convertido em convencional
0	-100.000	0	0	-100.000
1	12.000	-10.000	0	2.000
2	15.000	-10.000	0	5.000
3	-40.000	21.525	18.475	0
4	20.000	-5.000	-10.645	4.355
5	25.000	-5.000	-10.645	9.355
6	-40.000	10.763	29.238	0
7	40.000	0	-16.846	23.154
8	40.000	0	-16.846	23.154
9	40.000	0	0	40.000
10	440.000	0	0	440.000

taxa i: 5,0% a.a. i: 10,0% a.a.

## RESTRIÇÃO DE CAPITAL, EXCLUDÊNCIA, SINERGIA E FRACIONAMENTO DE PROJETOS

Com frequência a avaliação de projetos de investimento é comparativa, com alguns sendo aprovados e outros não. Características de projetos e grupos de projetos, como a excludência mútua, a sinergia e a possibilidade de fracionamento do investimento são importantes na seleção das alternativas (antigamente, quando ainda se ensinava o latim, a palavra alternativa era reservada ao caso particular em que há apenas duas soluções entre as quais deve se escolher).

### Abundância e Restrição de Capital

Em alguns ambientes, o capital pode ser considerado abundante, ou seja, há (e provavelmente haverá) suficiente capital disponível para todos os projetos de investimento (atuais e futuros) que forem economicamente viáveis. Outros ambientes são caracterizados por serem de capital restrito, havendo uma limitação de capital disponível, a ser racionado entre os projetos viáveis economicamente.

A abundância de capital pode ter origem externa ou interna:

- Mercados de capital bem desenvolvido. A empresa pode vender uma grande quantidade de ações ao público e usar o dinheiro recebido para financiar os projetos de investimento aprovados. O mercado responde positivamente, desde que concorde que os projetos gerem um VPL não negativo; portanto financia os projetos economicamente viáveis ( $VPL \geq 0$ ).

Normalmente, é mais provável uma grande empresa abrir o seu capital ao público e ter as suas ações negociadas na bolsa ou em um balcão organizado.

- Grande disponibilidade de caixa para investir e baixa capacidade de geração (ou identificação) de bons investimentos. Se o investidor for capaz de investir em poucos e pequenos projetos economicamente viáveis, sobrarão uma grande quantidade de capital disponível, caracterizando a abundância de capital.

A restrição de capital pode assumir várias formas:

- Quanto menor a empresa, mais difícil a obtenção do capital necessário à expansão. O endividamento aceitável, tanto para os bancos como para a própria empresa, é limitado. Os empréstimos a taxas de mercado costumam ser caros, o que limita a empresa a fontes governamentais subsidiadas. A obtenção de capital de novos sócios, ou mesmo dos antigos, é complicada. As principais afetadas são as micro e pequenas empresas.
- Quanto menos desenvolvidas as instituições de um país ou região, mais difícil a obtenção de capital. Os empréstimos tornam-se escassos, de curto prazo e caros quando os bancos são impedidos de receber por um judiciário ineficiente ou complacente. Os acionistas exigem grandes retornos e as ações têm preços deprimidos quando os acionistas minoritários são expropriados impunemente. As instituições são costumeiramente pouco desenvolvidas nos países e regiões pobres.
- Há situações em que os principais acionistas da empresa não querem ceder o controle de suas empresas, nem para verem sua riqueza aumentada. As razões são variadas: gosto pelo poder associado ao comando absoluto da empresa, certeza de ter as melhores respostas, medo de perder o controle e ser expropriado, perda decorrente da cessação da capacidade de expropriar os minoritários.
- Em grandes empresas, é comum que cada unidade estratégica ou mesmo gerencial tenha uma dada autonomia decisória. A ideia é de que uma otimização no nível da corporação é muito difícil de conseguir na prática e que o conjunto está bem melhor com a otimização de cada uma de suas unidades, ou seja, com uma série de subotimizações. Fornece-se uma verba limitada a cada unidade e espera-se que elas escolham os melhores projetos que caibam nessa verba. Se surgirem projetos especialmente atrativos, a restrição pode ser flexibilizada, com aumento da verba da unidade.

## **Excludência**

Dois projetos (ou mais) de investimento são mutuamente excludentes (não mutuamente exclusivos) quando, por algum motivo, a aprovação de um implica na não aprovação do outro. A excludência se dá por motivos como:

- Os projetos mutuamente excludentes são formas alternativas de (dentre outras):
  - atender a mesma oportunidade de mercado, como novas necessidades e hábitos dos clientes;

- aplicar a mesma tecnologia;
- aproveitar o mesmo recurso natural, como terra, jazidas minerais, etc.;
- explorar a mesma oportunidade institucional, incluindo nova regulação, concessões e relacionamento privilegiado com o governo.
- Há restrições regulatórias para investir em todos os empreendimentos disponíveis.
- Há insuficiente capacidade gerencial, sendo impraticável gerir muitos projetos simultaneamente.

A existência de uma limitação de capital para investimentos (restrição de capital) não é (normalmente) considerado fator de excludência entre investimentos. Em princípio, é possível se investir em todos os projetos economicamente viáveis não excludentes, desde que haja capital suficiente para eles.

Muitas vezes, versões alternativas de projetos de investimento (diferindo em alguns detalhes) são avaliadas, constituindo-se em projetos mutuamente excludentes.

### **Sinergia**

Dois (ou mais) projetos de investimento são sinérgicos quando a aprovação de um altera (geralmente melhora) as características do outro. Há uma série de fatores de sinergia (ou sinergias; antigamente a palavra sinergia era usada apenas no singular, mas hoje se fala de sinergias de vários tipos), como:

- Ganhos de escala, com o aproveitamento parcial de recursos necessários a um projeto no outro (com possível redução de ociosidade), dentre os quais:
  - imobilizado (terreno, edificações, máquinas, equipamentos, etc.);
  - equipe indireta (administrativa, técnica, operacional, etc.);
  - despesas promocionais, de vendas e de distribuição;
  - outros custos e despesas indiretos;
  - redução do custo de capital decorrente do porte da empresa.
- Ganhos de escopo, como o uso de intangíveis gerados em um projeto no outro, como conhecimento, marca, cultura, relacionamento.

A sinergia pode ser positiva (o caso normal, quando um projeto ajuda outro), negativa (a exceção, quando um projeto atrapalha outro) ou nula (quando os projetos são independentes).

## Fracionamento

Um projeto é fracionável (ou divisível) quando é possível se investir em apenas uma parte dele, sem perda significativa de retorno. O fracionamento de um projeto de investimento pode ser:

- Direto, quando o projeto em si é passível de divisão em subprojetos e é possível investir em apenas uma parte desses subprojetos. No caso geral, há perdas de escala, o que torna o fracionamento imperfeito.
- Indireto, pela chamada de sócios ou parceiros para a execução do projeto. Neste caso (no caso geral), há custos de governança do arranjo contratual, não há perdas de escala e pode haver ganhos de escopo se o parceiro trazer sinergias relevantes. Pode haver remuneração dos demais investidores pela originação e administração do investimento.

## Visão de Conjunto e Seleção de Projetos

A existência de restrição de capital e os atributos de excludência mútua, sinergia e fracionamento dos projetos são fundamentais no processo de seleção de investimentos. O **Objeto 33** traz um exemplo.

**Objeto 33. Seleção de investimentos com restrição de capital, excludência, fracionamento e sinergia.** Há uma restrição de capital de \$170.000. Nome: do projeto de investimento. Ordem de preferência: determinada por critérios externos a este objeto. Capital necessário: utilização (esperada) de capital no investimento inicial. Exclui os projetos: se o projeto for aprovado, quais os que deverão ser excluídos da relação (não podem ser também aprovados). Fracionável: se o projeto pode ser fracionado (sim) ou não. Sinergia: com quais outros projetos há sinergia. Painel A: relação de projetos sem resolução das sinergias. Painel B: relação de projetos após a geração do projeto AB, que é a junção dos projetos A e B em um só, com sinergia e excludência em relação aos projetos A e B originais. % de execução: qual parcela do projeto será executada (100% execução integral; 0% o projeto não pode ser aprovado). Capital usado: nos projetos aprovados.

	PROJETO			ATRIBUTOS		
	nome	ordem de preferência	capital necessário	exclui os projetos	fracionável	sinergia
A. Relação original de projetos	A	1º	50.000	nenhum	não	com B
	B	2º	70.000	nenhum	não	com A
	C	3º	40.000	D	sim	nenhuma
	D	4º	60.000	C	sim	nenhuma
	E	5º	40.000	nenhum	sim	nenhuma
	F	6º	60.000	nenhum	sim	nenhuma
	G	inviável	50.000	nenhum	não	nenhuma
	H	inviável	20.000	nenhum	não	nenhuma
total máximo:			350.000			

	PROJETO			ATRIBUTOS		APROVAÇÃO	
	nome	ordem de preferência	capital necessário	exclui os projetos	fracionável	% de execução	capital usado
B. Relação de projetos após resolução das sinergias	AB	1º	100.000	A, B	não	100%	100.000
	A	2º	50.000	AB	não	0%	0
	B	3º	70.000	AB	não	0%	0
	C	4º	40.000	D	sim	100%	40.000
	D	5º	60.000	C	sim	0%	0
	E	6º	40.000	nenhum	sim	75%	30.000
	F	7º	60.000	nenhum	sim	0%	0
	G	inviável	50.000	nenhum	não	0%	0
	H	inviável	20.000	nenhum	não	0%	0
<b>total máximo</b>			<b>350.000</b>			<b>49%</b>	<b>170.000</b>



A relação original de alternativas é a do Painel A, mas há forte sinergia entre os projetos A e B. Inicialmente, foi gerado o projeto AB pela junção dos projetos A e B. As sinergias entre ambos fazem com que o capital necessário seja menor que a soma e que o projeto AB se torne o primeiro na preferência do investidor. Essa junção é a apresentada no Painel B.

Resta alocar o capital disponível (\$170.000) aos projetos. Neste caso (por simplificação), segue-se estritamente a ordem de preferência dos projetos. O primeiro aprovado é o AB, o que elimina (absorve) o A e o B enquanto projetos isolados. O próximo é o C, que elimina o D (pelo quesito da excludência). O restante do capital disponível é alocado ao E, que deve ser fracionado. Os projetos G e H são inviáveis economicamente e não poderiam ter sido escolhidos mesmo que houvesse capital excedente.

Toda a discussão dos métodos de avaliação da viabilidade econômica, objeto dos próximos capítulos, concentra-se na determinação da ordem de preferência dos investimentos.

## ATIVIDADES

Os exercícios são aplicações diretas (mais matemática simples do que finanças) das técnicas apresentadas no capítulo (podem ser usados conceitos de capítulos anteriores). Os problemas já têm enunciados com algum contexto e, em algumas situações, um pouco de dificuldade. Os casos reais trazem situações de aplicação colhidos (e simplificadas) da realidade e são escritos de modo a trazer uma forte impressão do contexto em que ocorreram e permitir fazer os cálculos necessários. Alguns casos podem ser difíceis.

Os exercícios, problemas e casos resolvidos (em planilha) estão assinalados com . Nem sempre os exercícios, problemas e casos exigem cálculos, podendo se resumir a aplicações dos conceitos desenvolvidos no capítulo. Em todas as atividades utilize juros compostos, exceto se houver informação em contrário. Algumas atividades podem ser longas (por envolverem muitos períodos), mas são repetitivas (as equações em cada período são as mesmas). Alguns exercícios e problema são continuação de anteriores, caso em que são assinalados com . Os exercícios, problemas e casos podem trazer (e frequentemente trazem) elementos de capítulos anteriores, que são considerados conhecidos.

## Exercícios

Para cada um dos fluxos de caixa, diga se é ou não convencional.

#	ano 0	ano 1	ano 2	ano 3	ano 4	ano 5
232.	-25	10	-5	45	50	120
233.	-10	0	0	0	0	20
234.	40	-10	-20	20	10	-5
235.	-90	10	20	10	20	10
236.	-80	30	40	60	60	-50

## Problemas

237. Um investidor está considerando um projeto que rende 18% a.a.. Alternativamente, ele pode investir seu dinheiro em títulos de mesmo risco que rendem 15% a.a. Qual o custo de oportunidade do projeto?

238. Ainda no problema anterior, o que muda se o projeto tiver risco maior do que o título?

239. O Bruno está considerando um projeto de investimento que (espera ele) rende 14,5% a.a. Se o custo de oportunidade dele é de 8,5% a.a., o projeto é economicamente viável?

240. Ainda no problema anterior, o investimento necessário é de \$3.500.000, que ele não tem e não tem como levantar. O projeto é financeiramente viável?

241. A seguir é apresentada uma relação de investimentos fracionáveis, independentes e não excludentes. Todos os projetos são economicamente viáveis e estão ordenados pela preferência do investidor. Se ele dispuser de apenas \$5 milhões, quais deverão ser os escolhidos e quanto deverá ser investido em cada um?

projeto	investi- mento
estoque para o natal	235.000
novos quiosques	680.000
franquias na região	1.400.000
sociedade em usina	30.000.000

242. A seguir é apresentada uma relação de investimentos fracionáveis, independentes e não excludentes. Todos os projetos são economicamente viáveis e estão ordenados pela preferência do investidor. Se ele dispuser de apenas \$60 milhões, quais deverão ser os escolhidos e quanto deverá ser investido em cada um?

projeto	investi- mento (\$ mil)
tratores para locação	20.000
estacionamentos	15.000
ações da Vale	sem limite
quartos em flats	50.000



243. A relação a seguir contém investimentos alternativos em complexos petroquímicos. Todos os projetos são mutuamente excludentes, não fracionáveis, independentes, economicamente viáveis e estão ordenados pela preferência do investidor. Se o capital disponível for de \$2,5 bilhões, quais deverão ser os escolhidos e quanto deverá ser investido em cada um?

<b>projeto</b>	<b>investi- mento (\$ milhões)</b>
México, grande porte	900,0
Brasil, médio porte	450,0
México, médio porte	300,0
Brasil e México, pequenas	250,0
Brasil, grande porte	1.350,0

244. A relação a seguir contém investimentos excludentes, não fracionáveis e independentes. Todos os projetos são economicamente viáveis e estão ordenados pela preferência do investidor. Se o capital disponível for de \$200.000, quais deverão ser os escolhidos e quanto deverá ser investido em cada um?

<b>projeto</b>	<b>investi- mento (\$ mil)</b>
rodízio de frutos do mar	280.000
cantina italiana dançante	190.000
temakeria e saqueria	200.000
pub scotch, ale & cider	240.000
bar luz, câmera e ação	120.000
boma exótico africano	140.000

245. Os investimentos a seguir são não mutuamente excludentes e não fracionáveis. A sinergia (no investimento e na ordenação) já é considerada nas combinações de negócios. Todos os projetos são economicamente viáveis e estão ordenados pela preferência do investidor. Se o investidor tiver um capital de \$500.000, quais deverão ser os escolhidos e quanto deverá ser investido em cada um?

<b>projeto</b>	<b>investi- mento</b>
pousada e restaurante	600.000
restaurante na praia	150.000
escola e pousada	550.000
pousada na praia	500.000
escola de mergulho	50.000
restaurante e escola	200.000
todos três negócios	650.000

246. Os investimentos a seguir são não mutuamente excludentes e não fracionáveis. Todos os projetos são economicamente viáveis e estão ordenados pela preferência do investidor. Não há sinergia nos investimentos (o investimento da soma é a soma dos investimentos), mas há sinergia operacional entre as duas gráficas: material de propaganda pode ser impresso na entressafra do material didático. Com essa sinergia, as duas gráficas juntas passam a ser o investimento preferido. Se o investidor tiver um capital de \$350 milhões, quais deverão ser os escolhidos e quanto deverá ser investido em cada um?

<b>projeto</b>	<b>investi- mento (milhões)</b>
fábrica de tecidos	150,0
gráfica para propaganda	100,0
gráfica p/ material didático	250,0

### Caso: recuperação ambiental na mineradora

Fluxo de caixa convencional e não convencional. Formação de fundo de recuperação ambiental.



Uma mineradora faz muito estrago ambiental. Por outro lado, o minério extraído é utilizado na produção de uma série de bens muito desejados pelo consumidor. Uma solução é aceitar a degradação ambiental (desde que temporária) exigindo da mineradora que recupere (idealmente renaturalize) a área degradada. Para tanto, a mineradora deve separar uma parte de sua receita para, ao final da exploração da jazida, poder fazer os gastos ambientais regulamentados. Uma solução prática é criar um fundo de recuperação ambiental, administrado por uma empresa ou uma ONG especializada. Esse fundo recebe uma porcentagem da receita ou do resultado, ou ainda um valor fixo por tonelada extraída ou por mês. Com isso, há uma razoável garantia de que haverá suficiente dinheiro para fazer a recuperação da área afetada em uma época em que a jazida não estiver mais rendendo. O fluxo de caixa de uma jazida a ser esgotada em 10 anos é dado a seguir.

FLUXO DE CAIXA				
ano	investi- mento	ope- ração	recupe- ração am- biental	total
0	-100.000	0	0	-100.000
1	-10.000	20.000	0	10.000
2	0	21.000	0	21.000
3	0	22.050	0	22.050
4	0	23.153	0	23.153
5	-10.000	24.310	0	14.310
6	0	25.526	0	25.526
7	0	26.802	0	26.802
8	0	28.142	0	28.142
9	0	29.549	0	29.549
10	0	31.027	0	31.027
11	0	0	-50.000	-50.000

247. Explique por que esse fluxo de caixa é não convencional.

248. A empresa constituirá um fundo que rende 3,5% a.a. De quanto devem ser os aportes ao fundo (feitos ao final de cada ano), se eles forem todos iguais?

249. Se a empresa optou por aportar uma porcentagem do fluxo de caixa gerado na operação a cada ano, qual deve ser essa porcentagem?

250. Mostre que qualquer dessas duas soluções converte o fluxo de caixa em convencional.

### Caso: seleção de projetos na balada naval

Excludência entre projetos de investimento. Fracionamento. Sinergia. Decisão de investimento. Decisão de constituição de sociedade.



Um empreendedor está considerando um novo conceito de negócio: balada fora da cidade (não há limite de decibéis nem vizinhos carrancudos), com acomodações (não precisa dirigir alcoolizado nem perder a continuidade da festa) que parecem cabines de navio (pequenas, portanto baratas, entretanto cheias de charme), com clima meio rave meio cruzeiro, funcionando todos os fins de semana. Enfim, um Hopi Hari noturno para os crescidinhos. Já tem até um nome, Cruzeiro Terra Firma. As pesquisas de mercado são amplamente favoráveis e o retorno promete ser muito rápido. Uma guloseima: o negócio parece tão bom que facilmente pode crescer e ganhar o mundo. Os sócios estão divididos entre três cidades e pode

ser que invistam logo nas três. Capital para isso certamente eles têm. A sinergia vem de três fontes: a estrutura administrativa pode ser a mesma (diluição de um custo fixo e de um investimento fixo), a marca fica mais forte (maior recall) e uma ideia criativa de uma praça pode ser aplicada nas demais (benchmarking). O investimento no escritório central é de \$500 mil, qualquer que seja a combinação de cidades escolhida. Não há sinergia nos investimentos nas cidades (o investimento de duas é a soma delas individualmente). Há uma série de alternativas, a serem implementadas sempre em municípios próximos às cidades (terreno mais barato, impostos menores, mão de obra mais próxima):

- Uma unidade ao sul de São Paulo, preferida pela escala, com investimento de \$6,5 milhões.
- Uma unidade menor em Curitiba, segunda preferida, com investimento de \$3,5 milhões.
- Uma ao norte de Campinas, também com investimento de \$3,5 milhões. Em razão de dúvidas levantadas quanto às preferências dos consumidores levantadas na pesquisa de mercado, pode haver uma menor demanda nessa praça, o que a viabiliza apenas marginalmente.
- A combinação de São Paulo e Campinas é substancialmente mais interessante que qualquer dessas praças individualmente, o que é atribuído ao aumento da receita de Campinas se a marca for reconhecida também na capital e à diluição de despesas e investimentos na administração.
- Em razão de motivos similares, a combinação de São Paulo e Curitiba é ainda mais atraente.
- Por outro lado, os cálculos mostram que empreender simultaneamente nas três praças pouca atratividade adiciona à combinação de São Paulo e Curitiba, por adicionar resultado e investimento praticamente na mesma proporção.
- Ao saber que possivelmente Campinas fosse deixada para um segundo momento, um empreendedor da cidade propôs um negócio potencialmente interessante: tanto o resultado como o investimento são divididos em partes iguais e ele ainda paga royalties de 20% da sua parte da receita. Adicionalmente, há uma grande chance de o empreendedor local aumentar a receita pela adição de dedicação e conhecimento do público. Diz ele que é por amor à cidade, mas os cálculos mostram que é mesmo por amor ao dinheiro (é um bom negócio para as duas partes). Esta parece ser mesmo a melhor alternativa.

251. Monte uma tabela com as alternativas, explicitando o investimento inicial de cada uma, se exclui outras, se é fracionável e se há sinergia (se houver sinergia, descreva-a).

252. Ordene as alternativas por ordem decrescente de preferência do investidor. Qual a alternativa a ser escolhida?

253. A proposta do empreendedor de Campinas mostra que esse projeto é fracionável? Explique.

254. Quais riscos (além dos normais do empreendimento) há nessa parceria?

## 7

# MÉTODOS BASEADOS NO VPL

## VPL (VALOR PRESENTE LÍQUIDO)

### Conceito de VPL

O valor presente líquido é uma das técnicas mais utilizadas para a avaliação da viabilidade econômica de projetos de investimento.

O custo do investimento é o que deve ser gasto nele. Por outro lado, o valor do investimento é o da sua capacidade do investimento em gerar caixa (incluindo o valor terminal). A diferença entre o quanto o investimento vale e o quanto custa é o ganho.

O valor da fase de geração de caixa é o seu valor presente. A taxa utilizada é a taxa mínima de atratividade, acima da qual o investidor considera que o negócio é economicamente viável. Naturalmente, a taxa mínima de atratividade deve refletir os juros básicos da economia e um adicional que reflita o risco do fluxo.

O valor presente (VP) do fluxo de caixa gerado pelo projeto, líquido do valor a ser investido, é o valor presente líquido (VPL) do projeto. O VPL é o ganho do investidor com o projeto, já está na data zero (é valor presente), já considera o custo do dinheiro no tempo e risco do projeto (na TMA).

Um VPL maior que zero mostra que o projeto gera mais valor para seus investidores do que consome de capital. Um investimento é viável economicamente se o seu VPL for maior ou igual a zero (Desafio, 255: mostre que esta última afirmação é verdadeira para  $VPL > 0$ . Desafio, 256: mostre que esta última afirmação é verdadeira até para  $VPL = 0$ ; dica: pesquise o conceito de mercado eficiente).

### Equação e Cálculo do VPL

A expressão algébrica do VPL é apresentada na equação (18) a seguir.

$$VPL = FC_0 + \frac{FC_1}{(1+i)^1} + \frac{FC_2}{(1+i)^2} + \dots + \frac{FC_h}{(1+i)^h} = FC_0 + \sum_{n=1}^h FC_n(1+i)^{-n} \quad (18)$$

O prazo  $h$  é o horizonte do projeto, ou seja, o prazo até o qual o seu fluxo de caixa é projetado explicitamente. O fluxo de caixa do instante zero, em geral, é o investimento inicial (Desafio, 257: mostre que a equação continua válida mesmo que o investimento ocorra em qualquer outro período que não o inicial). Como  $(1+i)^0 = 1$ , a equação (18) pode ser escrita como:

$$VPL = \sum_{n=0}^h FC_n (1+i)^{-n} \quad (19)$$

As calculadoras financeiras e planilhas têm essas equações, que são utilizadas como mostrado no **Objeto 34**.

**Objeto 34. VPL usando calculadoras financeiras e planilhas.** Os fluxos de caixa devem ser digitados com sinal positivo para entradas de caixa e sinais negativos para saídas de caixa. Na calculadora, o fluxo de caixa deve ser inputados na ordem sequencial do tempo.. A calculadora deve ter as suas memórias apagadas antes de se iniciar a digitação. Na planilha, a função VPL não calcula o VPL, mas o valor presente dos fluxos exceto o inicial.

para obter	na calculadora	na planilha
VPL (valor presente líquido)	digitar o $CF_0$ e pressionar $\boxed{CF_0}$ ou $\boxed{\text{inicial}}$ na sequência, digitar os $CF_j$ e pressionar $\boxed{CF_j}$ ou $\boxed{\text{fluxo}}$ digitar a taxa e pressionar $\boxed{i}$ pressionar $\boxed{NPV}$ ou $\boxed{VPL}$	$=VPL(\text{taxa; fluxo de 1 até h}) + CF_0$

Em perpetuidades, o VPL é simplesmente o valor presente da perpetuidade menos o investimento inicial, como no **Objeto 35**.

**Objeto 35. VPL em perpetuidades.** Equação do VPL para os três tipos mais usados de perpetuidade. Fluxo de caixa com investimento no instante zero e perpetuidade a partir do período 1.

pressupostos da perpetuidade	valor presente	valor presente líquido
sem crescimento	$VP = \frac{FC_1}{k}$	$VPL = \frac{FC_1}{k} - Inv$
com crescimento exponencial do fluxo de caixa	$VP = \frac{FC_1}{k - g}$	$VPL = \frac{FC_1}{k - g} - Inv$
com crescimento exponencial do lucro e reinvestimento	$VP = \frac{NOPAT_1}{k - g} \left(1 - \frac{g}{r}\right)$	$VPL = \frac{NOPAT_1}{k - g} \left(1 - \frac{g}{r}\right) - Inv$

### Seleção de Investimentos sob Abundância de Capital em Mercado de Capitais Desenvolvido

O VPL é um método de avaliação de investimentos dimensional, ou seja, tende a ser maior conforme o fluxo de caixa for maior (o outro método dimensional é a SUL, pouco conhecido e de aplicação muito restrita). O VPL é expresso na mesma unidade de moeda do fluxo de caixa (milhões de reais, milhares de euros, centavos de dólar, bilhões de ienes).

Dez de dez manuais de finanças defendem o VPL como sendo o método que maximiza o valor do projeto de investimento ou da empresa para o acionista: Myers & Brealey & Allen (2013), Assaf (2010), Brigham & Houston (1999), Damodaran (2004), Gitman (2010), Ross (2013), +4. O objetivo financeiro dos sócios da empresa é maximizar o valor das suas ações (mais o dos dividendos e outros proventos recebidos) e o método que melhor reflete esse objetivo é claramente o VPL. Entretanto, o VPL somente é superior em um ambiente de abundância de capital (ausência de restrição de capital). É para esse ambiente que os manuais de finanças são escritos.

O **Objeto 36** mostra um exemplo de projeto de investimento em uma empresa que emite (vende) ações no mercado de capitais. O mercado é muito maior que a empresa (mesmo uma que seja muito grande) e é capaz de absorver sem dificuldade todas as ações que ela possa emitir. Nesse exemplo, não são usadas dívidas financeiras.

**Objeto 36. Projeto de investimento com emissão de ações.** Painel A: O valor da empresa  $V_0$  é o fluxo de caixa  $FC_0$  (perpetuidade constante) dividido pela taxa  $k$  (custo de capital, que é o mesmo em todo o exemplo). O preço das ações é o valor da empresa dividido pelo número de ações que foram emitidas no passado. Painel B: Dados básicos do Projeto A, como fluxo de caixa  $FC_A$  (também perpétuo e constante) e investimento inicial  $Inv_A$ . O VPL do projeto é o fluxo de caixa dividido pela taxa menos o investimento. O  $VPL/I$  é o VPL dividido pelo investimento. Painel C: Após o anúncio do projeto (mas antes do investimento em si) o valor da empresa é a soma do seu valor anterior e do VPL. O preço das ações no mercado sobe (em antecipação do valor que será gerado com o projeto), passando a ser o novo valor da empresa dividido pelo número de ações original. Painel D: A empresa faz o investimento necessário ao Projeto A e o valor passa a ser o original mais o VPL do projeto mais o investimento. Para financiar o investimento, é necessário emitir ações, que (por serem idênticas) têm o mesmo preço das antigas. O número de ações emitidas é o valor do investimento dividido pelo preço da ação. Painel E: O fluxo de caixa da empresa passa a ser o original mais o do Projeto A. A participação de cada tipo de acionista no capital da empresa é o seu número de ações dividido pelo total. O fluxo de caixa destinado a cada tipo de acionista é o fluxo de caixa total multiplicado pela sua participação no capital. A rentabilidade de cada tipo de acionista é o fluxo de caixa que recebe (igual ao lucro se toda a depreciação for reinvestida na preservação da capacidade produtiva) dividido pelo valor de suas ações. Por construção, a rentabilidade dos acionistas é igual ao seu custo de capital. Painel F: O valor gerado pelo projeto de investimento é igual ao seu VPL e é reconhecido imediatamente pelos acionistas em antecipação ao ganho que terão (esperam ter). Após o aporte de capital (e o investimento de fato) não há mais geração de valor (nem para os acionistas originais, nem para os novos).

<p><b>A. situação inicial</b></p> <table border="1"> <tr> <td><math>FC_0</math> 10.000 /a.</td> <td># ações 5.000</td> </tr> <tr> <td><math>k</math> 10% a.a.</td> <td>\$/ação 20,00 /#</td> </tr> <tr> <td><math>V_0 = FC_0 / k</math> 100.000</td> <td><math>V = \# \cdot \\$ / \#</math> 100.000</td> </tr> </table>	$FC_0$ 10.000 /a.	# ações 5.000	$k$ 10% a.a.	\$/ação 20,00 /#	$V_0 = FC_0 / k$ 100.000	$V = \# \cdot \$ / \#$ 100.000	<p><b>B. projeto de investimento</b></p> <table border="1"> <tr> <td colspan="2"><b>Dados do Projeto A</b></td></tr> <tr> <td><math>FC_A</math></td><td>5.000</td></tr> <tr> <td><math>Inv_A</math></td><td>30.000</td></tr> <tr> <td><math>k</math></td><td>10% a.a.</td></tr> <tr> <td colspan="2"><b>Avaliação do Projeto A</b></td></tr> <tr> <td><math>VPL_A</math></td><td><math>= FC_A / k - Inv_A =</math> 20.000</td></tr> <tr> <td><math>VPL/I_A</math></td><td><math>= VPL_A / Inv_A =</math> 0,67</td></tr> </table>	<b>Dados do Projeto A</b>		$FC_A$	5.000	$Inv_A$	30.000	$k$	10% a.a.	<b>Avaliação do Projeto A</b>		$VPL_A$	$= FC_A / k - Inv_A =$ 20.000	$VPL/I_A$	$= VPL_A / Inv_A =$ 0,67
$FC_0$ 10.000 /a.	# ações 5.000																				
$k$ 10% a.a.	\$/ação 20,00 /#																				
$V_0 = FC_0 / k$ 100.000	$V = \# \cdot \$ / \#$ 100.000																				
<b>Dados do Projeto A</b>																					
$FC_A$	5.000																				
$Inv_A$	30.000																				
$k$	10% a.a.																				
<b>Avaliação do Projeto A</b>																					
$VPL_A$	$= FC_A / k - Inv_A =$ 20.000																				
$VPL/I_A$	$= VPL_A / Inv_A =$ 0,67																				
<p><b>C. situação após o anúncio do projeto</b></p> <table border="1"> <tr> <td><math>V_0</math> 100.000</td> <td># ações 5.000</td> </tr> <tr> <td><math>VPL_A</math> 20.000</td> <td>\$/ação 24,00 /#</td> </tr> <tr> <td><math>V</math> 120.000</td> <td><math>V = \# \cdot \\$ / \#</math> 120.000</td> </tr> </table>	$V_0$ 100.000	# ações 5.000	$VPL_A$ 20.000	\$/ação 24,00 /#	$V$ 120.000	$V = \# \cdot \$ / \#$ 120.000	<p><b>D. situação após o investimento no projeto</b></p> <table border="1"> <tr> <td rowspan="3"><math>V_0</math> 100.000</td><td>acionistas originais</td> </tr> <tr> <td># ações 5.000</td> </tr> <tr> <td>\$/ação 24,00 /#</td> </tr> <tr> <td><math>VPL_A</math> 20.000</td><td><math>V = \# \cdot \\$ / \#</math> 120.000</td></tr> <tr> <td rowspan="3"><math>Inv_A</math> 30.000</td><td>acionistas novos</td> </tr> <tr> <td># ações 1.250</td> </tr> <tr> <td>\$/ação 24,00 /#</td> </tr> <tr> <td><math>V</math> 150.000</td><td><math>V = \# \cdot \\$ / \#</math> 30.000</td></tr> </table>	$V_0$ 100.000	acionistas originais	# ações 5.000	\$/ação 24,00 /#	$VPL_A$ 20.000	$V = \# \cdot \$ / \#$ 120.000	$Inv_A$ 30.000	acionistas novos	# ações 1.250	\$/ação 24,00 /#	$V$ 150.000	$V = \# \cdot \$ / \#$ 30.000		
$V_0$ 100.000	# ações 5.000																				
$VPL_A$ 20.000	\$/ação 24,00 /#																				
$V$ 120.000	$V = \# \cdot \$ / \#$ 120.000																				
$V_0$ 100.000	acionistas originais																				
	# ações 5.000																				
	\$/ação 24,00 /#																				
$VPL_A$ 20.000	$V = \# \cdot \$ / \#$ 120.000																				
$Inv_A$ 30.000	acionistas novos																				
	# ações 1.250																				
	\$/ação 24,00 /#																				
$V$ 150.000	$V = \# \cdot \$ / \#$ 30.000																				
<p><b>E. rentabilidade das ações</b></p>	<p><b>F. ganhos dos acionistas originais e novos</b></p>																				

<b>dados gerais</b>			<b>antes do aporte</b>		
$FC_{TTL}$	$FC_0 + FC_A$	15.000	valor original	100.000	
$V_{TTL}$		150.000	após anúncio	120.000	
			ganho (VPL)	20.000	
<b>por tipo de acionista</b>			<b>aporte e após</b>		
$\#_{acion}$		5.000	valor preexistente	120.000	
$\%_{acion}$	$\#_{acion}/\#_{TTL}$	80%	valor investido		30.000
$FC_{acion}$	$FC_{TTL} \cdot \#$	12.000	após investimento	120.000	30.000
$V_{acion}$	$V \cdot \%_{acion}$	120.000	ganho	0	0
$rent_{acion}$	$FC_{acion}/V_{acion}$	10%			

O exemplo mostra que o valor das ações sobe após o anúncio do projeto e antes do investimento efetivamente ser realizado. Mostra que o valor do aumento do preço das ações é igual (em um mercado de capitais integralmente eficiente) é igual ao VPL do projeto. Como a maximização do valor das ações é o objetivo econômico dos investidores, a maximização do VPL do investimento é o objetivo da avaliação do projeto.

Pode haver dúvida se deveria ser preferido um projeto que gere um VPL menor, mas que seja mais eficiente por unidade de capital investido (VPL dividido pelo investimento). Para discutir esse critério alternativo de avaliação da viabilidade econômica de um investimento é apresentado o **Objeto 37**.

**Objeto 37. Projeto de investimento alternativo com emissão de ações.** Baseado no **Objeto 36** (a situação inicial é a do Painel A), com projeto de investimento alternativo. **Painel A:** O projeto de investimento tem VPL menor, porém um VPL relativo ao investimento maior. **Painel B:** O preço das ações após o anúncio do projeto (mas antes do investimento) reflete o novo VPL (mas não seu valor relativo ao investimento). **Painel C:** O valor a ser captado de novos acionistas e o número de ações a ser emitido reflete o valor do investimento e o novo preço das ações. **Painel D:** Como no exemplo anterior, o valor gerado pelo projeto de investimento é igual ao seu VPL e é reconhecido imediatamente pelos acionistas em antecipação ao ganho que terão (esperam ter). Após o aporte de capital (e o investimento de fato) não há mais geração de valor (nem para os acionistas originais, nem para os novos).

mento de rate) não há mais geração de valor (nem para os acionistas originais, nem para os novos).	
<div><div>A. projeto de investimento</div><div><div>Dados do Projeto A</div><div><div>FC<sub>B</sub>2.000</div><div>Inv<sub>B</sub>10.000</div><div>k10% a.a.</div></div><div><div>Avaliação do Projeto A</div><div><div>VPL<sub>B</sub> = FC<sub>B</sub> / k - Inv<sub>B</sub> =10.000</div><div>VPL/I<sub>B</sub> = VPL<sub>B</sub> / Inv<sub>B</sub> =1,00</div></div></div></div></div>	<div><div>B. situação após o anúncio do projeto</div><div><div><div>V<sub>0</sub> 100.000</div><div>VPL<sub>B</sub> 10.000</div><div>V 110.000</div></div><div><div># ações 5.000</div><div>\$/ação 22,00 /#</div><div>V=# . \$/ # 110.000</div></div></div></div>
<div>C. situação após o investimento no projeto</div>	<div>D. ganhos dos acionistas originais e novos</div>

					<b>antes do aporte</b>	<b>originais</b>	<b>novos</b>
					valor original	100.000	
					após anúncio	110.000	
					ganho (VPL)	10.000	
					<b>aporte e após</b>	<b>originais</b>	<b>novos</b>
					valor preexistente	10.000	
					valor investido		10.000
					após investimento	10.000	10.000
					ganho	0	0

Tanto no exemplo do **Objeto 36** como do **Objeto 37**, o ganho dos acionistas originais é o VPL dos respectivos projetos e ocorre (em um mercado de capitais plenamente eficiente) no momento do anúncio do investimento. Em ambos os exemplos, o ganho dos acionistas posterior ao anúncio é nulo. Em nenhum deles, o VPL relativo ao investimento desempenha qualquer papel.

A decisão de investimento cabe aos acionistas antigos (ou, pelo menos, é tomada em seu nome e, presumivelmente, em seu interesse). O seu objetivo econômico é modelado como a maximização do valor de suas ações (considerados os dividendos). Transposto à decisão de investimento, esse objetivo é expresso como a maximização do VPL dos projetos.

Indicadores relativos, como o VPL relativo ao investimento (mas também outros, como a TIR, a TIR-M, o tempo de retorno), medem a eficiência com que o capital é empregado. Entretanto, essa eficiência é de pouca relevância quando o capital é abundante e pode ser obtido em qualquer (quase) quantidade para financiar qualquer conjunto de projetos de investimento (desde que economicamente viáveis).

### Seleção de Poucos Projetos com Abundante Disponibilidade de Capital

Outra situação de abundância de capital é a de um investidor que tenha grande disponibilidade de capital, porém capaz de desenvolver (ou identificar) poucas alternativas de investimento com VPL maior que zero. Mesmo que ele invista em todas as alternativas disponíveis, ainda assim sobrar uma disponibilidade de capital muito grande.

Se os projetos não forem independentes entre si, todos podem ser aprovados. Entretanto, se há necessidade de escolher apenas um (são mutuamente excludentes), há necessidade de definir um critério de seleção. Essa situação é apresentada no exemplo do **Objeto 38**.



**Objeto 38. Projetos excludentes com grande disponibilidade de capital.** Alternativas mutuamente excludentes. Investimento: utilização de capital na alternativa. VPL: gerado pela alternativa. Apenas investimento real: os três projetos de investimento (mutuamente excludentes). VPL / investimento: VPL da alternativa dividido pelo investimento necessário. O capital disponível é de \$1 bilhão. Renda fixa: todo o capital disponível é investido em renda fixa, que gera um VPL nulo (o custo de oportunidade da renda fixa é exatamente o retorno possível de obter nessa modalidade de investimento). Na sessão investimento real & renda fixa, uma parte do capital é investida no projeto real correspondente e o restante em renda fixa (com total igual ao capital disponível). O VPL é a soma do VPL do projeto real (pois a parte investida em renda fixa tem VPL nulo).

alternativa	investimento	VPL	VPL / investimento
<b>apenas investimento real</b>			
Projeto A	120.000.000	80.000.000	0,667
Projeto B	40.000.000	40.000.000	1,000
Projeto C	300.000	600.000	2,000
renda fixa (Rf)	1.000.000.000	0	0,000
<b>investimento real &amp; renda fixa</b>			
Projeto A & Rf	1.000.000.000	80.000.000	0,080
Projeto B & Rf	1.000.000.000	40.000.000	0,040
Projeto C & Rf	1.000.000.000	600.000	0,001

O problema de quem dispõe de uma grande quantidade de capital é mantê-lo investido para (pelo menos) não perder dinheiro. Esse investidor está (relativamente) satisfeito se puder aplicar seu dinheiro em alternativas que tenham VPL nulo (não negativo). Em ocasiões e com uma parte do seu capital ele investirá em projetos com VPL (esperado) positivo. Como o restante do capital de que possui será investido em operações que rendem VPL nulo, todo o VPL que será (espera-se) obtido dos projetos reais (pequenos quando comparados com o capital disponível).

Se um projeto deve ser selecionado em detrimento dos demais, deve ser o de maior VPL, pois assim é maximizado o VPL conjunto (projeto mais restante em renda fixa). Novamente, não faz sentido se preocupar com a eficiência no uso de um recurso que não é escasso.

## VPL e EVA

O lucro econômico é o lucro residual após contado o custo de capital sobre o investimento necessário à sua geração, conforme a seguinte equação.

$$\text{lucro econômico} = \text{lucro} - \frac{\text{investimento necessário}}{\text{custo de capital}}$$

O produto entre o investimento necessário e o custo de capital é conhecido como carga de custo de capital. O **Objeto 39** exemplifica o conceito de lucro econômico.

**Objeto 39. Lucro econômico.** Painel A: a empresa é capaz de ter um NOPAT de 12% da receita, mas isso é insuficiente para remunerar o investimento nos 15% necessários. Painel B: a mesma empresa, após um esforço de aumento de receita e redução de custos e ativos, é capaz de fornecer um resultado econômico positivo.

A. resultado econômico negativo (prejuízo)		B. resultado econômico positivo (lucro)	
conta	valor	conta	valor
Receita Líquida	100.000	Receita Líquida	105.000
Custo das Mercadorias Vendidas (CMV)	70.000	Custo das Mercadorias Vendidas (CMV)	68.000
<b>Resultado Bruto</b>	<b>30.000</b>	<b>Resultado Bruto</b>	<b>37.000</b>
Despesas Comerciais	6.000	Despesas Comerciais	6.000
Despesas Gerais e Administrativas	6.000	Despesas Gerais e Administrativas	5.000
Imposto de Renda (e similares)	6.000	Imposto de Renda (e similares)	9.000
<b>Lucro Operacional Após o IR (NOPAT)</b>	<b>12.000</b>	<b>Lucro Operacional Após o IR (NOPAT)</b>	<b>17.000</b>
AOL (Ativo Operacional Líquido)	100.000	AOL (Ativo Operacional Líquido)	80.000
Custo de Capital (médio ponderado, WACC)	15%	Custo de Capital (médio ponderado, WACC)	15%
<b>Carga de Custo de Capital</b>	<b>15.000</b>	<b>Carga de Custo de Capital</b>	<b>12.000</b>
<b>Lucro Econômico (EVA)</b>	<b>-3.000</b>	<b>Lucro Econômico (EVA)</b>	<b>5.000</b>

O EVA® (econômica value added) é uma metodologia registrada de uma empresa de consultoria (Stern & Stewart), que é muito maior que o simples lucro econômico. A metodologia determina e padroniza, principalmente, ajustes nos demonstrativos financeiros que vão no mesmo sentido porém além do IFRS, especificidades do custo de capital, mecanismos de remuneração variável e um processo de implantação. Embora o EVA seja uma metodologia detalhada para calcular e usar o lucro econômico, muitas vezes os dois termos são empregados indistintamente.

O VPL de um projeto de investimento é igual ao valor presente do seu lucro econômico, como demonstrado no **Objeto 40**. A condição suficiente para que isso ocorra é que haja uma equivalência entre lucro e fluxo de caixa e que o valor terminal seja igual ao investimento inicial (Desafio, 258: estas duas condições são necessárias, ou a igualdade pode ocorrer em outras situações?). Em outras palavras, o projeto ou a empresa não cresce e não gera valor após o horizonte de projeto (Desafio, 259: mostre que, se esta afirmação for verdadeira, a anterior também o será).

**Objeto 40. Demonstração da equivalência entre o VPL e o valor presente dos EVAs.** Crescimento exponencial com taxa constante. O valor terminal é o mesmo investimento inicial.

Partimos da equação (18), já apresentada, que expressa o VPL de um fluxo de caixa:	
$VPL = FC_0 + \sum_{n=1}^h FC_n(1+i)^{-n}$	(18)
Caracterizamos o fluxo de caixa inicial como o investimento e destacamos um valor terminal igual ao investimento inicial	
$VPL = -Inv + \sum_{n=1}^h FC_n(1+i)^{-n} + Inv(1+i)^{-n}$	
$= \sum_{n=1}^h FC_n(1+i)^{-n} - Inv(1 - (1+i)^{-n})$	(20)
Da equação (9), já apresentada, sabemos que o valor presente de uma série de pagamentos unitários é:	
$VP = \sum_{n=1}^h (1+i)^{-n} = \frac{1-(1+i)^{-h}}{i}$	(21)
Juntando as equações (20) e (21), temos:	
$VPL = \sum_{n=1}^h FC_n(1+i)^{-n} - \sum_{n=1}^h Inv \cdot i \cdot (1+i)^{-n} = \sum_{n=1}^h (FC_n - Inv \cdot i)(1+i)^{-n}$	
Como $EVA_n = FC_n - Inv \cdot i$ , temos:	

$$VPL = \sum_{n=1}^h EVA_n(1+i)^{-n}$$

(c.q.d.)

## VPL RELATIVO AO INVESTIMENTO

### Conceito e Equação de VPL/I

O VPL relativo ao investimento (VPL/I, VPL/Inv) é simplesmente a divisão do VPL do projeto de investimento pelo investimento inicial, como mostrado na equação:

$$VPL/I = \frac{VPL}{I} = \frac{\sum_{n=0}^h FC_n(1+i)^{-n}}{I}$$

Onde I é o investimento, usualmente inicial, no projeto. Esta é a forma mais prática de tornar o VPL um valor adimensional, indiferente ao tamanho do projeto e às dimensões utilizadas no seu fluxo de caixa.

O VPL/I também é conhecido como índice de lucratividade (IL), apesar desse nome se confundir com índices de mesmo nome utilizados na análise de demonstrativos financeiros.

### Seleção Dinâmica de Projetos em Fluxo sob Restrição de Capital

Um VPL/I maior ou igual a zero mostra que o projeto é economicamente viável, pois paga, pelo menos, o custo de capital (pode ser utilizado outro VPL/I crítico, mas sempre  $\geq 0$ ). Ao contrário do VPL, o VPL/I é adimensional, portanto não afetado pelo tamanho do projeto ou pela unidade monetária utilizada. Por esse motivo, o VPL/I lida adequadamente com a seleção de investimentos sob restrição de capital.

Uma empresa que disponha apenas de certo montante de capital precisa distribuí-lo com parcimônia entre os projetos atuais e aqueles que ainda serão desenvolvidos. Estes projetos ainda são desconhecidos, mas que certamente existirão, embora ainda não se saiba qual o valor do seu investimento inicial e a sua rentabilidade esperada. O exemplo do **Objeto 41** mostra a utilização do VPL relativo ao investimento em um ambiente de projetos em fluxo com restrição de capital (que é o caso geral).

**Objeto 41. Seleção de projetos em fluxo sob restrição de capital.** Seleção de projetos de investimento que são criados um por trimestre e que, se rejeitados, são perdidos para a concorrência. Painel A: FC gerado: anual, a partir do próximo trimestre (se o projeto for aprovado). Investimento: necessário ao projeto. VPL: FC gerado / retorno mínimo (12% a.a.) - investimento. VPL/I: VPL / investimento. VPL/I crítico: piso para viabilidade econômica. Viabilidade econômica: se  $VPL/I \geq VPL/I \text{ crítico}$ . Viabilidade financeira: se o investimento é  $\leq$  ao caixa final anterior mais o caixa gerado no período. Viabilidade combinada: se o projeto tem viabilidade econômica e financeira. Caixa gerado: caixa gerado pela empresa no trimestre, considerado o que gerava antes (inicialmente \$20.000) mais  $\frac{1}{4}$  do FC anual do projeto aprovado no trimestre anterior. Investimento: se o projeto é aprovado. Caixa final: caixa final anterior mais caixa gerado menos investimento. Painel B: gráfico do VPL/I no tempo, destacando os projetos aprovados, os rejeitados por inviabilidade econômica e os viáveis economicamente porém sem viabilidade financeira.

#### A. Tabela

tri- mestre	PROJETO DE INVESTIMENTO					VIABILIDADE			EMPRESA		
	FC investi- gerado	mento	VPL	VPL/I	VPL/I crítico	econô- mica	finan- ceira	combi- nada	caixa investi- gerado	mento	caixa final
anterior									20.000		100.000
1	14.000	100.000	16.667	0,17	0,00	sim	sim	sim	20.000	100.000	20.000
2	4.000	40.000	-6.667	-0,17	0,00	não	sim	não	23.500	0	43.500
3	8.000	60.000	6.667	0,11	0,00	sim	sim	sim	23.500	60.000	7.000
4	12.000	40.000	60.000	1,50	0,00	sim	não	não	25.500	0	32.500
5	15.000	60.000	65.000	1,08	0,00	sim	não	não	25.500	0	58.000
6	25.000	100.000	108.333	1,08	0,00	sim	não	não	25.500	0	83.500
7	50.000	150.000	266.667	1,78	0,00	sim	não	não	25.500	0	109.000
8	44.000	150.000	216.667	1,44	0,00	sim	não	não	25.500	0	134.500
9	16.000	80.000	53.333	0,67	0,80	não	sim	não	25.500	0	160.000
10	18.000	120.000	30.000	0,25	0,80	não	sim	não	25.500	0	185.500
11	30.000	150.000	100.000	0,67	0,80	não	sim	não	25.500	0	211.000
12	25.000	80.000	128.333	1,60	0,80	sim	sim	sim	25.500	0	236.500

B. Gráfico de VPL/I no tempo, correspondente à tabela



O projeto do 1º trimestre é viável econômica ( $VPL/I \geq VPL/I$  crítico) e financeiramente (investimento aprovado  $\leq$  caixa disponível), portanto aprovado. O do 2º trimestre não tem viabilidade econômica e é rejeitado. O do 3º trimestre é novamente tem viabilidade, tanto econômica como financeira. Os projetos do 4º ao 8º trimestre são viáveis economicamente, com VPL/I extremamente atrativos quando comparados com o VPL/I crítico vigente (0,00). Entretanto, são financeiramente inviáveis, pois o capital disponível foi consumido com os projetos anteriormente aprovados (muito menos atrativos, o que pode trazer arrependimento). Diante da clara demonstração de que VPL/I elevados são prováveis, é bem possível que a empresa eleve o seu VPL/I crítico (no exemplo, para 0,80). Por azar, apesar de terem bons VPL/I diante dos valores críticos antigos, os projetos de investimento do 9º ao 11º trimestre são economicamente inviáveis (diante do novo VPL/I crítico) e são rejeitados. Se isso ocorrer muitas vezes, a empresa poderá mudar novamente a sua política em relação ao VPL/I crítico (o que não chega a ser feito no exemplo). O projeto do 12º trimestre é novamente viável econômica e financeiramente e é aprovado.

Naturalmente, um efeito semelhante (mas não idêntico) pode ser obtido mudando o retorno mínimo (usado no cálculo do VPL) e mantendo o VPL/I crítico constante (e igual a zero) (Desafio, 260: refaça a tabela do **Objeto 41** aumentando o retorno mínimo ao invés do VPL/I crítico).

O exemplo mostra uma situação (muito comum) de seleção de investimentos em um ambiente dinâmico em que os próximos projetos são desconhecidos. Há alguma informação quanto à distribuição de probabilidade de atributos como magnitude do investimento e VPL/I, mas ela é imprecisa por ser baseada em poucos casos reais de projetos recentemente desenvolvidos (aprovados ou rejeitados). Em uma situação de forte incerteza quanto aos projetos que serão desenvolvidos podem ser criados projetos muito bons, para os quais faz muito sentido reservar capital suficiente. Como consequência, somente podem ser aprovados projetos de investimento altamente atrativos (com elevado VPL/I) e deve ser deixado capital para projetos futuros (potencialmente muito atrativos).

O VPL absoluto, enquanto critério, não resolve essa situação. O VPL expressa quanto valor é gerado no projeto, mas não à custa de quanto do escasso capital disponível. A escolha de um projeto de elevado VPL e elevado investimento elimina (ou dificulta) a possibilidade de escolher futuros projetos de elevado VPL relativo ao investimento e reduz o VPL total que pode ser gerado com os recursos disponíveis (Desafio, 261: mostre que essa última expressão é verdadeira).

Enquanto o capital não é limitado (é abundante) o VPL é um critério adequado, pois não há sacrifício de projetos futuros (há capital suficiente para todos, atuais e futuros, e para mais, se pudessem ser desenvolvidos). Por outro lado, se o capital for restrito (limitado), as considerações referentes à eficiência do seu uso tornam-se altamente relevantes. O indicador que expressa eficiência (output dividido por input) é o VPL/I, que divide o VPL (output: valor gerado pelo projeto) pelo investimento necessário (input: capital empregado).

### Seleção Estática de Múltiplos Projetos sob Capital Restrito

Outra aplicação do VPL/I (desta vez de cunho prático) é quando há capital restrito e um grande número de projetos alternativos. O **Objeto 42** mostra um exemplo de seleção de projetos de investimento sob restrição de capital.

**Objeto 42. Seleção de projetos com VPL/I.** Apenas os projetos de A a F são economicamente viáveis. O capital é limitado a 100.000, o que torna apenas os projetos de A a C financeiramente viáveis.

Projeto	PROJETOS PROPOSTOS			DECISÃO			PROJETOS APROVADOS		
	Inv	VPL	VPL/Inv	Inv acum	investe?	por que?	Inv	VPL	VPL/Inv
A	25.000	25.000	1,00	25.000	sim	VPL/Inv $\geq$ 0 & capital suficiente	25.000	25.000	1,00
B	15.000	12.000	0,80	40.000	sim	VPL/Inv $\geq$ 0 & capital suficiente	15.000	12.000	0,80
C	40.000	20.000	0,50	80.000	sim	VPL/Inv $\geq$ 0 & capital suficiente	40.000	20.000	0,50
D	40.000	18.000	0,45	120.000	não	capital insuficiente	0	0	n/d
E	40.000	10.000	0,25	160.000	não	capital insuficiente	0	0	n/d
F	40.000	8.000	0,20	200.000	não	capital insuficiente	0	0	n/d
G	10.000	-3.000	-0,30	210.000	não	sem viabilidade econômica	0	0	n/d
H	15.000	-10.000	-0,67	225.000	não	sem viabilidade econômica	0	0	n/d
total	225.000	80.000	0,36				80.000	57.000	0,71

Note-se que os projetos do exemplo são independentes entre si, portanto são não mutuamente excludentes (a aprovação de um não exclui outro) e não sinérgicos (a aprovação de um não modifica o fluxo de caixa do outro). A tabela permite observar que:

- Os projetos são ordenados por VPL/I.
- Os projetos de  $VPL < 0$  (portanto  $VPL/I < 0$ ) devem ser descartados, por serem economicamente inviáveis.
- Nem todos os projetos economicamente viáveis (os demais) são financeiramente viáveis, pois não há capital suficiente na empresa para investir em todos.
- Preferir aqueles com maiores VPL/I maximiza o VPL do conjunto dos projetos que serão empreendidos (Desafio, 262: mostre em que se, ao invés do projeto C, forem escolhidos o D ou o F, o VPL dos aprovados será menor).
- Se os projetos forem fracionáveis (é possível executar uma parte do projeto, geralmente chamando um sócio), a simples ordenação pelo VPL/I maximiza o VPL conjunto dos aprovados. O último projeto aprovado pode ser executado parcialmente ou em conjunto com um sócio.
- Se os projetos forem não fracionáveis, pode ocorrer de sobrar um pouco de capital (que precisa ser investido a  $VPL = 0$ ) e que uma combinação dos melhores projetos não aprovados tenha um VPL conjunto superior ao do último (ou últimos) aprovado. É um problema de programação inteira.
- Há também o caso particular trivial em que o investimento conjunto dos projetos é inferior ao capital disponível. Nesse caso, não há restrição de capital (há abundância) e todos (que tiverem  $VPL > 0$ ) podem ser aprovados.

É claro que a mesma solução poderia ser obtida calculando o VPL e o investimento de todas as combinações entre as alternativas e selecionando a de maior VPL conjunto dentre as financeiramente viáveis. Avaliar todas as combinações pode ser prático quando há poucos projetos, mas se torna proibitivo quando a sua quantidade é grande (Desafio, 263: quantas combinações há entre 50 projetos?).

O método do VPL/I resolve de forma simples e prática um problema de otimização linear: como maximizar a função objetivo (VPL) se houver uma única restrição (investimento). Nesse tipo de problema, basta aceitar as alternativas de maior razão entre objetivo e restrição, enquanto a restrição puder ser atendida. O método assume a forma de uma otimização convencional (linear ou não) se houver alguma restrição adicional (os gerentes não têm disponibilidade para tocar tantos projetos ao mesmo tempo, existe uma restrição regulatória, algum recurso natural é escasso, os clientes são os mesmos e esse mercado satura, ...).

Em comparação com outros métodos adimensionais (TIR, TIR-M, retorno contábil, tempo de retorno), o VPL/I tem a vantagem de ser aditivo tanto no numerador quanto no denominador, o que facilita a seleção de projetos sob restrição de capital. Também tem a vantagem de não

ter os vieses de construção de alguns dos outros métodos (TIR, retorno contábil, tempo de retorno).

### **Seleção Estática de Projeto com uso de Capital em Excesso ao Disponível**

Um indicador de viabilidade econômica relativa, como VPL/I (mas TIR, payback e outros também) pode ser usado para quebrar limitações orçamentárias. Isso ocorre quando o projeto de investimento é tão atrativo que vale a pena fazer um esforço extra para aprova-lo.

Um cenário é o de uma empresa que opera sob restrição de capital e se encontra diante de um projeto extremamente atrativo (com VPL/I muito alto), que exige um investimento maior que a disponibilidade financeira da empresa. Uma solução é contrair dívidas em volume que faça com que o índice de endividamento (dívida / patrimônio líquido, ou algum equivalente) supere o nível normalmente considerado prudente. Aumenta-se a dívida a um nível alto, faz-se o projeto, usa-se o fluxo de caixa gerado para amortizar rapidamente o excesso de dívida. Havendo escolha, o melhor é (usualmente) pegar um empréstimo ou financiamento de alguma instituições que opere empréstimos subsidiados pelo governo (como do BNDES), que têm prazos mais longos e juros mais baixos que seus congêneres privados.

O resultado é um incremento substancial (pelo tamanho do projeto) do tamanho da empresa, com uma rentável muito elevada (pelo elevado VPL/I do projeto aprovado). Se o projeto der errado e o lucro não vier, fica uma dívida desastrosamente alta (possivelmente impagável). Mas a probabilidade disso ocorrer é baixa, posto que o VPL/I do projeto é muito alto (muitos campeões já morreram pensando assim). É uma situação de risco calculado, em que o perigo aumenta de forma premeditada e por um período (supostamente) delimitado.

A mesma empresa pode resolver seu problema com dinheiro de sócios. Uma forma de fazer é emitir ações (ou cotas, dependendo do tipo de empresa) ao novo investidor, que entrega seu capital à empresa em troca de uma participação acionária. Naturalmente, todo o lucro subsequente da empresa será dividido de acordo com a nova participação acionária de cada um. Ganha-se um sócio para toda a vida da empresa, na riqueza e na pobreza, na saúde e na doença.

Do lado pessoal, pode ser que o sócio traga contribuições interessantíssimas (novas ideias, contatos com clientes, competência técnica, capacidade de trabalho, ...), uma outra forma de encarar os mesmos desafios (o que ajuda a tomar melhores decisões, mas pode gerar conflitos) e a capacidade de aportar mais capital ainda (se vier a ser necessário e em troca de um aumento da sua participação). Também pode ser que traga uma série de problemas comportamentais e de relacionamento que dificultem a vida em comum (há muitos casos de empresas que vão mal e acabam se separando por esse motivo).

De qualquer forma, atrair um novo sócio não é tão fácil assim, pois ele também receia os mesmos problemas de cunho pessoal (que podem ocorrer ou não, mas não se sabe a priori) e tem mais medo ainda de vir a ser roubado pelo empresário original (que normalmente continua majoritário e no controle dos principais atos da empresa). A defesa do novo sócio é (com

frequência) exigir uma participação elevada em troca do capital que aportará, o que só é viável se o VPL/I for muito alto.

Do lado financeiro, a sociedade na empresa equivale a trocar rentabilidade (diluída) por risco (reduzido), ganhando um sócio (o que pode ser bom ou ruim, a depender da qualidade do sócio). Por permitir operar com um menor endividamento, o risco da empresa é diminuído. Por exigir a repartição do grande (porque o VPL/I é muito alto) lucro do projeto (e também do lucro preexistente da empresa), a solução reduz o ganho quer o empresário original teria se tivesse preferido a dívida (melhor ainda se for barata). Mais retorno com mais risco ou uma vida mais segura, eis a questão.

Um meio termo entre a dívida (que pode ser difícil de levantar e ser perigosa) e a sociedade na empresa é a sociedade apenas no projeto. Neste caso, a sociedade é exclusivamente neste projeto e se extingue quando o projeto acaba (se for do tipo que acaba). Soluções jurídicas para esse tipo de sociedade há várias (SPE, SCP, consórcio, uma nova empresa convencional, ...).

Uma decisão desse tipo (seja dívida ou sociedade) dificilmente seria tomada olhando apenas para o VPL do projeto. Um projeto apenas grande (alto VPL, alto investimento, baixo VPL/I) não tem (normalmente) o poder de fazer com que o empresário se disponha a arriscar tudo assumindo grandes dívidas ou dividindo a sua empresa com sócios. Isso só será feito (normalmente) se o projeto for extraordinariamente atrativo, ou seja., se tiver um elevado VPL/I.

Outro cenário é o de uma grande empresa que limita a verba de investimento de suas unidades (divisões, regionais, fábricas, ...). Uma alternativa seria calcular o VPL de todos os projetos propostos pelas áreas e aprovar todos os que forem economicamente viáveis (desde que não mutuamente excludentes). Se houver capital disponível para todos os projetos bem, senão emite-se mais ações. O problema desse tipo de abordagem é que as áreas têm um grande incentivo a implementarem projetos de investimento (em especial de expansão, modernização e melhoria). Se elas forem induzidas a proporem um grande número de projetos, podem prometer bons resultados (VPL positivo) mesmo quando há grandes dúvidas quanto à veracidade das projeções. É pouco provável que uma unidade central de projetos (distante da operação, portanto sem a informação necessária) tenha suficiente capacidade de crítica.

O que se faz é tomar centralmente a decisão (estratégica) de quais grandes e novos projetos serão implementados (pelo critério do VPL) e de quais áreas serão privilegiadas com maiores verbas de investimento (que ficam sob controle delas). A luta pela comprovação da viabilidade dos projetos médios e pequenos é deixada para as áreas (que têm melhor informação e, diante do limite de verba, muito incentivo para escolher os melhores projetos). Naturalmente, mantém-se uma unidade central de projetos (o nome dessa unidade e a sua posição no organograma variam bastante entre empresas), para controlar todo o processo e mitigar algum caso de risco exagerado.

Entretanto, de tempos em tempos surge um projeto atrativo demais para ser ignorado (grande VPL/I) e que supera a capacidade de investimento determinada pela verba da área. Nesse caso, a solução é quebrar a regra e lutar pela obtenção de uma verba extra para esse projeto em especial.



## Benefício/Custo Econômico-Sócio-Ambiental

Nas decisões governamentais e de ONGs, o objetivo de quem toma a decisão de investimento não é mais o do investidor, mas o de toda a sociedade. O benefício gerado não é mais econômico apenas para o investidor, e sim econômico-sócio-ambiental (ESA) para toda a sociedade:

- **Econômico**, para a sociedade. O uso de recursos para a produção de outros mais valiosos, não importando quem é o destinatário final do acréscimo gerado. São usados os preços vigentes no mercado, com ajuste do efeito de, por exemplo, monopólios e tributos.
- **Social**. Benefícios e custos além dos econômicos e diretamente relevantes para as pessoas, como o prêmio distribucional, que considera que o mesmo montante de acréscimo de consumo traz maior acréscimo de utilidade em quem tem um consumo inicial menor.
- **Ambiental**, relacionado ao valor intrínseco da natureza.

Para que possam ser somados e convertidos em um único indicador, os benefícios (tanto econômicos, sociais e ambientais), têm as suas utilidades convertidas em uma única unidade, tradicionalmente monetária. Os custos são destruição de valor ou custos de oportunidade dos recursos empregados. Como no setor privado, há uma preferência pela geração de benefícios líquidos mais cedo, modelada por uma taxa de substituição intertemporal, é uma taxa de juros. O valor gerado pelo projeto para a sociedade é o valor presente dos benefícios econômico-sócio-ambientais, naturalmente líquidos dos custos de mesma natureza.

Os investimentos são os recursos, geralmente econômicos, que devem ser utilizados, geralmente no início do projeto, para que ele possa existir. A divisão do valor presente dos benefícios líquidos gerados pelo investimento equivale ao VPL relativo ao investimento utilizado no setor privado, apenas que agora, o objetivo e indicadores são voltados a toda a sociedade e não apenas ao investidor. Em projetos governamentais e também de ONGs, a relação VPL/I é conhecida como relação benefício/custo.

## SUL (SÉRIE UNIFORME LÍQUIDA)

### Conceito de SUL

Um problema surge quando da comparação de projetos com vidas econômicas diferentes. Neste caso, o VPL (e também a TIR) pode levar a uma conclusão errônea.

Por vida econômica entende-se o prazo em que é mais barato substituir um equipamento que mantê-lo funcionando. É diferente (em geral menor) da vida útil, associada ao período pelo qual uma máquina consegue continuar operando satisfatoriamente. É diferente (em geral maior) da vida útil definida no regulamento do imposto de renda, que é apenas um padrão arbitrário.

A solução é a série uniforme líquida – SUL (ou série uniforme equivalente – SUE, ou custo anual equivalente – CAE), que geralmente é aplicada à escolha entre equipamentos com vida eco-

nômica diferente. A SUL reconhece que equipamentos com vida econômica mais longa na verdade podem custar menos, pois o investimento inicial é diluído por um período maior.

Essa técnica é utilizada, em geral (e quase somente), para comparar o custo de equipamentos de vidas econômicas diferentes. Como a receita é a mesma, basta comparar custos. Há, entretanto, situações em que diferenças de receitas devem ser também, consideradas, além de projetos de investimento completos com vidas econômicas diferentes.

Para entender o porque o VPL pode levar ao erro, será utilizado o exemplo de duas máquinas que concorrem pelo mesmo posto de produção. Ambas produzem a mesma coisa, porém uma exige um investimento inicial maior, durando mais. A questão pode ser resolvida (embora imprecisamente) sem considerar o valor do dinheiro no tempo. Para isso, basta calcular o valor médio anual, dividindo a soma dos gastos (ou recebimentos) pela vida econômica do investimento, como no exemplo do **Objeto 43**.

**Objeto 43. Custo anual médio.** Aquisição: investimento inicial necessário no equipamento. O&M: custo de operação e manutenção. Total: fluxo de caixa formado pela soma do investimento na aquisição e do custo de O&M. Total: soma simples do fluxo de caixa total. Vida econômica: prazo em que o equipamento estará obsoleto e deverá ser substituído por outro (presumivelmente) equivalente. Custo anual médio: divisão do fluxo de caixa total pela vida econômica.

ano	EQUIPAMENTO A			EQUIPAMENTO B		
	aquisição	O&M	total	aquisição	O&M	total
0	28.000		28.000	22.000		22.000
1		1.800	1.800		1.500	1.500
2		1.800	1.800		1.500	1.500
3		1.800	1.800		1.500	1.500
4		1.800	1.800			
5		1.800	1.800			
total			37.000			26.500
vida econômica			5 anos			3 anos
<b>custo anual médio</b>			<b>7.400</b>			<b>8.833</b>

A cada 5 ou 3 anos (a depender do equipamento) é necessário um reinvestimento (presumivelmente semelhante ao original), Isso traz três formas principais de entender o custo anual médio (Desafio, 264: mostre que essas três formas de entendimento são equivalentes):

- É o custo anual médio (daí o nome) que a empresa tem se depreciar o equipamento pela sua vida econômica.
- É o quanto um terceiro cobraria de aluguel (sem lucro) pelo equipamento e pela sua operação e manutenção.
- Se os reinvestimentos seguirem (pelo menos) até o mínimo múltiplo comum (15 anos para empreendimentos que duram 3 e 5 anos), a soma dos custos anuais médios (nos 15 anos) é igual à soma dos gastos com cada equipamento (nos mesmos 15 anos). Portanto, basta comparar os custos anuais médios.

O método do custo anual médio (que não precisa ser custo nem anual) dá uma solução aproximada ao problema. Falta lembrar que fluxos de caixa em datas diferentes não podem ser somados (portanto, não podem ter a média calculada).

Uma forma mais simples de obter o mesmo resultado é por meio da série uniforme líquida (SUL), que nada mais é que o VPL de um investimento distribuído pelos anos de sua vida econômica. Para fazer esta distribuição sem sair do mundo dos juros compostos, calcula-se o pagamento constante que dê o mesmo VPL.

Neste caso, a SUL é o quanto a máquina custa por ano, já considerado o efeito do custo de capital e a necessidade de reinvestimento periódico. Se a máquina A custa escassos \$ 9.656 anuais, é mais barata e preferível à B, que custa \$ 11.276 por ano.

No caso geral, a SUL pode ser utilizada para comparar projetos de investimento completos, quando apresentam vidas diferentes. O uso da SUL, entretanto, é limitado a projetos para os quais há razoável certeza de que o reinvestimento será semelhante ao investimento original. Senão, faz-se necessário comparar investimentos e reinvestimentos até que haja uma coincidência de prazos.



Projetos de investimento em empreendimentos novos geralmente não apresentam uma vida definida, como um prazo de validade. Desta forma, o mais usual é fixar um horizonte igual para todos.

Método pouco conhecido e muito pouco usado, útil em apenas uma classe específica de situações.

### **Equação e Utilização da SUL**

## **ATIVIDADES**

Os exercícios são aplicações diretas (mais matemática simples do que finanças) das técnicas apresentadas no capítulo (podem ser usados conceitos de capítulos anteriores). Os problemas já têm enunciados com algum contexto e, em algumas situações, um pouco de dificuldade. Os casos reais trazem situações de aplicação colhidos (e simplificadas) da realidade e são escritos de modo a trazer uma forte impressão do contexto em que ocorreram e permitir fazer os cálculos necessários. Alguns casos podem ser difíceis.


Os exercícios, problemas e casos resolvidos (em planilha) estão assinalados com . Nem sempre os exercícios, problemas e casos exigem cálculos, podendo se resumir a aplicações dos conceitos desenvolvidos no capítulo. Em todas as atividades utilize juros compostos, exceto se houver informação em contrário. Algumas atividades podem ser longas (por envolverem muitos períodos), mas são repetitivas (as equações em cada período são as mesmas). Alguns exercícios e problema são continuação de anteriores, caso em que são assinalados com . Os

exercícios, problemas e casos podem trazer (e frequentemente trazem) elementos de capítulos anteriores, que são considerados conhecidos.

## Exercícios

265. Calcule o VPL e o VPL/I dos seguintes projetos de investimento, à taxa de 14,7%. Quais deles são economicamente viáveis?


ano	PROJETOS			
	A	B	C	D
0	-100.000	-200.000	-150.000	-500.000
1	13.400	29.000	15.800	75.800
2	13.802	30.160	16.590	77.316
3	14.216	31.366	17.420	78.862
4	14.643	32.621	18.290	80.440
5	15.082	33.926	19.205	82.048
6	15.534	35.283	20.165	83.689
7	16.000	36.694	21.174	85.363
8	16.480	38.162	22.232	87.070
9	16.975	39.689	23.344	88.812
10	136.422	322.065	191.252	706.833

266.  No exercício anterior, qual deles é o preferido segundo o método do VPL?

267.  Ainda no mesmo exercício, qual deles é o preferido segundo o método do VPL/I?

268. Calcule o VPL e o VPL/I dos seguintes projetos de investimento, à taxa de 12,0%. Quais deles são economicamente viáveis?


ano	PROJETOS			
	A	B	C	D
0	-12.000	-7.800	-52.000	-150
1	2.100	1.700	6.500	150
2	2.200	1.800	6.800	150
3	2.200	1.800	7.200	160
4	2.300	1.900	7.500	160
5	2.400	2.000	7.900	160
6	2.400	2.100	8.300	170
7	2.500	2.200	8.700	170
8	2.600	2.200	9.100	170
9	2.700	2.300	9.600	180
10	26.000	22.300	94.100	1.700

269.  No exercício anterior, qual deles é o preferido segundo o método do VPL?


270.  Ainda no mesmo exercício,, qual deles é o preferido segundo o método do VPL/I?

271. Calcule o VPL e o VPL/I dos seguintes projetos de investimento, à taxa de 9,8%. Quais deles são economicamente viáveis?

ano	PROJETOS			
	A	B	C	D
0	-10.000	-10.000	-10.000	-10.000
1	2.100	1.700	1.900	2.300
2	2.200	1.800	2.000	2.400
3	2.200	1.800	2.000	2.500
4	2.300	1.900	2.100	2.600
5	2.400	2.000	2.200	2.600
6	2.500	2.000	2.300	2.700
7	2.600	2.100	2.300	2.800
8	2.700	2.200	2.400	2.900
9	2.800	2.200	2.500	3.000
10	32.500	25.500	29.000	34.800


272.  No exercício anterior, qual deles é o preferido segundo o método do VPL?

273.  Ainda no mesmo exercício, qual deles é o preferido segundo o método do VPL/I?

274.  Ainda no mesmo exercício, explique por que, tanto o VPL como o VPL/I ordenam os projetos na mesma sequência.


275. A seguir são apresentados os fluxos de caixa de investimento e de operação & manutenção de três equipamentos alternativos que têm a mesma função, porém vidas econômicas diferentes. As saídas de caixa estão com sinal negativo. Calcule a SUL de cada um das alternativas, à taxa de 17,0%.

ano	ALTERNATIVAS		
	A	B	C
0	-12.000	-14.000	-20.000
1	-400	-300	-200
2	-400	-300	-200
3	-400	-300	-200
4	-400	-300	-200
5	-400	-300	-200
6		-300	-200
7		-300	-200
8			-200
9			-200
10			-200

276.  No exercício anterior, qual deles é o preferido segundo o método da SUL?

277. A seguir são apresentados os fluxos de caixa de investimento e de operação & manutenção de três equipamentos alternativos que têm a mesma função, porém vidas econômicas diferentes. As saídas de caixa estão com sinal positivo. Calcule a SUL de cada um das alternativas, à taxa de 14,2%.

ano	ALTERNATIVAS		
	A	B	C
0	200.000	250.000	300.000
1	120.000	130.000	140.000
2	120.000	130.000	140.000
3	120.000	130.000	140.000
4		130.000	140.000
5			140.000

278.  No exercício anterior, qual deles é o preferido segundo o método da SUL?

## Problemas

279. Explique se a seguinte afirmação é correta ou não: “o VPL de um projeto de investimento pode ser entendido como o lucro do projeto, após o efeito do imposto de renda”.

280. Explique se a seguinte afirmação é correta ou não: “o VPL de um projeto de investimento pode ser entendido como o valor gerado pelo projeto, apropriado pelos fornecedores de capital”.

281. Explique se a seguinte afirmação é correta ou não: “o VPL de um projeto de investimento pode ser entendido como o valor pelo qual o empreendimento poderá ser vendido logo depois de terem sido feitos os investimentos iniciais”.

282. Uma empresa está considerando substituir o seu parque de microcomputadores, que já deu o que tinha que dar. Para isto, tem três alternativas:

- Um parque de máquinas de topo de linha, de boa procedência, com tudo que tem direito. Estes computadores custam \$700 mil e deverão ser substituídos em 4 anos.
- O meio termo, ainda de boa procedência, bem equipado. Custam \$400 mil e duram 3 anos.

- Algo que funcione, de marca de segunda linha, só com o básico. São baratos, custando apenas \$300 mil, mas estima-se que fiquem obsoletos em 2 anos.

A empresa utiliza uma taxa de atratividade de 15% ao ano. Ignore efeitos fiscais. Calcule o custo anual equivalente de cada alternativa.

283. No problema anterior, qual das alternativas é a mais barata?

284. Uma fábrica de macarrão (eu estava com fome quando escrevi isto) estará comprando uma nova máquina para fazer lasanha (mmmm...). Há duas alternativas principais:

- A máquina A, com investimento inicial de \$800 mil, custo de O&M (operação e manutenção) de \$30 mil e valor residual de \$100 mil. Ela tem vida útil de 7 anos. Exige obras (galpão e instalações) de \$400 mil.
- A máquina B, com investimento inicial de \$500 mil, custo de O&M de \$25 mil e valor residual também de \$100 mil. Ela tem vida útil de 5 anos. Por ser mais delicada, exige obras de \$600 mil.

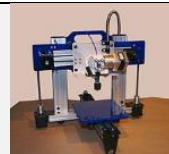
Considere que as obras tem vida útil indeterminada e que o custo de capital seja de 14% a.a. Qual é a série uniforme líquida de cada uma destas alternativas?

285. Com base nessa resposta, qual máquina deve ser a escolhida?

286. Um dos diretores dessa mesma empresa não conhece matemática financeira e não irá aprender. Concentrando-se apenas nas duas melhores alternativas, explique-lhe o porque de sua escolha.

### Caso: projeto de investimento na impressora 3D

VPL/I. Decisão de investimento.



Um engenheiro fez uma pós no exterior e aprendeu a programar e operar impressoras 3D, capazes de produzir peças tridimensionais de vários materiais (por enquanto, principalmente termoplásticos). Esta é a tecnologia que promete mudar o futuro da manufatura, pois permite produzir peças personalizadas a um custo baixíssimo, praticamente sem estoques e encalhes. Ele fez tudo direitinho:

- Estudou a demanda e concluiu que, embora seja ainda uma tecnologia pouco conhecida, já há interessados na prática o suficiente para não perder dinheiro no início.
- Calculou o investimento e os custos com material, em que é especialista.
- Conversou com algumas pessoas que poderiam trabalhar, tanto na operação da máquina, como nas vendas.
- Achou um imóvel adequado com aluguel barato.
- Descobriu com o contador quais os impostos que teria de pagar e estimou as despesas administrativas que teria.
- Conversou com empresários e fez uma relação quantificada dos demais custos e despesas que teria.
- Pediu a um amigo que trabalha com avaliação de empresas que estimasse um valor terminal pelo qual o negócio poderia ser vendido em três anos. O valor ficou bom, principalmente pelo alto crescimento esperado para o setor.
- O mesmo amigo estimou que, para uma start-up de nova tecnologia, a taxa mínima de atratividade a ser usada deve ser algo como 25% a.a.

Com toda essa informação, o engenheiro montou um fluxo de caixa, que é apresentado a seguir.

conta	momento inicial	ano 1	ano 2	ano 3
Receita		600,0	1.200,0	2.400,0
Impostos		-90,0	-180,0	-360,0
Material		-120,0	-240,0	-480,0
Pessoal		-120,0	-180,0	-240,0
Aluguel		-60,0	-60,0	-60,0
Outros		-120,0	-120,0	-120,0
<b>Resultado</b>		<b>90,0</b>	<b>420,0</b>	<b>1.140,0</b>
Investimento	-160,0	-80,0	-160,0	-80,0
Valor terminal				8.000,0
<b>Fluxo de caixa (c/VT)</b>	<b>-160,0</b>	<b>10,0</b>	<b>260,0</b>	<b>9.060,0</b>

valores em \$ mil

Com base nessa projeção de fluxo de caixa, calcule o VPL do projeto de investimento.

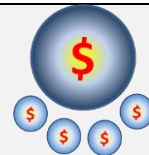
287. Compare o VPL com o capital inicialmente investido (calcule o VPL/I).

288. Faça uma relação dos riscos do empreendimento.

289. Você acha que vale a pena?

### Caso: múltiplas alternativas de investimento do fundo de private equity

VPL. VPL/I. Excludência, fracionamento, sinergia, restrição de capital. Decisão de investimento.



Os gestores de um fundo de private equity têm \$500 milhões para investir este ano. Após analisarem cuidadosamente as suas opções e descartarem as inviáveis, chegaram a alguns finalistas:

- Uma participação majoritária em uma fábrica de cerveja, que não pode ser dividida com investidores adicionais, mas não exclui outras oportunidades.
- Uma participação minoritária em uma retransmissora local de TV, que também não permite agregar outros sócios nem exclui outros projetos.
- Uma fábrica e rede de varejo de calçados femininos, que pode admitir sócios minoritários nas lojas, até 40% de participação no total.
- Uma versão menor da fábrica e rede de calçados, focada no público masculino.
- Uma fábrica e rede de calçados maior, tanto feminina quanto masculina. Com a piora da definição do foco das lojas, vem uma redução da rentabilidade. Os três negócios de calçados são mutuamente excludentes.
- Uma rede de lojas de brinquedos, que pode ser empreendida em conjunto com quaisquer outros projetos e pode ser fracionadas com investidores em lojas específicas. A participação mínima do fundo é de 60%.
- Um operador logístico, que vem em dois tamanhos (1 e 2). Pode ser fracionado com investidores-operadores locais, mas o fundo não quer ter menos de 60% de participação. Esses dois projetos apenas se excluem reciprocamente.
- O controle acionário de uma universidade, não excludente porém não fracionável.

A seguir é apresentado o resumo dessas informações, mais a informação do investimento inicial e do VPL gerado em cada projeto.

nome	fracio- nável	exclui	investi- mento	VPL
Fabricação de cerveja	não	nenhum	120	120
Retransmissora de TV	não	nenhum	140	130
Calçados femininos	sim	calçados	160	360
Calçados masculinos	sim	calçados	100	80
Calçados masc. e fem.	sim	calçados	220	400
Varejo de brinquedos	sim	nenhum	120	260
Operador logístico 1	sim	op. logístico	200	40
Operador logístico 2	sim	op. logístico	80	15
Universidade	não	nenhum	160	165
<b>TOTAL *</b>			<b>1.140</b>	<b>1.405</b>

\* potencial e com dupla contagem valores em \$ milhões

290. Calcule o VPL/I de cada projeto.

291. Ordene os projetos pelo VPL/I.

292. Considerado o conjunto de restrições impostas, qual a melhor combinação de projetos?

### Caso: risco de mercado na geração de energia elétrica

VPL. Risco. Cenários. Decisão de investimento.



Um fundo de investimento está considerando adquirir 10% das ações de uma nova geradora hidroelétrica. As obras da usina deverão consumir \$15 bilhões e 4 anos. Todo o capital dos investidores é comprometido logo no início (mesmo que venha a ser aportado em parcelas). Como é um setor fortemente regulado pelo governo, o risco é relativamente baixo e o custo de capital real pode ser de 7,3% a.a.. Além do cenário base (tudo corre bem, sem sorte nem azar, e sem brilhantismo), há dois alternativos. Um é de dificuldade institucional (o governo resolve complicar e tornar a vida difícil), em que o caixa gerado é 30% menor que o previsto. Outro de alta de preços (consumo crescente e falta de água no restante do país aumenta os preços para quem tem), no qual o caixa gerado é 10% maior que o do cenário base. O fluxo de caixa dos três cenários é:

anos	CENÁRIOS (ORÇAMENTO OK)		
	dificuldade institucional	caso base	alta de preços
0	-15.000	-15.000	-15.000
1	0	0	0
2	0	0	0
3	0	0	0
4	0	0	0
5 a 10	1.330	1.900	2.090
11 a 15	1.370	1.957	2.153
16 a 20	1.411	2.016	2.217
21 a 25	1.453	2.076	2.284
26 a 30	1.497	2.138	2.352
31 a 35	1.542	2.203	2.423
36 a 40	1.588	2.269	2.496
41	4.500	4.500	4.500

293. Calcule o VPL de cada um dos cenários.

294. Mesmo sem haver uma definição clara das probabilidades dos cenários, você faria o investimento?

295. Há uma complicação a mais: a obra pode apresentar problemas de execução (por erro de planejamento / execução ou por algum incidente incontrolável), o que acontece em algo como um quinto das vezes. Nesse caso, estima-se que o investimento deva ser \$5,0 bilhões a mais, sendo metade no ano 3 e metade no ano 4. Recalcule os VPLs.

296. Se esse fosse o custo da obra, você faria o investimento?



297. Considerando tudo isso, o que me diz? Investe ou não investe?

### Caso: lançamento de cosméticos com vidas comerciais diferentes

SUL. Decisão de investimento.



Uma empresa de cosméticos deve escolher entre três estratégias comerciais diferentes. Cada uma delas tem um investimento inicial em comunicação e gera um fluxo de caixa livre, apresentados na tabela a seguir. Em função da estratégia escolhida, os produtos têm vidas úteis muito diferentes, devendo ser substituídos por novos lançamentos (geralmente, é só relançar após trocar a embalagem, a cor e a fragrância). Uma vez escolhida a estratégia, não pode ser facilmente substituída, o que permite considerar os reinvestimentos como semelhantes ao fluxo de caixa original.

mês	A	B	C
-	(3.000)	(4.000)	(2.000)
1	1.000	1.200	2.000
2	1.000	1.200	2.000
3	1.200	1.500	1.000
4	1.200	1.500	1.000
5	1.200	1.500	
6	1.200	1.200	
7	1.400	1.200	
8	1.400	1.200	
9	1.400	1.000	
10	1.400	1.000	
11	1.400	1.000	
12	1.000	1.000	
13	1.000		
14	1.000		
15	1.000		
16	600		
17	600		
18	600		

298. Considerando uma taxa de 1,8% a.m., calcule o VPL de cada uma das alternativas.

299. Por que a escolha não pode ser baseada no VPL?

300. Calcule a SUL de cada alternativa.

301. Qual é a estratégia a ser escolhida?

302. Qual é a segunda melhor?

## 8

# MÉTODOS BASEADOS EM TAXAS DE RETORNO

### TIR (TAXA INTERNA DE RETORNO)

#### Conceito, Equação e Utilização da TIR

A taxa interna de retorno – TIR (ou taxa econômica de retorno, ou taxa de retorno do fluxo de caixa descontado, ou apenas taxa de retorno) é um dos três mais citados e usados métodos de avaliação de investimentos (ao lado de VPL e tempo de retorno). Ela é a taxa de juros que torna o VPL nulo:

$$VPL = \sum_{n=0}^h FC_n(1 + TIR)^{-n}$$

No caso geral, não é possível (ou ninguém ainda conseguiu) inverter essa equação e obter uma solução analítica para a TIR (Desafio, 303: não tente inverter a equação; embora seja sabido que os melhores tentam até desistirem). A solução é numérica, por um processo de aproximações sucessivas (também conhecido por tentativa e erro).

A TIR é utilizada na avaliação de projetos, refletindo o retorno do investimento. Uma TIR maior que o custo do capital indica que o retorno do projeto é superior ao das alternativas de mesmo risco usualmente oferecidas pelo ambiente. Em outras palavras, o projeto é economicamente viável quando a TIR é maior ou igual à TMA (Desafio, 304: mostre que, em um projeto convencional, se o projeto é economicamente viável pelo método da TIR, também o será pelo do VPL).

Em empréstimos, quando a série de pagamentos é conhecida, a taxa do empréstimo é calculada como uma TIR. Nesse caso, quanto maior a taxa, pior (mais caro) para o tomador do empréstimo.

O nome interna decorre do fato de a TIR pressupor que o fluxo de caixa gerado pelo projeto pode ser (e será) reinvestido em projetos de retorno equivalente à TIR. Em outras palavras, a TIR pressupõe que ela é ao mesmo tempo o retorno do projeto e o seu custo de oportunidade. Mas isso só é verdade em projetos que não geram valor ( $r=k$ ,  $EVA=0$ ). Mais sobre essa inconsistência da TIR é discutido quando da apresentação da TIR modificada.

Às vezes, ouve-se uma explicação alternativa: a TIR está contida no (é interna ao) fluxo de caixa, não exigindo o uso de uma taxa externa (custo de capital) no seu cálculo. Houve uma outra tentativa de defini-la como interna por ignorar as externalidades econômico-sócio-ambientais.

Entretanto, é perfeitamente possível calcular a TIR (ou o VPL ou qualquer outro indicador de viabilidade econômica) considerando os benefícios e custos que impactam toda a sociedade.

Em perpetuidades, a TIR pode facilmente ser obtida pela inversão das equações do valor presente, como mostrado no **Objeto 44**.

**Objeto 44. TIR em perpetuidades.** Equação da TIR para os três tipos mais usados de perpetuidade. . Fluxo de caixa com investimento no instante zero e perpetuidade a partir do período 1.

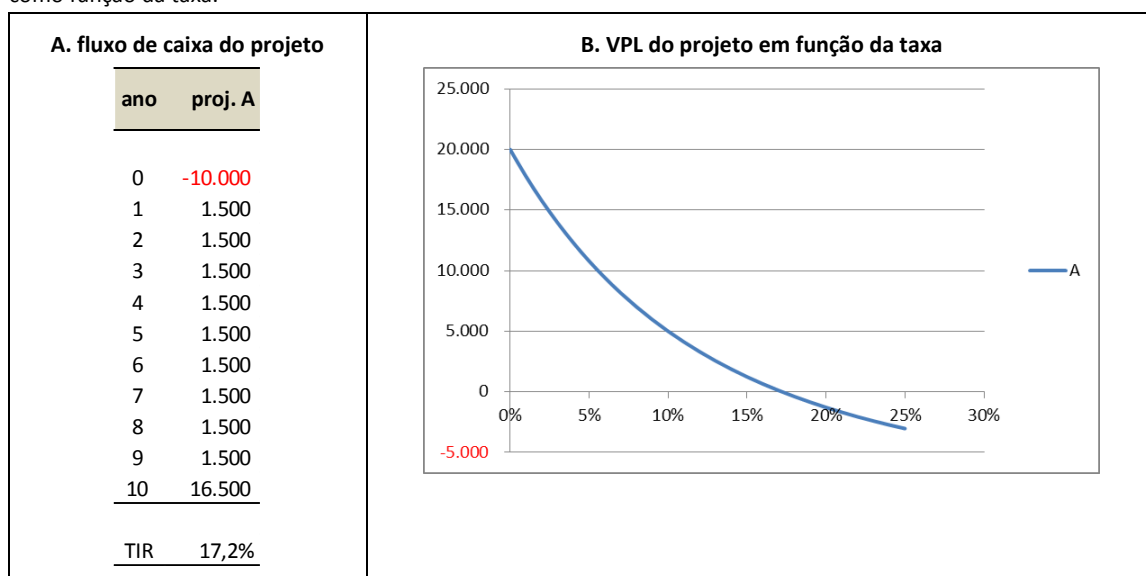
pressupostos da perpetuidade	valor presente	taxa interna de retorno
sem crescimento	$VP = \frac{FC_1}{k}$	$TIR = \frac{FC_1}{Inv}$
com crescimento exponencial do fluxo de caixa	$VP = \frac{FC_1}{k - g}$	$TIR = \frac{FC_1}{Inv} + g$
com crescimento exponencial do lucro e reinvestimento	$VP = \frac{NOPAT_1}{k - g} \left(1 - \frac{g}{r}\right)$	$TIR = \frac{NOPAT_1}{Inv} \left(1 - \frac{g}{r}\right) + g$

A grande vantagem da TIR é ser intuitiva, posto ser expressa sob a forma de uma taxa de retorno diretamente comparável com a TMA. Outra vantagem é não exigir a definição da TMA no cálculo, apenas na decisão final. Isso é importante quando a TMA não é bem definida e a decisão precisa ser tomada incorporando um componente intuitivo, o que funciona melhor ao final do processo de decisão.

## TIR e VPL

Uma visão interessante sobre a TIR vem da análise do gráfico do **Objeto 45**. O VPL de um projeto convencional cai com o aumento da taxa (Desafio, 305: mostre que esta última afirmação é verdadeira), tornando-se negativo a partir de certo ponto. Como a TIR é a taxa em que o VPL é zero, o ponto a partir do qual o VPL torna-se negativo é a TIR.

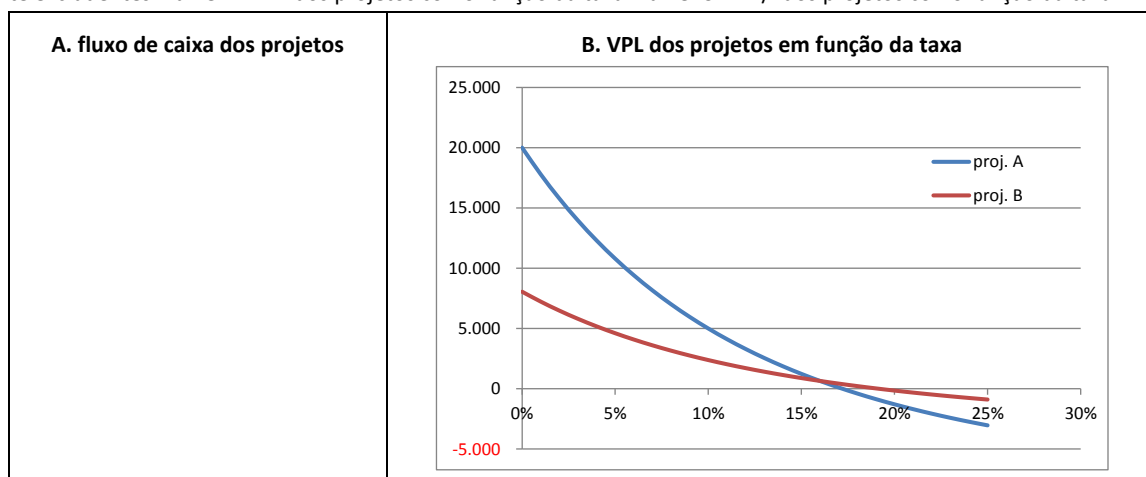
**Objeto 45. VPL em função da taxa.** Painel A: fluxo de caixa do projeto de investimento. Painel B: VPL do projeto como função da taxa.

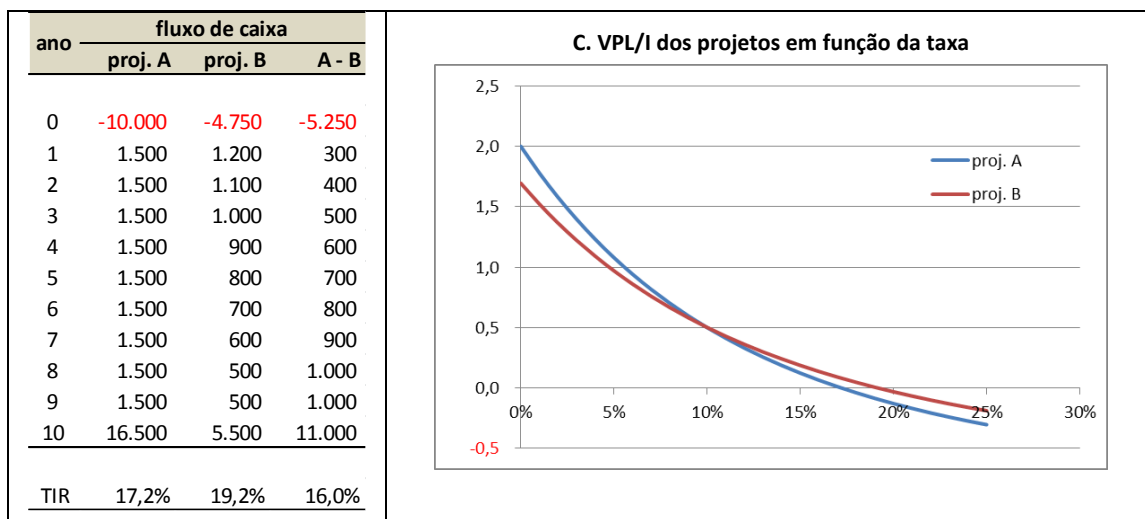


Nem sempre o custo de capital do projeto é conhecido e com frequência é pouco preciso. Apesar da imprecisão, é comum que seja conhecida uma faixa razoável dentro da qual esse número estará. Se, por exemplo, houver informações suficientes para situar o custo de capital (ou a taxa mínima de atratividade) entre 10% e 15%, então o projeto seguramente será viável. Por outro lado, se o custo de capital estiver claramente acima dos 20%, então ele será inviável. Já se as estimativas estiverem entre os 15% e os 20%, a dúvida persiste.

O mesmo acontece na comparação de dois projetos de investimento, como mostrado no **Objeto 46**.

**Objeto 46. VPL em função da taxa, para dois projetos.** Painel A: fluxo de caixa dos projetos A e B e diferença entre ambos os fluxos. São apresentadas as TIR de ambos os fluxos e da diferença entre eles. Os projetos são mutuamente excludentes. Painel B: VPL dos projetos como função da taxa. Painel C: VPL/I dos projetos como função da taxa.





O Pannel A mostra os fluxos de caixa dos projetos A (o mesmo do **Objeto 45**), do projeto B e da diferença entre ambos. O VPL do projeto A é superior ao do projeto B até a taxa de 16,0%, a partir da qual o projeto B passa a ser dominante. Note-se que a taxa em que as duas curvas se cruzam é a TIR da diferença entre os fluxos de caixa de ambos os projetos (**Desafio**, 306: mostre que esta última afirmação é verdadeira). Naturalmente, a partir da TIR do projeto B, nem ele é mais viável.

O Pannel C mostra o que acontece se o critério VPL for substituído pelo VPL/I. Com esse indicador e com os fluxos de caixa deste exemplo, o projeto B domina o A para taxas até os 10%, sendo dominado pelo B a partir daí.

Olhando os Painéis B e C, fica uma dúvida. Como é possível e que significado tem um projeto ser preferível segundo um critério e não segundo outro? Afinal de contas, qual é o método a ser utilizado? O texto dedicado a responder essa pergunta é o capítulo que discute qual método usar.

### TIR em Fluxos Não Convencionais

A TIR exige, por construção, um cuidado quanto ao formato do fluxo de caixa. Quando o fluxo de caixa (FC) é não convencional, podem ocorrer três questões:

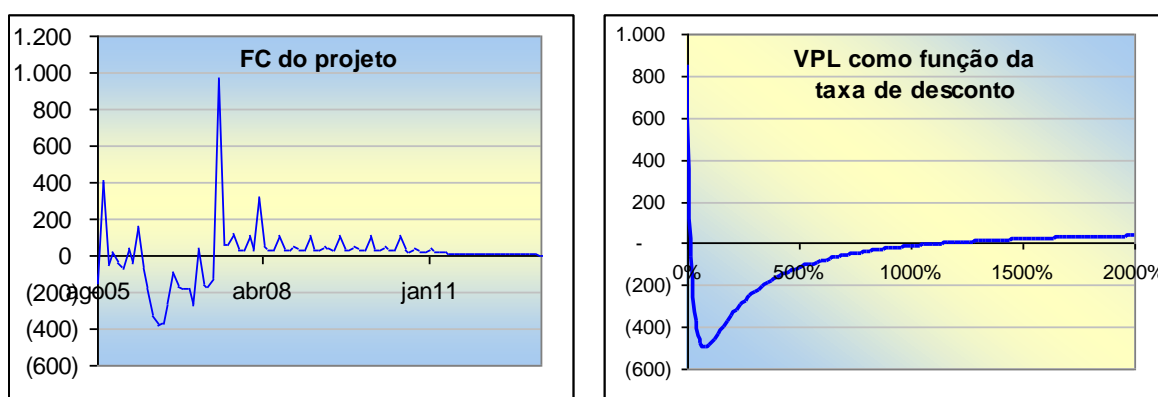
- Pode haver mais de uma TIR.
- TIR invertida. Em projetos não convencionais que se iniciam com entradas de caixa e terminam com saídas de caixa, a TIR deve ser interpretada como uma taxa de custo de financiamento, e não de retorno de investimento. Esse caso é raro.
- A TIR pode ser infinita (não há TIR). Alguns projetos não convencionais podem ter uma TIR extremamente elevada ou até não ter nenhuma TIR, caso caracterizado como de TIR infinita. Esse caso também é raro.

O caso mais importante é o da TIR múltipla. Se o fluxo de caixa for não convencional e houver mais de uma mudança de sinal, pode haver mais de uma taxa à qual o VPL é nulo. Uma equa-

ção polinomial (como a do VPL) tem um número de raízes reais positivas menor ou igual ao de inversões de sinal dos coeficientes. Em termos práticos, um fluxo de caixa não convencional pode ter mais de uma TIR, sendo o número máximo delas igual ao de inversões de sinal no fluxo de caixa. Se isto acontecer, o significado da TIR pode ser de difícil interpretação.

O **Objeto 47** traz um caso real de empreendimento imobiliário em que há duas TIR. Note-se que a curva do VPL cai inicialmente, cortando o eixo das abscissas em 17,6% a.a., atinge um ponto de mínimo, volta a subir, cortando o eixo novamente em 1.172% a.a. e estabiliza com VPL positivo.

**Objeto 47. Fluxo de caixa com duas TIR.** Painel A: fluxo de caixa não convencional, com várias inversões de sinal. Painel B: gráfico de VPL em função da taxa, com formato típico de fluxos convencionais. Duas TIR: 17,6% a.a. e 1.172% a.a.



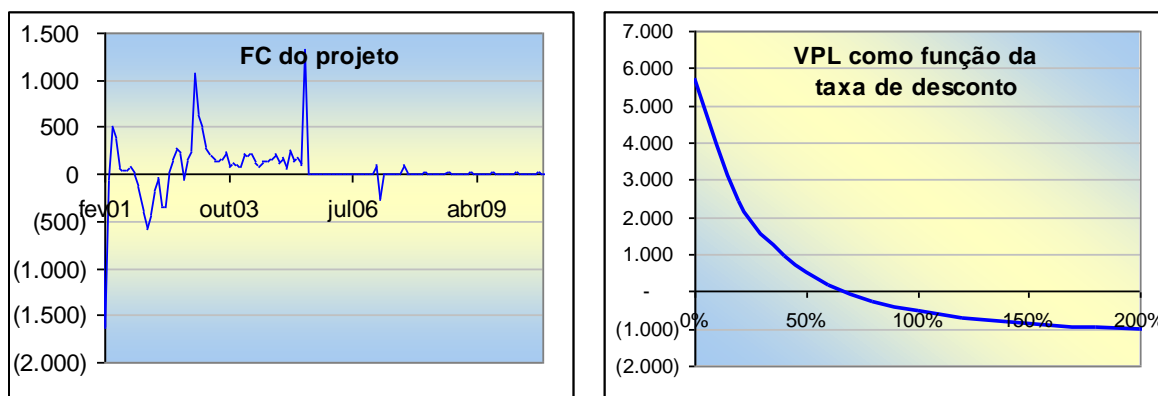
A duplicidade da TIR ocorreu por o FC ter três fases distintas: uma inicial, predominantemente positiva; uma intermediária, predominantemente negativa; uma final, positiva. Para taxas baixas, a fase final, positiva, tem um peso grande e predomina. Para taxas intermediárias, a fase final tem seu peso drasticamente reduzido, sendo dominada pela fase intermediária, negativa. Para taxas muito altas, tanto a segunda quanto a terceira fases são praticamente anuladas, restando o efeito positivo, embora pequeno, da fase inicial.

A interpretação das duas TIR se dá por meio da leitura do gráfico do VPL. Se o investidor espera obter um retorno inferior a 17,6%, o projeto gera um VPL positivo, portanto agrega valor. Se o investidor é mais exigente, o VPL do projeto é negativo e o valor é consumido. Se o investidor tivesse a expectativa de irreais 1.172%, então o projeto se tornaria novamente atrativo. A segunda taxa, a partir da qual o VPL volta a ser positivo, é irrealmente alta e o gráfico tem comportamento predominantemente convencional na região em que é razoável se esperar o custo do capital dos investidores. Portanto, é seguro afirmar que a TIR relevante ao projeto é de 17,6% a.a. e que a sua interpretação é a clássica. Podem ocorrer, entretanto, casos em que a interpretação das múltiplas TIR não seja tão simples.

O caso da TIR múltipla é difícil de encontrar na prática (Desafio, 307: monte um fluxo de caixa que tenha duas TIR na faixa razoável da TMA (até 50%); Desafio, 308: agora monte um com três TIR; Desafios, 309, 310: crie exemplos realistas de fluxos como esses dois). Mesmo em projetos que não tenham fluxo de caixa rigorosamente convencional, o formato do gráfico do VPL em função da taxa de desconto pode ser semelhante ao do convencional. Quase sempre,

mesmo quando há várias inversões de sinal, a análise do gráfico do VPL deixa claro haver uma única TIR positiva. Um exemplo é o de um projeto imobiliário, cujos gráficos de fluxo de caixa e VPL são apresentados no **Objeto 48**.

**Objeto 48. Fluxo não convencional com comportamento de convencional.** Painel A: fluxo de caixa não convencional, com várias inversões de sinal. Painel B: gráfico de VPL em função da taxa, com formato típico de fluxos convencionais. TIR única de 66,6% a.a.



Nesse caso, vê-se que o fluxo de caixa tem uma fase inicial de investimento, que dura 17 meses, para depois ter uma fase predominante e fortemente positiva. As várias inversões de sinal ocorrem com períodos curtos e com valores acumulados baixos, portanto são de pouca relevância e o fluxo acaba tendo comportamento de convencional. Há uma única TIR e sua interpretação é a clássica.

### Abordagens para o Uso da TIR em Projetos Não Convencionais

Há uma série de abordagens que podem ser utilizadas para a questão do formato do fluxo de caixa:

- Interpretar a TIR apenas no seu domínio, ou seja, na faixa razoável para a TMA. Se nessa faixa o VPL for positivo, o projeto é economicamente viável, independentemente da existência ou do valor da TIR em si. Esta abordagem foi utilizada neste capítulo. Ela exige conhecimento sobre a faixa razoável da TMA.
- Uma abordagem prática é a suavização do fluxo de caixa, como foi feito no capítulo que apresenta os fluxos de caixa não convencionais. Ela é melhor para projetos quase convencionais que têm saídas de caixa em alguns períodos intermediários, geralmente por prevenir expansões ou substituições periódicas de equipamentos caros. O fluxo negativo é suavizado pela retenção de fluxos positivos imediatamente anteriores e/ou pelo financiamento do investimento. O efeito é a transformação do fluxo de caixa em convencional, eliminando a questão do seu formato. A suavização do fluxo exige ao emprego de taxas de aplicação e de financiamento.
- Usar o VPL é uma alternativa que não sofre com o formato do FC e é de interpretação mais simples. Esta abordagem foi a utilizada neste texto. Ao contrário da TIR, que é adimensional, o VPL tende a ser maior em projetos maiores. Para comparação dos retornos dos pro-

jetos, o VPL deve ser tornado adimensional, o que pode ser feito dividindo-o pelo investimento inicial do projeto. O uso do VPL exige o uso de uma TMA.

- O uso da TIR modificada elimina o problema do formato do fluxo de caixa. Esse método é apresentado no tópico a seguir.

## TIR MODIFICADA E REINVESTIMENTO À PRÓPRIA TIR

### Taxa de Reinvestimento na TIR

O principal problema da TIR é a taxa de reinvestimento, ou seja, a taxa à qual será reinvestido o fluxo de caixa gerado pelo projeto. A TIR pressupõe que o caixa gerado será reinvestido à própria TIR. O caixa gerado pelo projeto pode ser reinvestido em ativos que têm um retorno esperado equivalente (mantido o risco) ao custo de oportunidade do projeto (modelado como custo de capital). Em projetos economicamente viáveis, a TIR será superior ao custo de capital (por definição), portanto o reinvestimento do caixa gerado será considerado irrealmente superior ao custo de capital. Esse é um viés sem solução na TIR.

Como a taxa de reinvestimento é superior ao custo de capital, levam aparente vantagem (têm TIR artificialmente maior) os projetos que geram caixa mais cedo (Desafio, 311: mostre que esta última afirmação é verdadeira). O efeito prático do problema da taxa de reinvestimento é superestimar a TIR em projetos economicamente viáveis (e subestimá-la nos inviáveis), como mostrado no Objeto 49.

Objeto 49. Projetos de mesmos VPL e investimento e TIR diferente. Valor terminal do projeto B ajustado para equiparar os VPLs dos projetos.

ano	proj. A	proj. B
0	-10.000	-10.000
1	5.500	500
2	4.500	1.500
3	3.500	2.500
4	2.500	3.500
5	1.500	4.500
6	500	5.500
7	0	8.110
k	15,0%	15,0%
VPL	2.502	2.502
TIR	29,2%	21,3%

Mesmo sendo equivalentes em termos de investimento inicial e valor gerado (VPL), a TIR do projeto que gera caixa antes (projeto A) é maior. Como o fluxo de caixa é maior logo nos primeiros anos, o efeito da taxa de reinvestimento superdimensionada é maior.



## Conceito e Equação da TIRM (TIR Modificada)

A TIR modificada - TIRM tem como função resolver o problema do irrealismo da taxa de reinvestimento na TIR, mantendo a ideia de taxa de retorno do investimento. Para isso, o fluxo de caixa da fase de investimento é trazido a valor presente e o caixa gerado é levado a valor futuro. O resultado é um fluxo de caixa com uma saída de caixa inicial e uma entrada final, sendo a TIRM a taxa calculada com esses valores:

$$TIRM = \left( \frac{\sum_{n=n_{inv}+1}^h FC_n(1+k)^{h-n}}{\sum_{n=0}^{n_{inv}} FC_n(1+k)^{-n}} \right)^{1/h} - 1 \quad (22)$$

O fluxo inicial do projeto, naquilo que possa ser entendido como a sua fase de investimento, é trazido a valor presente por uma taxa de aplicação financeira. Fazer isso significa que todo o capital necessário é alocado no início do projeto e aplicado a uma taxa livre de risco até o momento de ser necessário. O fluxo final, que possa ser considerado gerado pelo projeto é levado a valor futuro pelo custo de capital. O pressuposto é que o fluxo de caixa gerado será investido em projetos de mesmo risco, portanto a uma remuneração igual ao custo de capital. A aplicação da TIR modificada exige o conhecimento do custo de capital do projeto.

O **Objeto 50** traz um exemplo de aplicação da TIRM. Note-se que, como tanto o investimento inicial quanto o VPL são iguais, as TIRM também o são (Desafio, 312: mostre que esta última afirmação é verdadeira). Note-se também que o viés da taxa de reinvestimento é maior no projeto que gera caixa antes, mas que ele é presente em ambos os projetos (Desafio, 313: o que acontece em projetos em que a TIR é igual ao custo de capital).

A fase de investimento é a inicial (até  $n_{inv}$ ), em que há uma predominância de saídas de caixa sobre entradas. A sua identificação em um projeto convencional é trivial, mas em projetos mais complexos pode haver necessidade de um julgamento qualitativo. O importante é segregar, na fase de investimento, todo o fluxo de caixa (predominantemente negativo) que exige financiamento por meio do capital inicialmente investido no projeto. Em geral, isso significa até o ponto em que começa a entrar dinheiro no projeto. Às vezes, é utilizada alguma determinação arbitrária, geralmente baseada em algum marco do projeto:

- Em um projeto imobiliário e do ponto de vista da incorporadora, pode ser toda a fase até a entrega das chaves.
- Como alternativa e no mesmo projeto imobiliário, pode ser a fase até a assinatura da dívida bancária que financiará a obra.
- Em um projeto industrial, pode incluir a fase pré-operacional, em que a nova fábrica já produz, mas ainda em testes e gerando mais custos e despesas do que receita.

O fluxo de caixa da fase de investimento é trazido a valor presente por uma taxa de aplicação em renda fixa -  $k_f$  (ou livre de risco, ou de financiamento). Isto é consistente com a política usual de não arriscar o capital necessário à execução do projeto, por geralmente não valer a pena trocar a certeza da sua viabilidade financeira por um pouco a mais de rentabilidade esperada.

Já o fluxo da fase de geração de caixa é levado a valor futuro pelo custo de oportunidade do capital, com o que se corrige o principal problema da TIR: reinvestimento à própria TIR (geralmente irreal) e não ao custo de capital.

**Objeto 50. TIR modificada.** Projetos de mesmos VPL e investimento e TIR diferente. Valor terminal do projeto B ajustado para equiparar os VPLs dos projetos. Mesmos projetos do Objeto 49. VP(investimento): valor presente do fluxo de caixa da fase de investimento (apenas instante 0). VF(geração de caixa): valor futuro, usando o custo de capital, do fluxo de caixa da fase de geração de caixa (anos 1 a 7).

ano	proj. A	proj. B
0	-10.000	-10.000
1	5.500	500
2	4.500	1.500
3	3.500	2.500
4	2.500	3.500
5	1.500	4.500
6	500	5.500
7	0	8.110
k	15,0%	15,0%
VPL	2.502	2.502
TIR	29,2%	21,3%
VP (investimento)	10.000	10.000
VF (geração de caixa)	28.919	28.919
TIR-M	19,4%	19,4%

Uma TIRM maior que o custo de capital indica que o retorno do projeto é superior ao das alternativas de mesmo risco usualmente oferecidas pelo ambiente.

Apesar de a TIRM ter um conceito semelhante ao da TIR e não ter os seus problemas, a TIR é muito mais conhecida e utilizada. Isso se deve a que é mais antiga e que está em todas as calculadoras financeiras, ao contrário da TIRM. Apesar de ser calculada por um processo iterativo, a TIR utiliza conceitos mais simples que os da TIRM, sendo ensinada em todos os cursos de matemática financeira, novamente ao contrário da TIRM.

### Correspondência entre TIRM e VPL/I

Os indicadores TIRM e VPL/I são biunívoca e monotonicamente relacionados, ou seja, para cada TIRM há um único VPL/I (e vice-versa) e quando um cresce ou outro também cresce. A demonstração da expressão da TIRM como função de VPL/I está no Objeto 51.

### Objeto 51. Relação entre TIRM e VPL/I. os.

Partimos das equações do VPL e a dividimos em uma parcela referente à fase de investimento e outra à de geração de caixa:

$$VPL = \sum_{n=0}^h FC_n(1+k)^{-n} \quad (19)$$

$$VPL = \sum_{n=0}^{n_{inv}} FC_n(1+k_f)^{-n} + \sum_{n=n_{inv}+1}^h FC_n(1+k)^{-n}$$

A taxa na fase de investimento já foi ajustada para a de aplicação financeira em renda fixa. Lembrando que:

$$Inv = -\sum_{n=0}^{n_{inv}} FC_n(1+k_f)^{-n} \quad (23)$$

Temos:

$$VPL = -Inv + \sum_{n=n_{inv}+1}^h FC_n(1+k)^{-n}$$

Notamos que:

$$\sum_{n=n_{inv}+1}^h FC_n(1+k)^{-n} = (1+k)^{-h} \sum_{n=n_{inv}+1}^h FC_n(1+k)^{h-n}$$

O que permite escrever:

$$VPL = -Inv + (1+k)^{-h} \sum_{n=n_{inv}+1}^h FC_n(1+k)^{h-n} \quad \text{ou} \\ \sum_{n=n_{inv}+1}^h FC_n(1+k)^{h-n} = (VPL + Inv)(1+k)^h \quad (24)$$

Recuperamos a equação da TIRM e substituímos (23) e (24):

$$TIRM = \left( \frac{\sum_{n=n_{inv}+1}^h FC_n(1+k)^{h-n}}{\sum_{n=0}^{n_{inv}} FC_n(1+k_f)^{-n}} \right)^{1/h} - 1 \quad (22)$$

$$TIRM = \left( \frac{(VPL + Inv)(1+k)^h}{Inv} \right)^{1/h} - 1$$

$$TIRM = (VPL/I + 1)^{1/h} (1+k) - 1 \quad (\text{c.q.d.})$$

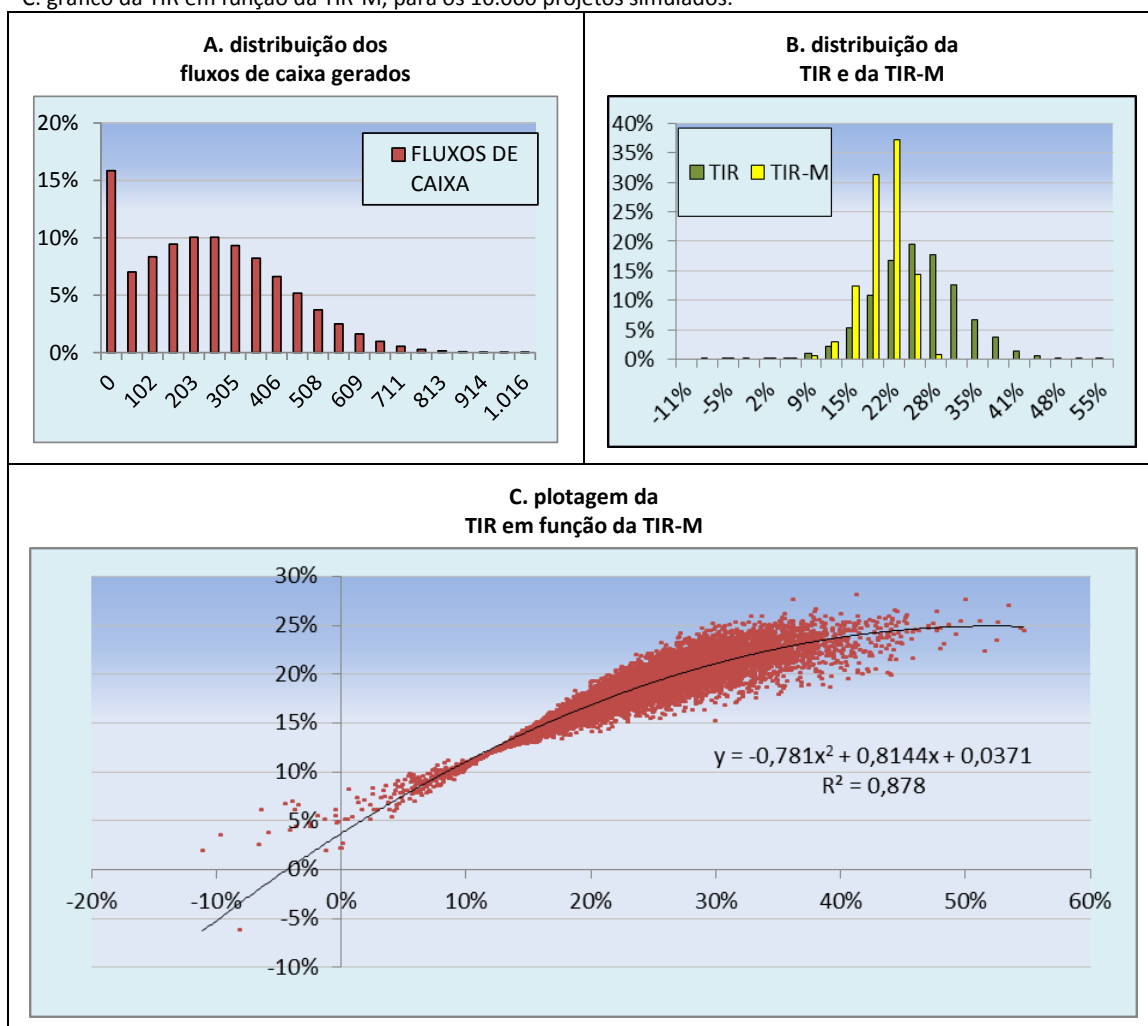
Como decorrência, uma relação de projetos será ordenada exatamente da mesma forma pela TIR<M e pelo VPL/I. Se a ordenação é a mesma (portanto a preferência) os dois métodos leva à escolha de exatamente os mesmos projetos. A escolha entre os métodos recai sobre as suas características secundárias:

- A TIRM é expressa sob a forma de taxa, o que torna a sua interpretação mais concreta e fácil de compreender por muitos tomadores de decisão. Ela é semelhante à TIR, portanto é possível explicá-la como "apenas uma forma mais elaborada de TIR", o que pode convencer públicos simples. Entretanto, ela é relativamente desconhecida, o que pode exigir explicações demoradas e tediosas.
- A grande vantagem do VPL/I é que tanto o VPL como o investimento são aditivos, o que facilita a escolha de projetos viáveis sob restrição de capital. Entretanto, o VPL/I não é expresso sob a forma de taxa de retorno, o que torna a sua interpretação mais abstrata e pode confundir alguns tomadores de decisão.

### Correspondência entre TIRM e TIR

A correspondência entre a TIR e a TIR-M não é exata, mas aproximada. Para ilustrar esse argumento, foi elaborado um experimento simulado, cujos resultados são apresentados no **Objeto 52**.

**Objeto 52. Relação entre TIRM e TIR.** Projetos simulados com investimento inicial de \$1.000 e fluxos de caixa gerados com média de \$200 e desvio padrão de \$200, truncados no zero (se menores que zero, valem zero). Valor terminar igual à média dos últimos três anos (para maior estabilidade), dividida pelo custo de capital de 12%. Número de sorteios: 10.000. Painel A: histograma dos fluxos de caixa gerados. Painel B: histograma da TIR e da TIR-M. Painel C: gráfico da TIR em função da TIR-M, para os 10.000 projetos simulados.



No Painel B vale a pena observar que a TIR-M têm valores menores que a TIR para projetos viáveis ( $TIR > k$ ) e maiores para os inviáveis ( $TIR < k$ ). Em decorrência, a dispersão da TIR-M é menor que a da TIR. Como os projetos geralmente são viáveis, a média da TIR-M é menor que a da TIR.

No Painel C são mostrados todos os 10 mil pares de TIR e TIR-M. Nota-se que há uma importante correlação entre ambos indicadores de viabilidade. Se for conhecida a TIR-M, a TIR pode ser encontrada em uma região delimitada relativamente estreita (e vice-versa).

Também foram (na simulação) comparados pares de projetos, para contar o número de casos em que a TI seleciona um projeto e a TIR-M outro, ou seja, os casos em que a TIR erra a escolha do investimento. Em 10.000 projetos simulados, o erro ocorreu 50 vezes (0,5% dos casos), o que não parece tão grave. Nesses 50 casos, a diferença média de VPL entre os projetos foi de 18,2% o capital investido, o que é bastante. Entretanto, se for considerado o conjunto dos 10.000 projetos, o erro médio foi de apenas 0,09%.

Em outras palavras, o investidor que preferir usar a TIR em lugar da TIR-M, concorda em perder, na média, 0,09% do seu capital (com as distribuições de fluxo de caixa desta simulação). Considerando que os erros de projeção de fluxos de caixa (receitas, despesas, etc.) são substancialmente maiores que isso, essa perda parece pouco significativa. Esse é provavelmente o principal argumento em contra da TIR-M: muito barulho para, ao final, selecionar praticamente os mesmos projetos que a TIR.

## RETORNO CONTÁBIL MÉDIO

### Conceito e Equação

O retorno contábil médio (AAR – average accounting return ou ARR – accounting rate of return) é algum tipo de média dos retornos contábeis gerados pelo projeto. Em geral, são utilizadas apenas as contas de natureza operacional da empresa. A equação básica é:

$$\frac{\frac{1}{h} \sum_{t=1}^h \text{resultado}_t}{\frac{1}{h+1} \sum_{t=0}^h \text{investimento}_t}$$

Como em outros métodos, o horizonte de projeto (h) é arbitrário. Ao contrário dos demais métodos, não se usa adicionar um valor terminal ao resultado do último período. Note-se que o investimento médio é calculado considerando-se também o instante zero. Alternativamente, pode-se calcular o investimento médio de cada ano e fazer a média desses investimentos médios anuais (Desafio, 314: mostra que isto é equivalente a dar peso 1 para as pontas e peso 2 para os demais).

Às vezes, utiliza-se a variante de calcular os retornos contábeis período a período e fazer uma média deles. Essa variante é pouco usada e pouco recomendada por trazer menor estabilidade à média, que poderia ser muito influenciada por um ano com retorno atipicamente alto ou baixo. Entretanto, essa variante pode ser preferida em casos em que a cultura gerencial da empresa não admite momentos com retorno abaixo da referência.

Os conceitos de resultado e de investimento utilizados são bastante variados. O **Objeto 53** traz uma série de variantes do resultado (Painel A) e do investimento (Painel B).

**Objeto 53. Variantes de lucro e investimento.** Em português e em inglês, os nomes das contas. Forma de cálculo: como a conta é obtida. Conceito: se a conta é operacional (ignorando a existência de dívidas) ou se é líquida (após descontar o efeito das dívidas). Painel A: formas alternativas de estimar o resultado. Painel B: formas alternativas de estimar o investimento. Os índices de rentabilidade são construídos dividindo uma conta de resultado por uma de investimento. Por mesclarem lucro e investimento antes e depois da dívida e dos juros, combinações de variantes operacionais e líquidas não fazem sentido.

A. Variantes de resultado			
em português	em inglês	forma de cálculo	conceito
LAJIDA lucro antes dos juros, do IR, da depreciação e da	EBITDA earnings before interest, tax, depreciation and	resultado líquido (+) resultado financeiro, iR, depreciação e	operacional; uma proxy muito usada do fluxo de caixa operacional

amortização	amortization	amortização	
LAJIR lucro antes dos juros e do IR	EBIT earnings before interest and tax	EBITDA (+) depreciação e amortização	operacional; semelhante ao EBITDA considerando que a depreciação / amortização é reinvestida
NOPAT (lucro antes dos juros, após o IR ajustado)	NOPAT net operating profit after (adjusted) tax	EBIT (-) EBIT x. alíquota de IR	operacional; este é o resultado gerado pelas operações da empresa
resultado líquido	net earnings	extraído diretamente dos demonstrativos financeiros	líquido; este é o lucro (ou prejuízo) para os sócios
<b>B. Variantes de investimento</b>			
<b>em português</b>	<b>em inglês</b>	<b>forma de cálculo</b>	<b>conceito</b>
AOL ativo operacional líquido	NOA net operating assets	ativo necessário à geração do caixa operacional, menos passivo espontaneamente decorrente dessa geração de caixa	operacional; este é o investimento total nas operações da empresa
AT ativo total	TA total assets	ativo total	operacional, mas considerando ativos não operacionais e sem descontar os passivos operacionais
PL patrimônio líquido	equity, book value	patrimônio líquido	líquido; este é o investimento dos sócios na empresa
patrimônio líquido tangível	TBV tangible book value	PL (-) ativos tangíveis (às vezes, apenas marca e goodwill)	líquido; semelhante ao PL, mas expurgando a existência de ativos intangíveis

Se uma série de ajustes forem feitos aos demonstrativos contábeis, de forma a chegar ao fluxo de caixa do projeto, uma versão do retorno contábil torna-se equivalente à TIR. Isso foi mostrado por (Casa Nova, Kassai, Santos, & Assaf Nº, 2000). Com ajustes adicionais, é possível chegar à TIR-M ou a outros indicadores de viabilidade econômica (Desafio, 315: que ajustes são esses?).

### Utilização



Os ajustes necessários para tornar o retorno contábil médio equivalente à TIR ou à TIR-M não (raramente) são feitos na prática (por serem difíceis e trabalhosos. No caso geral, utilizam-se os ativos e resultados diretamente dos demonstrativos financeiros, que registram receitas, despesas, ativos e passivos em datas mescladas e sujeitos a princípios contábeis arbitrários e conservadores (problemas mitigados mas não eliminados pelo IFRS). Além disso, a própria equação soma valores de datas diferentes (tanto no numerador como no denominador), tor-

nando o resultado inconsistente com uma taxa efetiva e não comparável ao custo de capital da empresa. Essas questões tornam o método muito impreciso e não recomendável.

O uso do retorno contábil médio pode ser encontrado nas empresas cuja cultura gerencial é dominada pelo desejo de remuneração variável dos gerentes e cuja métrica financeira principal é o retorno contábil. Os gestores (principalmente os da média gerência) reagem aos estímulos recebidos (premiação por terem um elevado retorno contábil e punição por não tê-lo) maximizando o indicador que lhes é imposto, sem grandes preocupações sobre o valor gerado pela empresa (“isso não é problema meu”). A consequência é um conjunto de projetos aprovados que maximiza a remuneração variável recebida no curto prazo e ignora o desempenho da empresa no longo. É uma boa receita para o insucesso estratégico da empresa.

## ATIVIDADES

Os exercícios são aplicações diretas (mais matemática simples do que finanças) das técnicas apresentadas no capítulo (podem ser usados conceitos de capítulos anteriores). Os problemas já têm enunciados com algum contexto e, em algumas situações, um pouco de dificuldade. Os casos reais trazem situações de aplicação colhidos (e simplificadas) da realidade e são escritos de modo a trazer uma forte impressão do contexto em que ocorreram e permitir fazer os cálculos necessários. Alguns casos podem ser difíceis.

Os exercícios, problemas e casos resolvidos (em planilha) estão assinalados com . Nem sempre os exercícios, problemas e casos exigem cálculos, podendo se resumir a aplicações dos conceitos desenvolvidos no capítulo. Em todas as atividades utilize juros compostos, exceto se houver informação em contrário. Algumas atividades podem ser longas (por envolverem muitos períodos), mas são repetitivas (as equações em cada período são as mesmas). Alguns exercícios e problema são continuação de anteriores, caso em que são assinalados com . Os exercícios, problemas e casos podem trazer (e frequentemente trazem) elementos de capítulos anteriores, que são considerados conhecidos.

## Exercícios

Nos exercícios a seguir, calcule o VPL, o VPL/I, a TIR, a TIR-M e o payback simples do investimento e indique se ele é economicamente viável.

ano	316.	317.	318.	319.
0	-5.000	-1.000.000	-800.000	-45.000
1	300	0	20.000	-12.000
2	1.000	100.000	40.000	-2.000
3	2.000	200.000	60.000	3.000
4	2.000	300.000	80.000	14.000
5	14.000	300.000	100.000	35.000
6	nihil	200.000	100.000	50.000
7	nihil	850.000	100.000	250.000

ano	316.	317.	318.	319.
8	nihil	nihil	100.000	nihil
9	nihil	nihil	100.000	nihil
10	nihil	nihil	900.000	nihil
TMA	14,5%	17,0%	6,8%	25,0%

Nos exercícios a seguir, calcule o VPL, o VPL/I, a TIR, a TIR-M e o payback simples do investimento e indique se ele é economicamente viável.

ano	320.	321.	322.	323.
0	-88.000	-15.000	-5.000	-3.500
1	39.000	2.250	500	-100
2	39.000	2.250	1.100	100
3	27.000	2.250	1.200	200
4	18.000	2.250	1.400	300
5	12.000	17.250	5.500	400
6	5.000	nihil	nihil	500
7	2.200	nihil	nihil	500
8	700	nihil	nihil	500
9	300	nihil	nihil	500
10	0	nihil	nihil	5.000
TMA	15,8%	7,8%	9,9%	11,4%

Nos exercícios a seguir, calcule o VPL, o VPL/I, a TIR, a TIR-M e o payback simples do investimento e indique se ele é economicamente viável.

ano	324.	325.	326.	327.
0	-200,0	-100.000	-100.000	-40.000
1	50,0	20.000	0	-20.000
2	50,0	20.000	0	-50.000
3	350,0	20.000	0	5.000
4	nihil	20.000	20.000	10.000
5	nihil	20.000	20.000	10.000
6	nihil	120.000	20.000	10.000
7	nihil	nihil	20.000	10.000
8	nihil	nihil	20.000	10.000
9	nihil	nihil	120.000	10.000
10	nihil	nihil	nihil	143.333
TMA	15,8%	15,0%	15,0%	7,5%

Nos exercícios a seguir, calcule o VPL, o VPL/I, a TIR, a TIR-M e o payback simples do investimento e indique se ele é economicamente viável.



ano	328.	329.	330.	331.
0	-1.000.000	-1.000	-15,80	-40.000
1	150.000	190	0,50	-20.000
2	220.000	250	0,55	-50.000
3	260.000	300	0,60	5.000
4	310.000	300	23,75	10.000
5	320.000	800	nihil	10.000
6	330.000	nihil	nihil	10.000
7	340.000	nihil	nihil	10.000
8	350.000	nihil	nihil	10.000
9	350.000	nihil	nihil	10.000
10	2.850.000	nihil	nihil	143.333
TMA	15,0%	12,0%	18,0%	7,5%

Nos exercícios a seguir, calcule o VPL, o VPL/I, a TIR, a TIR-M e o payback simples do investimento e indique se ele é economicamente viável.

anos	332.	333.	334.
0	-18.000	-40.000	-100.000
1 a 5	2.000	2.000	12.000
6 a 10	2.200	2.500	13.000
11 a 15	2.400	3.000	14.000
16 a 20	2.600	3.500	15.000
21 a 25	2.800	4.000	16.000
26 a 30	3.000	4.500	17.000
31 a 35	3.200	5.000	18.000
TMA	9,7%	7,2%	12,4%

## Problemas

335. Com base no seguinte projeto calcule VPL (TMA = 12% a.a.) e TIR, verifique se o projeto é viável e explique porque.

ano	fluxo de caixa
0	-420.000.000
1	50.000.000
2	75.000.000
3	100.000.000
4	100.000.000
5	500.000.000

336. 📌 Usando os dados do problema anterior, calcule o VPL para taxas de 0% a 50%, de 5% em 5%, trace o gráfico VPL x i e Identifique a TIR no gráfico.

337. Explique, com a ajuda de gráficos: por que um projeto pode ter mais de uma TIR e que soluções podem ser dadas ao problema.

338. Explique as vantagens e desvantagens da TIR modificada em relação à TIR.

339. Um projeto de investimento tem um fluxo de caixa com várias inversões (há receita pré-operacional durante a fase de investimento e investimento durante a fase de operação). Dado o fluxo de caixa a seguir, indique quando pode se considerar que a fase de investimento cessa.

trimestre	fluxo de caixa
0	-1.000.000
1	-20.000.000
2	-50.000.000
3	10.000.000
4	-120.000.000
5	-40.000.000
6	-20.000.000
7	20.000.000
8	-30.000.000
9	15.000.000
10	25.000.000
11	-10.000.000
12	10.000.000
13	-15.000.000
14	10.000.000
15	15.000.000
16	20.000.000
17 a 39	25.000.000
40	350.000.000

340. Continuando o problema anterior, calcule a TIR, a TIR-M e o VPL/I, considerando um custo de capital de 14% a.a..

### Caso: concessão com lucro duplicado

*TIR. Decisão de investimento. Decisão de financiamento.*



Um aparte das estradas é construída e operada usando o instrumento da concessão de serviços públicos (o particular faz o investimento, que pode ser só de reforma, em troca de uma receita de pedágio pelo prazo de algumas décadas). Dentre os vários interessados, leva a concessão quem pagar mais ao governo (ônus de concessão, que é um ganho para o governo, portanto para a população em geral) ou operar com uma tarifa mais baixa (ganho para o usuário, que é um recorte específico da população). As obras são geralmente financiadas pelo próprio governo (BNDES), em condições favorecidas (taxa baixa, prazo longo e/ou facilidade de obtenção). Essa operação atrai principalmente construtoras (de obras pesadas), que têm sinergia (de escopo) com a atividade de maior especialização e risco (a construção). Uma concessão de estrada de rodagem de quatro pistas (duas de ida e duas de volta) tinha seu investimento inicial orçado em \$1.000 milhões (considerado no ano 0). A receita com pedágios do ano 1 é de \$55 milhões e cresceria 30% no ano 2, 20% no ano 3, 10% no ano 4, 5% nos anos 5, 6 e 7 e para de crescer a

partir daí. O custo de operação e manutenção é (integralmente) fixo, de \$11 milhões. Após o ano 20, a concessão acaba (sem valor terminal) e o projeto (simplesmente) termina. Todos os valores e taxas estão em moeda real.

341. Monte o fluxo de caixa do empreendimento (fluxo antes do financiamento).

342. Calcule a TIR desse fluxo de caixa (fluxo antes do financiamento).

343. O BNDES financia 70% do investimento inicial em 20 anos a uma taxa (real) de 2% a.a.. Considerando que as parcelas anuais são iguais em valores reais, calcule o valor de cada parcela. Monte o fluxo de caixa do financiamento.

344. Monte o fluxo de caixa do empreendimento somado ao de financiamento (fluxo após o financiamento).

345. Calcule a TIR desse fluxo de caixa (fluxo após o financiamento).

346. A concessionária é também a construtora e tem um lucro na etapa de construção. De quanto é esse lucro, se ele for de 10% do investimento inicial. Monte o fluxo de caixa após o financiamento e após o lucro na construção (fluxo após o financiamento e o lucro da construção).

347. Calcule a TIR desse fluxo de caixa (fluxo após o financiamento e o lucro da construção).

348. Calcule a TIR desse fluxo de caixa (fluxo após o financiamento e o lucro da construção) se o lucro na construção for de 15%, 20%, 25% e 29%.

349. Calcule a TIR desse fluxo de caixa (fluxo após o financiamento e o lucro da construção) se o lucro na construção for de 30%. O que acontece?

350. Explique o que está acontecendo. Use uma linguagem apropriada ao entendimento por parte de um Governador de Estado (inteligente e muito vivo, porém geralmente sem muita educação formal em matemática financeira).

Este caso teve a colaboração de Rafael Falcão Noda, na discussão da operação.

### **Caso: supermercado falido**

*TIR em fluxo não convencional. Decisão de investimento.*



Havia uma vez uma rede média de supermercados que não aguentou ao aumento colossal das taxas de juros no país. Até então, os juros nominais eram muito altos (alta inflação), mas os juros reais oscilavam entre baixos e negativos (juros baixos trazem desenvolvimento: juros altos pagos pelo governo tornam pouco competitivo o investimento em produção e permitem o governo continuar gastando à vontade no curto prazo, gasto que termina no consumo; aumentar o consumo em detrimento do investimento deixa os governantes populares no curto prazo, mas pouco ajuda no longo). A maioria dos supermercados mantinha estoques tão altos quanto podia, para aumentar o poder de negociação com os fornecedores e como proteção contra a inflação (a cesta de produtos de um supermercado é bem diversificada e acompanha com alguma precisão a inflação geral). Derrotado pela inflação, o governo resolveu partir para a ignorância: aumento os juros reais, política até hoje recorrente (juros altos canalizam o dinheiro para o governo, que, em teoria, o esteriliza; isso freia o consumo e o investimento, segurando a inflação no curto prazo; o problema é que os juros são uma despesa do governo e competem com outras necessidades; com as contas já apertadas por uma economia disfuncional e com juros altos, a dívida pública pode crescer exponencialmente, agigantando o problema da geração seguinte). Muitos supermercados mantiveram sua política de estoques anterior, que vinha sendo a base do modelo de negócio vencedor no setor. Mas um novo modelo emergiu como vencedor: estoque baixo libera caixa (que é aplicado a juros altos) e exigência de grandes descontos dos fornecedores (parcialmente repassados ao consumidor, facilitados pela economia parada e pela grande escala do supermercadista). Os que mantiveram a tradição não aguentaram e foram sendo comprados. Vários deles estavam com dívidas tributárias e até trabalhistas impossíveis de resolver e não podiam ser vendidos (na legislação da época, alguns tipos de dívida do falido passavam para quem comprasse qualquer bem dela, mesmo que fosse em leilão judicial).

Uma solução que não transmitia as dívidas ao comprador foi arrendar (alugar) as instalações da massa falida enquanto a questão judicial não era resolvida e comprá-las somente ao final (ou continuar arrendando indefinidamente). A tabela mostra um caso como esse: o ‘comprador’ opera o supermercado, fica com o lucro operacional e paga o aluguel; quando finalmente a questão judicial for resolvida, compra o supermercado e decide se fica com ele ou o revende (neste caso, ele o revende). A operação é de alto risco judicial, o que leva a TMA a 17,8% a.a. reais (coerentemente, o fluxo de caixa também está em moeda real).

ano	operação	aluguel	compra ao final	venda ao final	total
0	0	0			0
1	80.000	-30.000			50.000
2	80.000	-30.000			50.000
3	80.000	-30.000			50.000
4	80.000	-30.000			50.000
5	80.000	-30.000	-800.000	500.000	-250.000

351. Calcule VPL e TIR, identifique se o projeto é viável e diga por que.

352. Calcule o VPL para taxas de 0% a 50%, de 5% em 5%.

353. Trace o gráfico VPL x i (tipo de gráfico: dispersão, ou XY). Identifique a TIR no gráfico.

354. O projeto passa a ser viável a partir da TIR e não até ela. Como você interpreta este resultado?

355. O projeto é viável? Por quê?

356. Quando a realidade muda, a decisão racional é:

- a) Manter a política anterior: “o ambiente não devia ter mudado; o anterior era melhor”.
- b) Manter a política anterior: “está tudo errado, mas já vai voltar tudo ao que era”.
- c) Manter a política anterior: “foi essa política que nos trouxe onde estamos; os nossos críticos sempre estiveram errados e nós certos”.
- d) Manter a política anterior: “vou é em frente; recuar é para os fracos”.
- e) Adaptar-se.

### Caso: sucateamento da geradora de energia nuclear

*TIR em fluxo não convencional. Decisão de investimento.*



Uma usina nuclear é uma operação com forte regulação ambiental. Por causa disso, ela tem um alto custo de sucateamento no final, o que dá um fluxo de caixa como o da tabela a seguir (só que com muitos mais anos).

ano	investimento	operação	recuperação	total
0	-500.000	0		-500.000
1		500.000		500.000
2		300.000		300.000
3		400.000		400.000
4		200.000		200.000
5		0	-1.000.000	-1.000.000

357. Trace o gráfico VPL x i e identifique as duas TIR no gráfico.

358. Sabendo-se que o mercado jamais exigirá retornos reais inferiores aos 8% ou superiores aos 20%, como você interpreta as duas TIR?

359. É um bom investimento?

## 9

# TEMPO DE RETORNO

### TEMPO DE RETORNO DO INVESTIMENTO

#### Conceito, Equação e Cálculo do Tempo de Retorno

O tempo de retorno - pb (ou *payback*, ou *payback simples*, ou tempo de retorno simples,) é simplesmente quanto tempo leva até que todo o investimento inicial seja pago:

$$\sum_{n=0}^{PB} FC_n = 0$$

O *payback* não é uma função normalmente pré-programada em planilhas ou calculadoras financeiras, devendo ser calculada manualmente.

No caso geral, o somatório o *payback* é fracionário, devendo ser obtido por interpolação linear, como no **Objeto 54** (Desafio, 360: mostre que o método de interpolação apresentado é preciso).

**Objeto 54. Payback simples.** Fluxo de caixa acumulado: soma simples desde o instante zero. A interpolação da parte fracionária do *payback* divide o fluxo anterior ao zero pela distância entre o posterior e o anterior.

ano	fluxo de caixa	fluxo de caixa acumulado	interpolação
0	-10.000	-10.000	
1	2.100	-7.900	
2	2.100	-5.800	
3	2.100	-3.700	
4	2.100	-1.600	$\left\{ 4 + \frac{1600}{1600+500} = 4,8 \right.$
5	2.100	500	
6	2.100	2.600	
7	2.100	4.700	
8	2.100	6.800	
9	2.100	8.900	
10	21.191	30.091	

## Correspondência entre o Tempo de Retorno e a TIR

Em uma perpetuidade constante, o tempo de retorno é a inversa da TIR (Desafio, 361: mostre que esta última afirmação é verdadeira), portanto ordena os projetos da mesma forma:

$$pb = \frac{VP}{FC_1}$$

E um fluxo irregular

## Utilização do Tempo de Retorno enquanto Método de Avaliação da Viabilidade Econômica

O critério de viabilidade do tempo de retorno é um prazo máximo (crítico), quase sempre arbitrado a partir da experiência da empresa ou da pessoa que faz a avaliação.

Um primeiro aspecto que chama a atenção é que ele não considera o valor do dinheiro no tempo, somando fluxos de datas diferentes. Essa limitação não é tão grave quanto parece, pois a aplicabilidade do método restringe-se a fluxos de caixa e tomadores de decisão simples. De qualquer forma, esta objeção é objeto de análise no item que lida com o método do payback descontado.

Dos métodos de avaliação de investimentos, o tempo de retorno é claramente o mais fácil de compreender e usar. Como a TIR e o retorno contábil médio, ele não exige a predefinição de um critério viabilidade (é perfeitamente possível definir o retorno mínimo após calculadas as TIR dos projetos; já o cálculo do VPL e seus derivados exige uma TMA determinada a priori). Além disso, o tempo de retorno não inclui considerações quanto ao valor do dinheiro no tempo. Por não exigir conhecimento de matemática financeira ou ferramentas como calculadoras e planilhas, pode ser usado muito rapidamente e por pessoas quase sem habilidade quantitativa.

O método do tempo de retorno é, entretanto, um grave problema: ele ignora o futuro além dele mesmo. Qualquer coisa, favorável ou desfavorável, que aconteça (ou possa acontecer) depois desse prazo não altera o tempo de retorno, portanto torna-se irrelevante, como mostrado no **Objeto 55**.

**Objeto 55. Indiferença ao fluxo de caixa subsequente ao tempo de retorno.** Fluxo de caixa de 3 projetos de investimento de mesmo payback simples (4 anos). Os 3 projetos são idênticos até o tempo de retorno e são radicalmente diferentes após ele. O Projeto A mantém o mesmo nível de geração de caixa anterior, o Projeto B torna-se espetacularmente favorável e o Projeto C entra em colapso desastroso. O método tempo de retorno não é capaz de discriminar esses projetos.

ano	Projeto A	Projeto B	Projeto C
0	-10.000	-10.000	-10.000
1	2.500	2.500	2.500
2	2.500	2.500	2.500
3	2.500	2.500	2.500
4	2.500	2.500	2.500
5	2.500	30.000	-30.000
6	2.500	30.000	0
7	2.500	30.000	0
8	2.500	30.000	0
9	2.500	30.000	0
10	27.500	330.000	0
TIR	28,7%	68,6%	não há

Essa deficiência torna o método do tempo de retorno inadequado (e até perigoso) para a avaliação de projetos que tenham grandes oscilações no seu fluxo de caixa. A sua aplicabilidade real enquanto método de avaliação de viabilidade econômica de investimentos, se concentra em projetos com fluxos relativamente constantes (ou que pelo menos não tenham grandes oscilações após o tempo de retorno).

Em resumo, o tempo de retorno tem a vantagem da simplicidade matemática, que torna o método especialmente ajustado para tomadores de decisão com restrição cognitiva (não conhecem matemática financeira), mas é limitado a investimentos que tenham fluxos de caixa relativamente pouco complexos. A sua aplicabilidade é concentrada em ambientes em que a vantagem seja muito importante e a desvantagem pouco provável:

- **Nível hierárquico baixo.** São cargos povoados (usualmente) por gerentes de baixo escalão, supervisores e líderes de turma, que recebem (usualmente) pouca ou nenhuma educação formal em avaliação de investimentos. As decisões se referem (usualmente) a projetos simples, com fluxos de caixa simples (usualmente com um investimento inicial único e benefícios constantes ou levemente crescentes).
- **Pequenos negócios,** Aqui os projetos podem ser tão complexos quanto os das grandes empresas, o que recomenda o uso de técnicas com limitações mais aceitáveis. Entretanto, a restrição cognitiva de muitos empreendedores os condena ao uso do tempo de retorno, mesmo quando a técnica não for recomendável.
- **Avaliações super-rápidas.** Às vezes há projetos que são evidentemente viáveis, qualquer que seja o método de avaliação a ser utilizado. Nesses casos, uma avaliação muito rápida (com uma simples conta de cabeça) pode ser preferida, especialmente em um processo criativo, em que parar para fazer uma conta poderia esfriar um momento favorável.

Um caso adicional é o dos projetos que se pagam no próprio exercício. Às vezes, empresas entram em fases de dificuldade financeira, em que mesmo projetos altamente vantajosos devem ser postos de lado. Às vezes as metas financeiras são anuais, o que permite aprovar projetos desde que se paguem no mesmo ano. Por isso, empresas sob forte restrição orçamentária podem se restringir à aprovação de projetos com tempo de retorno de um ano ou até menos (para deixar uma margem de segurança). Nesse caso, há uma mescla das viabilidades econômica e a financeira podem se mesclar, levando à utilização do método do tempo de retorno simples.

### Utilização do Tempo de Retorno enquanto Método de Avaliação do Risco

Uma segunda aplicação do tempo de retorno é enquanto método (simples) para avaliação do risco de um investimento. Essa aplicação é especialmente relevante em casos em que há uma considerável probabilidade de colapso do projeto em um momento futuro desconhecido e é importante recuperar o máximo possível o quanto antes. A antecipação do fluxo de caixa (mesmo com redução do retorno do projeto) é uma forma de mitigação do risco a que o capital está submetido, pois reduz-se o montante de dinheiro perdido no caso do evento negativo se materializar. O **Objeto 56** traz um exemplo.

**Objeto 56. Projeto com elevada probabilidade de colapso.** Projeto base com investimento de \$100, geração de caixa anual e perpétua de \$50, e probabilidade de colapso em cada ano de 30%. São 11 cenários (A a J e OK) definidos em função do ano do colapso. Por exemplo, a probabilidade de ocorrência do cenário B (bom funcionamento no ano 1, seguido de colapso no ano 2) é a probabilidade de não ocorrer o colapso no ano 1 (70%) multiplicada pela probabilidade de ocorrer no ano 2 (70%). A do cenário C é a probabilidade de o projeto sobreviver aos anos 1 e 2 (1-30%-21%) multiplicada pela dele colapsar no 3 (30%). Ao último cenário (OK) foi atribuído o restante das probabilidades.

ano	CENÁRIO										
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	OK
prob.	30,0%	21,0%	14,7%	10,3%	7,2%	5,0%	3,5%	2,5%	1,7%	1,2%	2,8%
0	-100	-100	-100	-100	-100	-100	-100	-100	-100	-100	-100
1	0	50	50	50	50	50	50	50	50	50	50
2	0	0	50	50	50	50	50	50	50	50	50
3	0	0	0	50	50	50	50	50	50	50	50
4	0	0	0	0	50	50	50	50	50	50	50
5	0	0	0	0	0	50	50	50	50	50	50
6	0	0	0	0	0	0	50	50	50	50	50
7	0	0	0	0	0	0	0	50	50	50	50
8	0	0	0	0	0	0	0	0	50	50	50
9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	50	50
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	150

Note-se que, apesar do excepcional retorno do caso base (cenário OK, com TIR de 50% e payback de 2 anos), após considerado o risco, o projeto não é nada bom (Desafio, 362: calcule o fluxo de caixa esperado pela soma dos fluxos multiplicados pelas respectivas probabilidades e calcule a sua TIR).

Quando o futuro tem grande incerteza, a maior parte dos investidores prefere recuperar rapidamente uma quantidade de caixa suficiente para descaracterizar a perda com o investimento. Essa é uma situação comum em pequenos negócios, sujeitos a ganhar bem por alguns anos pa-



ra ter de fechar em seguida devido à instalação de um concorrente mais forte. Outra situação típica em que há substancial risco de fracasso abrupto é o investimento em países ou setores em que as instituições são frágeis e podem sofrer alterações drásticas de comportamento. Isso explica (há outros fatores) a elevada taxa de retorno dos projetos básicos necessária à viabilização de investimentos em pequenas empresas e em países com instituições claudicantes.

## PAYBACK DESCONTADO

### Conceito, Equação e Cálculo do Payback Descontado

O tempo de retorno descontado - pbd (ou discounted payback) é quanto tempo leva até que todo o investimento inicial seja pago, se cada fluxo de caixa for trazido a valor presente:

$$\sum_{n=0}^{pbd} FC_n (1+i)^{-n} = 0$$

Alternativamente, pode ser definido como o tempo necessário para que o valor futuro líquido se torne nulo (Desafio, 363: mostre que estas duas definições são equivalentes):

$$\sum_{n=0}^{pbd} FC_n (1+i)^n = 0$$

Novamente, normalmente deve ser calculado manualmente. A interpolação da parte fracionária pode ser obtida por interpolação linear, como mostrado no **Objeto 57**. No caso do payback descontado, essa forma de interpolação é razoavelmente precisa, embora inexata (Desafio, 364: como fazer uma interpolação mais precisa que a linear?).

**Objeto 57. Payback descontado.** Fluxo de caixa acumulado: soma simples desde o instante zero. A interpolação da parte fracionária do payback divide o fluxo anterior ao zero pela distância entre o posterior e o anterior.

ano	fluxo de caixa	fluxo de caixa acumulado	interpolação
0	-10.000	-10.000	
1	2.100	-7.900	
2	2.100	-5.800	
3	2.100	-3.700	
4	2.100	-1.600	$\left\{ 4 + \frac{1600}{1600+500} = 4,8 \right.$
5	2.100	500	
6	2.100	2.600	
7	2.100	4.700	
8	2.100	6.800	
9	2.100	8.900	
10	21.191	30.091	

No limite da viabilidade econômica, o VPL é zero (o projeto ainda é viável). Nesse caso, o payback descontado será igual ao horizonte do projeto, porque o VPL só se torna nulo se todo o fluxo de caixa projetado for considerado. No caso de perpetuidades (em que todo o fluxo de caixa considerado significa para sempre) o payback descontado (do projeto com VPL nulo) é infinito.

### Utilização do Payback Descontado


Uma crítica óbvia ao payback simples é que ele não leva em conta o valor do dinheiro no tempo, ou seja, ele comete o sacrilégio de somar fluxos de caixa de tempos diferentes. Essa crítica é pouco relevante quando o tempo e retorno é utilizado para avaliar a viabilidade econômica de um investimento (em substituição à TIR, ao VPL/I ou à TIR-M). Afinal, a simplicidade que é tão importante aos aplicadores típicos se perderia se houvesse necessidade de trazer valores ao presente e o método seria dominado pelos outros.


Por outro lado, enquanto método de estimação do risco de investimentos, o payback descontado tem seu sentido. O payback simples refere-se ao tempo necessário para por em segurança o valor investido; o descontado refere-se ao valor investido mais o retorno mínimo que teria sido obtido nos investimentos descartados.

Em qualquer dos casos (exceto se a taxa de juros for negativa, o que não é realista), o payback descontado é mais longo que o simples (Desafio, 365: mostre que esta última afirmação é verdadeira). É natural que o prazo crítico (se o payback do projeto for menor que o crítico, o projeto é viável) do payback simples seja mais curto que o do descontado (que mesmo infinito ainda indica um investimento viável) (Desafio, 366: mostre que esta última afirmação é verdadeira; dica: o projeto é viável ou não, portanto, se for viável ou inviável, o será nos dois métodos). Acontece que os prazos críticos geralmente são definidos arbitrariamente, com base na experiência dos tomadores de decisão, é esperado que o prazo crítico do payback descontado seja substancialmente mais longo que o do simples (Desafio, 367: em uma perpetuidade constante, expresse o tempo crítico do payback descontado em função do simples). Com essa adequada escolha dos prazos críticos, fica fortemente atenuada a ausência de uso de juros no método do tempo de retorno simples.

### ATIVIDADES

Os exercícios são aplicações diretas (mais matemática simples do que finanças) das técnicas apresentadas no capítulo (podem ser usados conceitos de capítulos anteriores). Os problemas já têm enunciados com algum contexto e, em algumas situações, um pouco de dificuldade. Os casos reais trazem situações de aplicação colhidos (e simplificadas) da realidade e são escritos de modo a trazer uma forte impressão do contexto em que ocorreram e permitir fazer os cálculos necessários. Alguns casos podem ser difíceis.

Os exercícios, problemas e casos resolvidos (em planilha) estão assinalados com . Nem sempre os exercícios, problemas e casos exigem cálculos, podendo se resumir a aplicações dos conceitos desenvolvidos no capítulo. Em todas as atividades utilize juros compostos, exceto se

houver informação em contrário. Algumas atividades podem ser longas (por envolverem muitos períodos), mas são repetitivas (as equações em cada período são as mesmas). Alguns exercícios e problema são continuação de anteriores, caso em que são assinalados com . Os exercícios, problemas e casos podem trazer (e frequentemente trazem) elementos de capítulos anteriores, que são considerados conhecidos.












## Exercícios

Calcule o payback simples e o payback descontado dos seguintes fluxos de caixa.

	368.	369.	370.	371.	372.
início	-1.000	-1.000	-1.000	-1.000	-1.000
ano 1	150	150	0	250	400
ano 2	200	200	0	-400	400
ano 3	150	150	150	250	400
ano 4	180	180	200	300	400
ano 5	220	220	150	450	400
ano 6	250	250	180	0	400
ano 7	200	200	220	450	400
ano 8	120	120	250	300	400
ano 9	150	150	200	150	400
ano 10	200	1.400	120	200	400
TMA	9,0%	4,0%	9,0%	11,0%	7,5%

Em cada um dos exercícios anteriores, interprete a diferença entre ambos os indicadores.

## Problemas

373. Qual o tempo de retorno simples de um investimento de \$3.000 que rende \$600 por mês?
374.  Qual a TIR desse projeto?
375.  Qual o payback descontado caso anterior, à taxa de 25% a.a.?
376.  Qual o VPL relativo ao investimento desse projeto?
377.  O projeto é viável?
378. Qual o tempo de retorno simples de um investimento de \$15.000 que rende \$250 por mês?
379.  Qual a TIR desse projeto?
380.  Qual o payback descontado caso anterior, à taxa de 11% a.a.?
381.  Qual o VPL relativo ao investimento desse projeto?
382.  O projeto é viável?
383. Qual o tempo de retorno simples de um investimento de \$120.000 que rende \$20.000 por ano?
384.  Qual a TIR desse projeto?
385.  Qual o payback descontado caso anterior, à taxa de 18% a.a.?
386.  Qual o VPL relativo ao investimento desse projeto?

387.  O projeto é viável?

388. Um supervisor de produção trouxe uma solução de produtividade que exige um investimento de \$120.000 e gera uma redução de custo de \$30.000 mensais. A solução é economicamente viável?

389. Um gerente de loja propôs investir \$50 mil em uma nova linha de produtos, que deve aumentar a receita em \$5 mil mensais e o lucro em \$500 mensais. A solução é economicamente viável?

### Caso: metalúrgica.

VPL. VPL/I. Tempo de retorno. Restrição cognitiva. Decisão de investimento.



Uma empresa média (200 empregados) do ramo metalúrgico tinha um dilema. Como motivar os supervisores (produção A, produção B, turno noturno, qualidade, manutenção mecânica, manutenção elétrica e expedição) a gerar ideias que, mesmo com pequenos e médios investimentos, fossem capazes de gerar ganhos para a empresa? São esses profissionais que conhecem todos os detalhes do dia-a-dia, as suas ideias de melhoria podem gerar milhões em melhorias de produtividade e qualidade. Essas pessoas conhecem a sua técnica e não têm dificuldade em comunicar suas ideias, desde que não tenham que escrevê-las. O lado do incentivo foi facilmente resolvido com um esforço da direção que incluía uma postura proativa (criação de instâncias de apresentação de sugestões) e receptiva (receber a sugestão com um elogio ao invés de uma crítica), temperada por um par de conversas amigáveis (“estamos todos no mesmo barco”, “você é uma pessoa muito importante”, “vamos crescer juntos”, “você é uma pessoa de muito futuro aqui dentro”). O problema era como fazer eles entenderem quais os investimentos que gerariam ganhos suficientes e quais não. A primeira sugestão foi ensinar técnicas como VPL e TIR para eles (métodos que se mostraram de difícil compreensão). A segunda foi alocar parte do tempo de um estagiário de engenharia para ajuda-los nas contas (ele não tinha dificuldades, mas os supervisores se sentiram humilhados de ter que pedir ajuda de um menino e pararam de levar ideias). A terceira foi trocar o método de avaliação pelo payback simples, mas havia dúvidas sobre a qualidade da seleção de investimentos que ele geraria. Para ajudar nessa decisão foram utilizados 8 projetos de pequenas melhorias que trazem um aumento de produtividade (independentes, não excludentes, não fracionáveis), avaliados a uma TMA de 14% a.a. Naquele ano, havia apenas \$100.000 para esse tipo de investimento.

projeto		investi- mento inicial	caixa gerado por mês	vida útil esperada (meses)
A	✓	30.000	6.000	18
B	✓	20.000	7.500	24
C	✗	20.000	12.500	60
D	✗	36.000	3.200	60
E	✗	24.000	4.700	18
F	✓	54.000	9.000	24
G	✗	24.000	4.500	60
H	✓	27.000	1.800	36

390. Calcule o VPL de cada projeto.

391. Calcule o VPL relativo ao investimento de cada projeto.

392. Calcule o tempo de retorno simples de cada projeto.

393. Quais os projetos a serem selecionados pelo critério do VPL/I. Qual o VPL total desses projetos?

394. Quais os projetos a serem selecionados pelo critério do tempo de retorno? Qual o VPL total desses projetos?

395. Qual a perda de VPL se for utilizado o método do tempo de retorno?

396. Considere que apenas os projetos assinalados com ✓ teriam sido apresentados se os supervisores fossem obrigados a calcular o VPL (impossível!) ou a se submeter à avaliação do tal do estagiário (oh, horror!!!). Para apenas esses projetos, quais seria selecionados pelo critério do VPL/I e qual o seu VPL total.

397. E pelo método do tempo de retorno?

398. Como perder menos dinheiro: usar o método do tempo de retorno ou deixar de estimular a apresentação de sugestões potencialmente valiosas?

### **Caso: melhoria de processo.**

*TIR. Tempo de retorno. Decisão de investimento.*



Em pauta um projeto de melhoria em uma metalúrgica média (a mesma anterior, embora os casos não sejam relacionados, exceto pelo fato de a ideia ter sido trazida por um dos supervisores). O projeto é instalar alguns durômetros (aço mais duro é aço mais resistente) para controlar a qualidade da produção. A rápida identificação de falhas recorrentes permite ajustar as máquinas da produção com maior frequência, reduzindo perdas de material e aumentando a qualidade do produto. O investimento inicial é de \$140.000, que gera um ganho de 80.000 por mês pelos próximos 5 anos. Após isso, espera-se trocar as máquinas da produção por outras automatizadas, o que deverá tornar obsoleta a solução dos durômetros.

399. Calcule o tempo de retorno do projeto.

400. Calcule a TIR anual do projeto.

401. O projeto é viável?

402. O Diretor Financeiro viu o projeto e falou: “Algo está errado. Não existem taxas de retorno tão altas. Nunca vi algo assim na minha vida. Isso é melhor do que o rendimento de qualquer ação na bolsa em qualquer ano. Melhor refazer essas contas.” Comente a fala desse Diretor.

### **Caso: lançamento de carro.**

*TIR. Tempo de retorno. Questões éticas. Decisão de investimento.*



Uma montadora multinacional no Brasil precisou lançar um novo modelo de carro em tempo recorde para salvar seus lucros. Era 2001 e a economia argentina havia entrado em colapso. Eles haviam escrito na constituição que 1 austral (a moeda da época) equivaleria sempre a 1 dólar estadunidense. Foi tudo muito bem, até que a inflação ressurgiu (no final, várias províncias começaram a emitir as suas próprias moedas, o que destruiu a moeda de vez). A paridade com o dólar não pôde ser mantida e o austral entrou em colapso. Os argentinos mantinham depósitos bancários em dólares (no próprio país), acreditando estar protegidos, mas foram surpreendidos pela transformação compulsória na desvalorizada moeda nacional. O que se seguiu foi uma paralização econômica, com direito à derrubada do governo e à moratória da dívida externa. Em princípio, a montadora no Brasil não seria severamente atingida pela perda de vendas ao país Hermano. Entretanto, na matriz, a diretoria responsável pela América Latina percebeu que a crise argentina faria com que as suas metas não fossem atingidas. A solução foi exigir um sacrifício das unidades nos demais países comandados pelo mesmo Diretor, dentre eles o Brasil. Foi um ano de aperto de cintos geral, de cancelamento de projetos, de corte de despesas, de arroxo de fornecedores, de demissão de pessoas que não tinham nada a ver com a questão. Uma das ordens era cancelar todos os investimentos que não se pagassem no mesmo ano. Ainda assim, a montadora resolveu lançar um novo modelo de automóvel, pois a concorrência estava ganhando terreno rapidamente. Conseguiram uma proeza: criar um novo produto e lançá-lo de forma que o investimento se pagasse em um ano (na verdade, o payback foi de 8 meses). Para tanto, criaram um modelo que era o sonho da equipe de mar-

keting (tinha tudo que o consumidor tanto queria) e o pesadelo da engenharia (havia vários problemas no projeto e na durabilidade do produto). Foi um sucesso de mercado e financeiro instantâneo e até hoje o é.

403. Qual a TIR (anual) de um investimento (considere-o investimento integralmente no instante zero) que gera um fluxo de caixa perpétuo e tem um retorno simples de 8 meses?

404. Como muda a TIR se o fluxo de caixa gerado crescer 30% a.a. até o 3º ano, 15% a.a. até o 6º e 5% a.a. em diante até o 20º ano, quando o modelo deve ser substituído e o fluxo de caixa torna-se nulo.

405. O modelo é viável?

406. Dito de outra forma, há algum motivo pelo qual o modelo seria inviável?

### Caso: Venezuela.

VPL. VPL/I. TIR. TIR-M. Tempo de retorno. Risco político. Decisão de investimento.



Uma construtora conseguiu um bom contrato na Venezuela. Desde 1999, o país é governado por uma coalizão socialista. Foi mais uma opereta latino-americana com direito a golpe fracassado por parte do futuro presidente, eleição do próprio, constituinte, nova constituição com poderes ditatoriais para o presidente, importação de médicos cubanos, protestos em massa com mortes, golpe de estado da oposição, abandono do golpe da oposição, financiamento e outras ajudas a grupo guerrilheiro colombiano, referendo para tentar remover o presidente, eleição sem presença da oposição, desapropriação de empresas privadas, eliminação da imprensa livre, tentativa fracassada de reforma constitucional centralizante e morte do presidente logo após ele assumir o seu quarto mandato. Tudo isso em um país regado a petrodólares, mas que, no período, se viu reduzido de 5º para 12º exportador de petróleo. Em 2014, seu sucessor enfrentava graves protestos, novamente com mortes. Diante desse cenário, a construtora estava considerando duas formas alternativas de entrar no país:

- Alugar boa parte dos equipamentos necessários de terceiros locais. Nesse caso, terminará a obra em 2 anos e poderá permanecer no país, mas com obras menores.
- Adquirir todos os equipamentos necessários. A manifestação de confiança no país, associada à boa performance na obra e a um trabalho de lobby que ressalte tudo isso, será (provavelmente) recompensada com mais obras no futuro. Naturalmente, isso se o governo não for derrubado ou resolver se tornar subitamente hostil.

Os fluxos de caixa são apresentados a seguir. O custo do capital real é estimado em 18% a.a..

ano	compra	aluguel
0	-350.000	-100.000
1	90.000	52.500
2	90.000	52.500
3	135.000	8.750
4	135.000	8.750
5	180.000	8.750
6	180.000	8.750
7	180.000	8.750
8	137.143	1.607
9	137.143	1.607
10	899.048	10.536

407. Calcule o tempo de retorno (payback simples) de ambas as alternativas.

408. Segundo esse critério, qual delas é a preferida?

409. Calcule o payback descontado de ambas as alternativas.

410. Segundo esse critério, qual delas é a preferida?
411. Por que ocorre essa discrepância entre ambos os métodos?
412. Calcule o VPL, o VPL/I, a TIR e a TIR-M de ambas as alternativas.
413. Segundo esses métodos, qual a alternativa a ser escolhida?
414. Considerando o retorno e o risco das alternativas, qual delas você escolheria.

## 10

# QUAL MÉTODO UTILIZAR: UMA SÍNTESE

### CRITÉRIOS DE SELEÇÃO DE INVESTIMENTOS: VISÃO DE CONJUNTO









#### A Lei do Preço Único








































A Lei, genericamente. Se há dois projetos, um será escolhido, portanto um deles será o melhor. Se há dois critérios divergentes, um deles será melhor.

#### Pontos Fortes e Fracos dos Métodos de Avaliação de Investimentos

Nos capítulos anteriores, foram apresentados muitos métodos de seleção de projetos de investimento. Cada um tem pontos fortes e fracos (às vezes notáveis), apresentados no **Objeto 58**.



**Objeto 58. Pontos fortes e fracos dos métodos de investimento.** As cores indicam a qualidade do método no quesito: **verde** = bom; **cinza** = médio; **vermelho** = ruim. As estrelas indicam a relevância geral do método. Abund: aplicável sob abundância de capital (irrelevância da eficiência do capital). Restr: aplicável sob restrição de capital (eficiência no uso do capital é central). As bombas indicam inconsistência metodológica:  = consistente,  = com problemas menores,  = inconsistente. Mitig: os problemas podem ser mitigados. Inputs utilizados pelo método: **FC** = fluxo de caixa normal, **FC** = há problemas com o fluxo de caixa; **k** = não é necessário estimar um retorno mínimo a priori, **k** = o método precisa que um retorno mínimo seja estimado a priori, **k** = há inconsistências em relação ao retorno mínimo. Grau de conhecimento (e utilização) em grandes empresas: **GE** = grande, **GE** = médio, **GE** = baixo ou nulo. Grau de conhecimento (e utilização) em pequenas empresas: **PE** = grande, **PE** = médio, **PE** = baixo ou nulo. Grau de conhecimento (e ensino) na academia:  = grande,  = médio,  = baixo ou nulo. Há uma função pronta no excel: **fx** = sim, **fx** = não. Há um botão nas calculadoras financeiras:  = sim,  = não. Grau de concretude dos conceitos usados no método: **concr** = muito concreto (e fácil de interpretar), **concr** = relativamente concreto, **concr** = muito abstrato (e difícil de interpretar). Grau de dificuldade de cálculo: **calc** = muito fácil, **calc** = facilidade moderada.

método	aplicação	consistência	inputs	conhecimento	usabilidade
VPL	☆☆☆, Abund		FC, k, h	GE PE  fx 	concr, calc
VPL/Inv	☆☆☆, Restr		FC, k, h	GE PE  fx 	concr, calc
VFL	☆, Abund		FC, k, h	GE PE  fx 	concr, calc
VFLP	☆, Abund		FC, k, h	GE PE  fx 	concr, calc
SUL	☆☆, Abund	 	FC, k, h	GE PE  fx 	concr, calc
TIR	☆☆☆, Restr	   (mitig)	FC, k, h	GE PE  fx 	concr, calc
TIR-M	☆☆, Restr		FC, k, h	GE PE  fx 	concr, calc
retorno contábil médio	☆, Restr	  	FC, k, h	GE PE  fx 	concr, calc
payback simples	☆☆☆, Restr	   (mitig)	FC, k, h	GE PE  fx 	concr, calc
payback descontado	☆, Restr	  	FC, k, h	GE PE  fx 	concr, calc

Dentre os métodos, quatro ganham destaque enquanto principais: o VPL (valor presente líquido), o VPL/I (VPL relativo ao investimento, também conhecido como índice de lucratividade) a TIR (taxa interna de retorno) e o tempo de retorno (payback simples).

### Circunstância em que cada Método é Preferível

Métodos diferentes dão resultados diferentes, portanto podem indicar preferências diferentes entre projetos. Para cada par de investimentos, apenas um deles será considerado preferível e (se for necessário escolher um e descartar o outro) será o aprovado. O fato de um e não o outro ser aprovado mostra que um deles é melhor (do ponto de vista do tomador da decisão) e que o método que aponta para a sua superioridade é o mais preciso naquela circunstância. Em outras palavras, para cada circunstância, há um método de avaliação (absoluta ou relativa) de investimentos que é superior (melhor adaptado à circunstância) aos demais.

Às vezes, observa-se empresas que utilizam mais de um método para a tomada da mesma decisão de investimento. São soluções (inadequadas) como:

- Ordenar as alternativas segundo cada um dos métodos, atribuir pontos à posição de cada alternativa em cada método e tirar a média desses pontos.
- Usar um método principal e, se houver empate (ou se a diferença for pequena), desempatar pelos demais,
- Avaliar cada alternativa segundo cada método e fazer uma enquete (pode ser uma reunião) entre os executivos, onde cada um pode dar mais peso ao método que lhe for mais simpático.

O uso de processos de decisão como esses denota a não definição (por parte da empresa) de um método de avaliação econômica de investimentos, decorrente da não compreensão das situações em que cada um deles deve ser aplicado. As características mais marcantes e as aplicações dos quatro principais métodos de avaliação econômica de investimentos são:

- VPL: o valor presente do caixa gerado, líquido do investimento necessário. É o método padrão (e para muitos o único) para avaliar investimentos sob abundância de capital. O método é desprovido de problemas conceituais, mas pode ser abstrato demais para muitas empresas pequenas.
- VPL/I: o VPL relativo ao investimento. É o método conceitualmente íntegro para avaliar investimentos sob restrição de capital. Tanto o VPL como o investimento são aditivos, o que facilita a seleção dentre múltiplas alternativas. Como o VPL, pode ser excessivamente abstrato para muitas pequenas empresas.
- TIR: a taxa que torna o VPL nulo. É um método muito popular para avaliar investimentos sob restrição de capital, podendo substituir o VPL/I (com desvantagens). Por usar uma linguagem concreta (taxa de retorno) é especialmente adaptado a públicos (relativamente) simples (média gerência e pequenas empresas). Por não exigir a definição a priori de um retorno mínimo, é especialmente adequada a pequenas empresas (para as quais não foram desenvolvidos métodos confiáveis de determinação do custo de capital). A TIR depende do horizonte de projeto escolhido (que é arbitrário), o que pode ser mitigado com a projeção explícita de muitos anos. O problema de poder haver mais de uma TIR é facilmente transponível pela suavização do fluxo de caixa. Já o pressuposto de a taxa de reinvestimento ser igual à própria TIR é insolúvel (a não ser que se troque o método), mas seu efeito prático é (felizmente) pequeno (portanto ignorável em muitos casos).
- Tempo de retorno: quando o fluxo de caixa gerado iguala o investimento inicial (sem considerar o valor do dinheiro no tempo). É recomendado para avaliar investimentos sob restrição de capital e sob restrição cognitiva. Por ser extremamente fácil de compreender e aplicar, é recomendado para pequenas empresas e pessoal de níveis hierárquicos baixos de grandes empresas. Como a TIR, não exige a definição de um retorno mínimo a priori, o que o torna adequado a pequenas empresas (que podem não conhecer seu custo de capital). Tem o problema (insolúvel) de ignorar o futuro além de si próprio, o que é mitigado pelo

fato de os projetos do seu público-alvo tenderem a gerar fluxos de caixa constantes (talvez com algum crescimento, perpétuos ou não).

Os principais problemas dos demais métodos são:

- VFL: é redundante em relação ao VPL e é virtualmente desconhecido.
- VFPL: é mais concreto que o VPL, mas não fornece um único número e é virtualmente desconhecido.
- SUL: é o VPL diluído pela vida econômica do projeto. Adequado no caso (infrequente) em que são comparados projetos com vidas diferentes, embora seja muito abstrato para diversos públicos. Torna-se impreciso quando a versão subsequente do projeto é diferente da atual (o que geralmente ocorre no longo prazo).
- TIR-M: é redundante em relação ao VPL/I, mas deve ser recalculada para cada combinação de alternativas. É pouco conhecida.
- Retorno contábil médio: utiliza critérios contábeis (arbitrários e dessincronizados em relação ao fluxo de caixa) na projeção do lucro e do investimento, além do que o retorno mínimo a ser usado não é o custo de capital. É preferido em ambientes em que o impacto da remuneração variável sobre a remuneração variável é forte a ponto de os gerentes aprovarem projetos piores para a empresa desde que bons para eles.
- Tempo de retorno descontado: ignora o futuro além de si próprio e não tem a facilidade de cálculo do tempo de retorno simples.

## O LADO QUALI

### Efeitos de Difícil Quantificação

Há situações em que é difícil medir benefícios (a favor) ou custos (contra) de forma precisa o suficiente para incluí-los no fluxo de caixa. Isso ocorre quando eles são:

- De natureza difusa, por beneficiarem ou onerarem a empresa inteira.
- De difícil quantificação, quando o benefício ou custo é percebido como existente, mas é muito difícil de quantificar com alguma precisão.
- Decorrentes de sinergias (positivas ou negativas) em relação a outras áreas, produtos ou mercados (ou mais) e cuja mensuração sob a forma de fluxo de caixa é muito difícil (ou politicamente inconveniente).

Às vezes um benefício ou custo poderia ser quantificado (embora não trivialmente), mas não há interesse de alguma parte politicamente influente em fazê-lo. Se o indivíduo (ou grupo) tiver suficiente poder, é mais fácil argumentar que um dado efeito é qualitativo (ou estratégico, como alguns gostam de dizer) e que não pode ser quantificado. Ato seguido, defende-se que

esse efeito é muito relevante, a ponto de inverter a avaliação feita com base no fluxo de caixa (quantificado). Alternativamente, defende-se que o efeito é pouco relevante e pode ser ignorado. Quem ganha é o indivíduo (ou grupo) poderoso que usa essa estratégia para impor seus interesses e quem perde é a empresa.



## **Soluções**

A questão tem sido resolvida de três formas (e um ou mais híbridos):

- Calcular a viabilidade econômica com base na parte quantificada do fluxo de caixa (segundo o método adequado à circunstância), o que dará uma avaliação parcial do projeto. Estimar qualitativamente os efeitos de difícil quantificação (o que normalmente é feito com textos, carregados de adjetivos e advérbios). Tentar fazer uma síntese de ambos os fatores usando um julgamento final qualitativo, baseado nos valores, experiências, ambições, temores e interesses de cada executivo que participa desse processo.
- Fazer um esforço de quantificação dos efeitos mesmo quando isso é muito difícil, forçando a natureza do fator. Essa solução tende a dar um resultado impreciso (e pouco confiável), mas com a aparente objetividade que os números trazem. Ajuda se a quantificação desses efeitos for feita seguindo a mesma metodologia para todas as alternativas (por reduzir a heterogeneidade da avaliação) e se os critérios de quantificação forem consensados a priori (o que reduz embates posteriores).
- Fazer a avaliação inversa dos efeitos de difícil quantificação. Nesta abordagem, calcula-se o máximo efeito necessário dos fatores qualitativos que alteraria a decisão. Muitas vezes esse efeito é grande demais para ser considerado possível e a decisão é mantida. Outras vezes, fica claro que mesmo um pequeno efeito mudaria a decisão e que (portanto) ela deve ser mudada. Entretanto, esta abordagem não é capaz de diferenciar (com precisão) alternativas relativamente próximas.
- Uma solução híbrida é quantificar o piso do efeito qualitativo que se espera obter em cada alternativa, reduzindo a parte residual (e de quantificação mais difícil ainda) dos efeitos qualitativos. Ato seguido, toma-se uma decisão final com um componente qualitativo, possivelmente auxiliada pelo exercício da avaliação inversa dos efeitos qualitativos residuais.

## **ATIVIDADES**

Os exercícios são aplicações diretas (mais matemática simples do que finanças) das técnicas apresentadas no capítulo (podem ser usados conceitos de capítulos anteriores). Os problemas já têm enunciados com algum contexto e, em algumas situações, um pouco de dificuldade. Os casos reais trazem situações de aplicação colhidos (e simplificadas) da realidade e são escritos de modo a trazer uma forte impressão do contexto em que ocorreram e permitir fazer os cálculos necessários. Alguns casos podem ser difíceis.

Os exercícios, problemas e casos resolvidos (em planilha) estão assinalados com . Nem sempre os exercícios, problemas e casos exigem cálculos, podendo se resumir a aplicações dos conceitos desenvolvidos no capítulo. Em todas as atividades utilize juros compostos, exceto se houver informação em contrário. Algumas atividades podem ser longas (por envolverem muitos períodos), mas são repetitivas (as equações em cada período são as mesmas). Alguns exercícios e problema são continuação de anteriores, caso em que são assinalados com . Os exercícios, problemas e casos podem trazer (e frequentemente trazem) elementos de capítulos anteriores, que são considerados conhecidos.

## Exercícios

Nas situações a seguir, indique qual (ou quais) o critério de seleção de investimentos é recomendado e explique o porquê.

415. Uma empresa de capital aberto emite ações para expandir as suas operações em 35%.
416. Um gerente dessa mesma empresa recebe uma verba de investimento do ano que vem e deve apresentar a correspondente relação de projetos.
417. Uma corporação norte-americana imagina comprar seu principal concorrente.
418. Um gerente dessa corporação está considerando quais projetos recomendar ao seu diretor, pois a verba de investimentos da diretoria é limitada e as demais áreas estarão apresentando projetos que concorrem pelos mesmos recursos.
419. O diretor da mesma corporação tem em mãos um projeto muito atrativo que extrapola, de muito, a verba de investimento alocada ao seu país.
420. O encarregado de manutenção da mesma empresa, sem treinamento formal em matemática financeira, quer provar que a compra de um equipamento automático é vantajosa.
421. Uma média empresa brasileira está considerando em quais projetos investir, dentre os 30 elaborados pela assessoria de planejamento, sabendo que as oportunidades não aproveitadas serão provavelmente perdidas.
422. Uma pequena empresa deve lançar apenas um (ou nenhum) dos três novos produtos que a sua área de marketing desenvolveu, pois não tem equipe para administrar o lançamento dos três. Se tiver sucesso e capital suficiente, no ano que vem, poderá lançar o segundo da lista (os concorrentes são meio parados).
423. A Secretaria de Obras de uma prefeitura deve escolher, dentre uma relação de 2 mil propostas, quais serão os 50 a 150 projetos que realizará no mandato do atual prefeito.

## Problemas

424. Explique em que situações e por que deve ser preferido o VPL na seleção de projetos de investimento. Há situações em que o uso da TIR pode ser preferido? Quais?
425. Um Diretor Industrial teorizou o seguinte. “A teoria na prática é outra. Os livros de finanças são unânimes em ressaltar as vantagens do VPL sobre a TIR. Parece mais uma discussão sobre o sexo dos anjos. Por outro lado, mais da metade dos diretores de empresas utilizam a TIR como critério principal. Outros, na dúvida, utilizam os dois. Durma-se... Euzinho prefiro acompanhar a maioria dos praticantes, a final, o mercado está sempre certo. Se ele não estiver com a razão, pelo menos as minhas ações não destoam dos demais gerentes e diretores de empresas.” Explique porque você concorda com ou discorda dele.

São dados os seguinte fluxos de caixa. A TMA é de 14% a.a.. Os projetos são mutuamente excludentes. Todos são financeiramente viáveis.

ano	Projeto A	Projeto B	Projeto C
0	-10.000	-5.000	-1.000
1	1.980	1.050	280
2	1.640	920	280
3	1.640	920	280
4	1.640	920	280
5	13.400	7.500	2.300

426. ☞ Calcule o VPL de cada projeto.

427. ☞ Calcule a TIR de cada projeto.

428. ☞ Calcule o índice de lucratividade (VPL/I) de cada projeto.

429. ☞ Qual deles é preferível se a empresa tiver abundância de capital?

430. ☞ Qual deles é preferido se a empresa sofrer de forte restrição de capital e for provavel que futuros projetos bem rentáveis venham a ser desenvolvidos.

431. Uma empresa possui capital de \$ 300 mil e se defronta com três projetos de investimento não excludentes. Ignore a existência de projetos de investimento ainda desconhecidos. Para maximizar a riqueza dos sócios, a empresa deve escolher quais dos projetos?

	Projeto I	Projeto II	Projeto III
capital requerido	150 mil	200 mil	120 mil
VPL	50 mil	100 mil	80 mil
VPL / Inv	0,33	0,50	0,67
TIR	19%	27%	32%
TIR-M	18%	24%	28%
tempo de retorno	6 anos	4 anos	3 anos

432. Um investidor reservou \$100 mil para investir em um projeto. Ele tem duas alternativas. Qual delas deve ser a escolhida se o critério for o VPL ou a TIR?

ano	Projeto A	Projeto B
0	(100.000)	(16)
1	12.000	30
2	18.000	30
3	22.000	30
4	28.000	30
5	180.000	30

custo de capital: 20,0% 20,0%

433. No problema anterior, afinal de contas, qual dos dois projetos deverá ser o escolhido? Por que? Ignore a existência de projetos de investimento ainda desconhecidos.

Para os próximos 7 problemas. Considere os seguintes três projetos de investimento, todos com custo de capital de 15%. Calcule o VPL, o VPL/I e a TIR de cada um destes projetos. Ignore a existência de projetos de investimento ainda desconhecidos.

ano	A	B	C
0	(4.500)	(5.400)	(3.000)
1	800	0	1.500
2	1.500	800	2.100
3	600	1.500	700
4	2.000	3.500	300
5	4.000	6.000	0
i	15%	15%	15%

Qual ou quais devem ser escolhidos para as seguintes situações:

434. ☐ Os projetos não são mutuamente excludentes e o capital hoje disponível é de \$ 4.000.
435. ☐ Os projetos não são mutuamente excludentes e o capital hoje disponível é de \$ 10.000.
436. ☐ Os projetos são mutuamente excludentes e o capital hoje disponível é de \$ 10.000.
437. ☐ Os projetos não são mutuamente excludentes, o capital hoje disponível é de \$ 8.000 e, se dois ou mais projetos forem implantados, o investimento total é reduzido em 10%.
438. ☐ Os projetos não são mutuamente excludentes e o capital pode ser captado do mercado em qualquer quantidade.
439. ☐ Os projetos são mutuamente excludentes e o capital pode ser captado do mercado em qualquer quantidade.
440. ☐ Os projetos não são mutuamente excludentes, o capital hoje disponível é de \$ 10.000, mas os investimentos podem ser compartilhados com parceiros estratégicos.

Para os próximos 5 problemas. São dados os fluxos de caixa de projetos mutuamente excludentes. A TMA é de 12% a.a.. Todos são financeiramente viáveis.

ano	Projeto A	Projeto B	Projeto C	Projeto D	Projeto E
0	-10.000	-8.000	-6.000	-5.000	-5.000
1	2.200	1.800	1.600	600	800
2	2.200	1.800	1.600	600	800
3	2.200	1.800	1.600	600	800
4	2.200	1.800	1.600	600	800
5	15.100	12.400	11.000	4.100	5.500

441. ☐ Calcule o VPL e o VPL/I de cada projeto.
442. ☐ Calcule a TIR e a TIR modificada de cada projeto.
443. ☐ Calcule o tempo de retorno simpels e o descontado de cada projeto.
444. ☐ A empresa é de capital aberto e não sofre restrições de capital. Qual o projeto a ser escolhido?
445. ☐ Quais os projetos a serem escolhidos se eles não forem mutuamente excludentes?

### Caso: siderúrgica.

*Impactos de difícil quantificação. Decisão de investimento.*



Uma siderúrgica nacional tinha que resolver um dilema: implantar ou não um sistema de ERP (enterprise resources planning, sistema informatizado no qual são operadas e registradas todas as transações envolvendo recursos, especialmente os financeiros). Os principais concorrentes (internacionais e nacionais) já tinham, mas os sistemas que a empresa havia desenvolvido internamente funcionavam (relativamente) bem e quaisquer problemas que tinham podiam ser solucionados com (relativa) facilidade. O custo (de aquisição, customização e implantação) era algo como 10% do lucro de um ano (que andava baixo por causa do preço do aço e da baixa produtividade da empresa). A economia de custo de operação do sistema (se é que havia alguma) era pequena, a ponto de poder ser ignorada (portanto, a TIR era negativa, talvez infinitamente). A principal pressão em favor do novo ERP era de acionistas minoritários, que viam os ERPs funcionando nas demais empresas em que investiam e não entendiam por que a siderúrgica estava tão atrasada nisso. Uma avaliação técnica dos sistemas vigentes deixou claro que atendiam bem as necessidades da operação, adaptando-se em detalhes aos processos de trabalho desenvolvidos por três gerações de técnicos e gerentes. Também ficou claro que os múltiplos sistemas não eram robustos, com muitos remendos para atender pedidos ad hoc (muitos de utilidade esquecida no tempo), gerando informações divergentes (inúteis para a tomada de decisão em níveis hierárquicos superiores) e

permitindo alterações de dados (ao sabor dos interesses do dono da informação). O maior valor a ser gerado pela implantação do novo ERP seria aumentar o controle financeiro e operacional e (principalmente) transferir informação (portanto poder) da média gerência para os executivos do topo da empresa. Com mais informação e poder, esses executivos poderiam fazer as transformações necessárias e criar e implementar estratégias que aumentariam significativamente o valor gerado pela empresa. Era exatamente isso que os acionistas queriam.

446. Prepare uma apresentação (powerpoint ou equivalente), explicando o valor gerado (e consumido) pelo projeto.

447. Por que esses benefícios são tão difíceis de quantificar?

448. Como a recomendação da implantação do ERP foi (provavelmente) recebida pelos principais executivos da empresa?

449. Que reações era possível esperar da média gerência?

### **Caso: MBA.**

*Impactos de difícil quantificação. Decisão de investimento.*



A controladoria (cujas funções incluíam controlar a aprovação de projetos) da operação brasileira de uma multinacional europeia insistia na política de exigir a comprovação da viabilidade econômica de qualquer investimento. Todos os efeitos (mesmo os muito qualitativos) deveriam ser convertidos em fluxo de caixa ou seriam ignorados (linha dura). A empresa no Brasil estava passando por uma fase de dificuldade financeira devido a um grande investimento que haviam financiado com dívidas e que maturaria somente em alguns anos. O país estava atravessando uma daquelas fases econômicas e políticas difíceis e não eram esperados aportes de capital da matriz na Europa (cada um por si). Nessa fase, a política de só aprovar o que fosse comprovadamente rentável foi enfatizada (zero valor para argumentos qualitativos), o método de aprovação de projetos foi mudado para VPL/I (devido à restrição de capital), com retorno de investimento em não mais de 4 anos (devido ao risco político). Uma das áreas mais afetadas foi a de Gestão de Pessoas (Recursos Humanos), que (notoriamente) tem dificuldade em converter seus resultados em um fluxo de caixa porque eles se manifestam por meio do aumento do desempenho das demais áreas (é muito difícil separar os efeitos dos esforços da área de Gestão de Pessoas das áreas em que as pessoas estão trabalhando). Uma ação da área é o financiamento de cursos de MBA para colaboradores promissores, que pode ser in company (simplificação do curso aberto, um pouco mais barato, pode ter adaptações à empresa, geralmente pago integralmente pela empresa) ou aberto ao público (com troca de experiências mais rica, mais exigente em relação à performance dos participantes, geralmente custeado parte pela empresa e parte pelo empregado). O objetivo é o efeito motivacional (devo retribuir com um esforço extra; a empresa acredita em mim porque sou valioso), a retenção das pessoas (não posso sair enquanto estou no curso, nem por um par de anos depois; a situação está apertada, mas é só uma fase e vale a pena continuar aqui; se a empresa está investindo no pessoal do futuro é porque acredita no próprio futuro), o recrutamento de melhores candidatos (via promessa de desenvolvimento) e a preparação dos futuros gerentes e executivos (muitos vão sair, mas os que ficarem vão tomar decisões melhores, algumas estrategicamente decisivas; alguns vão ficar na empresa por muitos anos e uns poucos se tornarão os executivos do futuro). Argumentos contrários também podem ser (se serão) apresentados: se não é possível provar que o dinheiro é bem gasto então ele não deve ser gasto (a política da controladoria), cada pessoa que busque (e custeie) seu próprio desenvolvimento (se acharem que vale a pena, pagarão do bolso), as pessoas não valorizam tanto assim esse tipo de curso (a não ser que venha de graça), projetos como esse servem mesmo para resolver o problema existencial das áreas proponentes (se não fazem esse tipo de coisa, então para que servem?) ou para dar poder e prestígio aos executivos das áreas proponentes (o valor do executivo é proporcional ao seu orçamento). A questão é: como converter tudo isso em fluxo de caixa?

450. Prepare uma apresentação (powerpoint ou equivalente), explicando os prós e contras do projeto. Evite indelicadezas.

451. Por que esses benefícios são tão difíceis de quantificar?



452. Essa explicação será (provavelmente) suficiente para convencer a controladoria a aprovar o projeto?

453. Para cada fator de geração de valor, explique como pode ser (se é que pode ser) convertido em fluxo de caixa. Lembre-se: o que não for quantificado será ignorado, por melhor que seja o discurso.

---

# **PARTE D**

# **DÍVIDAS**

---

# 11

## SISTEMAS DE AMORTIZAÇÃO

### INTRODUÇÃO

#### Separação de Amortização e Juros

Quando uma pessoa toma um empréstimo ela se compromete a, em uma data futura, pagar de volta o dinheiro que recebeu. O dinheiro recebido em empréstimos é o principal da dívida. A devolução do principal é a amortização da dívida. O custo da dívida são os juros.

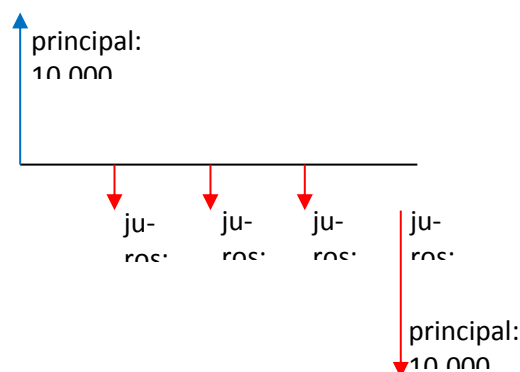
Há dois motivos para separar o total do pagamento feito ao credor em principal e juros:

- Conhecer o saldo devedor da dívida, que é a parcela do principal que ainda resta a pagar. Quando são utilizados valores históricos, a dívida é contabilizada pelo seu saldo devedor (óbvio: o que já foi pago não é mais devido). Se as partes desistirem da dívida, basta pagar o seu saldo, atualizado até a data do pagamento. O saldo da dívida não inclui os juros que, pelo fato de o tempo não ter passado completamente, ainda não são devidos.
- Os juros são despesa e a amortização do principal, não. Os juros pagos (ou devidos e incorporados ao saldo da dívida) reduzem o lucro e, se a empresa for tributada com base no lucro real, reduzem o imposto de renda e a CSLL devidos. A devolução do principal não é despesa, até porque o dinheiro recebido no empréstimo não foi receita.

#### O Caso mais Simples: Bullet

O fluxo de caixa do **Objeto 59** traz um empréstimo simples, em que os juros são pagos mensalmente e o principal ao final. Essa é uma dívida do tipo *bullet* (ou sistema americano, ou amortização ao final), em que o principal é amortizado de uma vez, ao final do prazo.

**Objeto 59. Juros e amortização em um empréstimo simples.** Empréstimo de \$ 10 mil, à taxa de 2% a.m., por quatro meses, com amortizado ao final da operação.



Neste caso, basta calcular os juros com base no saldo do empréstimo, como feito no **Objeto 60**.

**Objeto 60. Amortização e juros em uma dívida bullet.** Principal de \$ 10.000, taxa de 2% a.m., 4 meses, juros pagos mensalmente, amortização ao final.

mês	saldo da dívida	pagamento (recebimento) de principal	juros	pagamento (recebimento) total
0	10.000	-10.000		-10.000
1	10.000	0	200	200
2	10.000	0	200	200
3	10.000	0	200	200
4	0	10.000	200	10.200
total (simples soma)		0	800	800
taxa de juros (contratada)			2,00% a.m.	

Um caso limite é o das dívidas perpétuas (ou annuities), em que o principal nunca chega a ser pago, pois o número de prestações é infinito. Enquanto a eternidade não chega, continuam-se pagando apenas os juros sobre o principal, que não se altera.

O exemplo da amortização bullet é provavelmente o mais simples de todos: a amortização é conhecida e ocorre de uma vez; o cálculo dos juros é óbvio. Assim, fica fácil separar ambos pagamentos. Já em fluxos de caixa mais complexos, a separação entre amortização e juros é mais trabalhosa.

## AMORTIZAÇÃO CONHECIDA

Um dos dois tipos genéricos de fluxo de caixa de dívida é quando a amortização é conhecida. O contrato define o plano de amortização e a taxa de juros, sendo o montante dos juros calculado sobre o saldo devedor. Como ao saldo da dívida cai com o tempo (porque parte dela vai sendo amortizada), o montante de juros também cai.

## Amortização Irregular

O caso geral é um em que a amortização é conhecida e irregular (amortizações customizadas), como as do **Objeto 61**.

**Objeto 61. Amortização e juros com amortização irregular.** Dívida de \$ 10.000 a 14,5% a.a., com amortização irregular especificada no contrato. O saldo da dívida é reduzido conforme ela vai sendo amortizada. Os juros são pagos sobre o saldo da dívida no início do ano (que é o mesmo do final do ano anterior).

ano	saldo da dívida	pagamento (recebimento) de principal	juros	pagamento (recebimento) total
0	10.000	-10.000		-10.000
1	7.000	3.000	1.450	4.450
2	5.000	2.000	1.015	3.015
3	5.000	0	725	725
4	0	5.000	725	5.725
total (simples soma)		0	3.915	3.915
taxa de juros (contratada)		14,50% a.a.		

Há alguns casos notáveis de amortização conhecida: quando a amortização é ao final (já apresentado) e quando ela ocorre em parcelas iguais (SAC, sem ou com carência).

## SAC

Um caso particular, conhecido como SAC (sistema de amortizações constantes), é quando todas as amortizações são iguais entre si. Neste caso, elas são obtidas pela divisão do principal pelo número de parcelas. Um exemplo de SAC, é apresentado no **Objeto 62**.

**Objeto 62. Amortização e juros no SAC.** Valor da dívida e demais condições especificadas na tabela. A amortização é especificada no contrato. O saldo da dívida é reduzido conforme ela vai sendo amortizada. Os juros são pagos sobre o saldo da dívida no início do ano (que é o mesmo do final do ano anterior).

ano	saldo da dívida	pagamento (recebimento) de principal	juros	pagamento (recebimento) total
0	80.000	-80.000		-80.000
1	70.000	10.000	3.000	13.000
2	60.000	10.000	2.625	12.625
3	50.000	10.000	2.250	12.250
4	40.000	10.000	1.875	11.875
5	30.000	10.000	1.500	11.500
6	20.000	10.000	1.125	11.125
7	10.000	10.000	750	10.750
8	0	10.000	375	10.375
total (simples soma)		0	13.500	13.500
taxa de juros (contratada)		3,75% a.a.		

Deve ser notado que, como o valor da dívida se reduz com o tempo, os juros também são decrescentes. Como as amortizações são constantes, os pagamentos totais também se reduzem

com o tempo. Essa característica tem a vantagem de acomodar, embora imprecisamente, alguma redução na capacidade de pagamento do devedor. Mesmo que ele tenha a sua renda reduzida com o passar do tempo, talvez ainda consiga fazer pagamentos cada vez menores.

### SAC com Carência de Principal

No financiamento de bens de capital, é comum se incluir uma carência de principal, ou seja, um período inicial em que o principal não precisa ser pago. O **Objeto 63** apresenta esse caso.

**Objeto 63. Amortização e juros no SAC com carência.** Valore da dívida e demais condições especificadas na tabela. A amortização é especificada no contrato. O saldo da dívida é reduzido conforme ela vai sendo amortizada. Os juros são pagos sobre o saldo da dívida no início do ano (que é o mesmo do final do ano anterior).

ano	saldo da dívida	pagamento (recebimento) de principal	juros	pagamento (recebimento) total
0	80.000	-80.000		-80.000
1	80.000	0	3.000	3.000
2	80.000	0	3.000	3.000
3	66.667	13.333	3.000	16.333
4	53.333	13.333	2.500	15.833
5	40.000	13.333	2.000	15.333
6	26.667	13.333	1.500	14.833
7	13.333	13.333	1.000	14.333
8	0	13.333	500	13.833
total (simples soma)		0	16.500	16.500
taxa de juros (contratada)			3,75% a.a.	

Note-se que, em comparação com o fluxo do **Objeto 62**, há uma redução nos pagamentos iniciais, compensada pelo aumento após o prazo de carência. Isso é feito para dar um fôlego financeiro à empresa na fase em que o projeto de investimento ainda não é capaz de gerar caixa, que geralmente é o período de obras e aquisição dos novos equipamentos.

### SAC com Carência de Principal e Juros

Pode acontecer, embora não seja comum, de a carência ser de principal e juros, gerando pagamentos nulos nos primeiros anos, como mostrado no

**Objeto 64. Amortização e juros no SAC com carência de principal e juros.** Valor da dívida e demais condições especificadas na tabela. A amortização é especificada no contrato. O saldo da dívida é reduzido conforme ela vai sendo amortizada. Os juros são devidos sobre o saldo da dívida no início do ano (que é o mesmo do final do ano anterior) e pagos a partir da carência. Os juros não pagos são incorporados ao principal.

ano	saldo da dívida	pagamento (recebimento) de principal	juros devidos	juros capitalizados	juros pagos	pagamento (recebimento) total
0	80.000	-80.000				-80.000
1	83.000	0	3.000	3.000	0	0
2	86.113	0	3.113	3.113	0	0
3	71.760	14.352	3.229	0	3.229	17.581
4	57.408	14.352	2.691	0	2.691	17.043
5	43.056	14.352	2.153	0	2.153	16.505
6	28.704	14.352	1.615	0	1.615	15.967
7	14.352	14.352	1.076	0	1.076	15.428
8	-0	14.352	538	0	538	14.890
total (simples soma)		6.113	17.415	6.113	11.302	17.415
taxa de juros (contratada)			3,75% a.a.			

Apesar de gerar um alívio maior no período de carência, essa modalidade é pouco utilizada. O credor se sente mais confortável quando o devedor deve fazer algum pagamento no período de carência, pois, com isso, dá sinais de que está financeiramente saudável. Se houver algum sinal de problemas, o credor pode se antecipar na busca de soluções, enquanto ainda há tempo.

## PAGAMENTOS CONHECIDOS

O outro tipo genérico de fluxo de caixa de dívida é o dos pagamentos conhecidos, pois definidos em contrato.

### Pagamentos Irregulares

O caso geral é um em que os pagamentos são conhecidos e irregulares, como no **Objeto 65**. Como os pagamentos são conhecidos, a taxa de juros deve ser calculada como uma TIR. No caso geral, a taxa de juros é fornecida, redundantemente, no contrato (mas não custa conferir). Desta vez, a amortização é a diferença entre o pagamento e os juros.

**Objeto 65. Amortização e juros com pagamentos irregulares.** Valor da dívida e demais condições especificadas na tabela, com pagamentos irregulares especificados no contrato. Os juros são pagos sobre o saldo da dívida no início do ano (que é o mesmo do final do ano anterior). A amortização é a diferença entre o pagamento e os juros. O saldo da dívida é reduzido conforme ela vai sendo amortizada.

ano	saldo da dívida	pagamento (recebimento) de principal	juros	pagamento (recebimento) total
0	10.000	-10.000		-10.000
1	8.197	1.803	1.197	3.000
2	4.179	4.018	982	5.000
3	2.679	1.500	500	2.000
4	-0	2.679	321	3.000
total (simples soma)		0	3.000	3.000
taxa de juros (calculada pela TIR)			11,97% a.a.	

O caso notável mais conhecido é o dos pagamentos constantes.

### Pagamentos Constantes

Um caso particular é quando todos os pagamentos são iguais entre si, conhecido como SPC (sistema de pagamentos constantes ou sistema francês). Neste caso, a taxa pode ser calculada com a função PGTO (ou PMT) das calculadoras e planilhas. Um exemplo de SPC é apresentado no **Objeto 66**.

**Objeto 66. Amortização e juros com pagamentos constantes.** Valor da dívida e demais condições especificadas na tabela, com pagamentos irregulares especificados no contrato. Os juros são pagos sobre o saldo da dívida no início do ano (que é o mesmo do final do ano anterior). A amortização é a diferença entre o pagamento e os juros. O saldo da dívida é reduzido conforme ela vai sendo amortizada.

ano	saldo da dívida	pagamento (recebimento) de principal	juros	pagamento (recebimento) total
0	80.000	-80.000		-80.000
1	71.234	8.766	2.984	11.750
2	62.141	9.093	2.657	11.750
3	52.708	9.432	2.318	11.750
4	42.924	9.784	1.966	11.750
5	32.775	10.149	1.601	11.750
6	22.248	10.528	1.222	11.750
7	11.328	10.920	830	11.750
8	0	11.328	422	11.750
total (simples soma)		0	14.000	14.000
taxa de juros (calculada pela TIR)			3,73% a.a.	

O SPC tem um variante notável, a chamada tabela Price, em homenagem ao seu criador (wiki/Richard\_Price, 2014?). Neste caso, a taxa de juros segue um padrão simples de 12 meses. Para fazer os cálculos, basta dividir a taxa anual por doze e obter a taxa mensal. O restante é como em qualquer SPC. É comum se chamar qualquer SPC de Price.



## Pagamentos Conhecidos com Juros Capitalizados

Uma situação de especial interesse é quando um pagamento, combinado no contrato, ser menor que os juros devidos no período. Neste caso, além de não poder haver amortização, a parcela dos juros que não pode ser paga é capitalizada, ou seja adicionada ao principal da dívida. Os próximos juros serão calculados com base no saldo assim aumentado. Esse caso é exemplificado no **Objeto 67**.

**Objeto 67. Amortização e juros em um fluxo irregular com capitalização de juros.** Valor da dívida e demais condições especificadas na tabela, com pagamentos irregulares especificados no contrato. O saldo da dívida é reduzido conforme ela vai sendo amortizada. Os juros são devidos sobre o saldo da dívida no início do ano (que é o mesmo do final do ano anterior) e pagos a partir da carência. Os juros não pagos são incorporados ao principal.

ano	saldo da dívida	pagamento (recebimento) de principal	juros devidos	juros capitalizados	juros pagos	pagamento (recebimento) total
0	80.000	-80.000				-80.000
1	82.981	0	2.981	2.981	0	0
2	74.074	8.908	3.092	0	3.092	12.000
3	75.834	0	2.760	1.760	1.000	1.000
4	77.660	0	2.826	1.826	1.000	1.000
5	65.554	12.106	2.894	0	2.894	15.000
6	44.497	21.057	2.443	0	2.443	23.500
7	22.656	21.842	1.658	0	1.658	23.500
8	-0	22.656	844	0	844	23.500
total (simples soma)		6.568	19.500	6.568	12.932	19.500
taxa de juros (calculada pela TIR)			3,73% a.a.			

## SISTEMAS MISTOS

### Amortização Mista

Outro caso particular é o SAM (sistema de amortização mista), que foi utilizado em operações de financiamento de imóveis no Brasil. Este sistema nada mais é que nada mais é que uma operação em que cada pagamento é a média aritmética entre o calculado com uso do SPC e o calculado com o SAC. O tratamento subsequente é o de um fluxo irregular com pagamentos conhecidos, como no **Objeto 68**.

**Objeto 68. Amortização e juros com SAM.** Valor da dívida e demais condições especificadas na tabela, com pagamentos irregulares especificados no contrato. Os juros são pagos sobre o saldo da dívida no início do ano (que é o mesmo do final do ano anterior). A amortização é a diferença entre o pagamento e os juros. O saldo da dívida é reduzido conforme ela vai sendo amortizada.

ano	½ dívida no SAC	½ dívida no SPC	saldo da dívida	pagamento (recebimento) de principal	juros	pagamento (recebimento) total
0	-40.000	-40.000	80.000	-80.000		-80.000
1	6.492	5.875	70.617	9.383	2.984	12.367
2	6.306	5.875	61.070	9.547	2.634	12.181
3	6.119	5.875	51.354	9.716	2.278	11.994
4	5.933	5.875	41.462	9.892	1.916	11.808
5	5.746	5.875	31.388	10.075	1.547	11.621
6	5.560	5.875	21.124	10.264	1.171	11.435
7	5.373	5.875	10.664	10.460	788	11.248
8	5.187	5.875	0	10.664	398	11.062
total	6.714	7.000		0	13.714	13.714
taxa de juros (contratada)					3,73% a.a.	

### Pagamentos Constantes com Carência

Pode haver um período de carência de amortização (ou até de amortização e juros), seguido de um período de pagamentos conhecidos (geralmente constantes). A carência seguida de pagamentos constantes não é usual, porque o SPC é principalmente utilizado em empréstimo e financiamento a pessoas físicas, em que uma carência é muito menos importante (e recomendada) do que no financiamento de bens de capital.



O **Objeto 69** traz um exemplo. Note-se que, na carência, as amortizações são conhecidas (são zero) e os pagamentos são calculados (são apenas os juros). Já após a carência, os pagamentos são conhecidos (são constantes e calculados a partir do saldo da dívida) e a amortização é calculada pela diferença entre os pagamentos e os juros.

**Objeto 69. Amortização e juros em um fluxo constante com carência de principal.** Valor da dívida e demais condições especificadas na tabela, com pagamentos irregulares especificados no contrato. O saldo da dívida é reduzido conforme ela vai sendo amortizada. Os juros são devidos sobre o saldo da dívida no início do ano (que é o mesmo do final do ano anterior) e pagos a partir da carência. Os juros não pagos são incorporados ao principal.

ano	saldo da dívida	pagamento (recebime nto) de principal	juros	pagamento (recebime nto) total
0	80.000	-80.000		-80.000
1	80.000	0	3.200	3.200
2	80.000	0	3.200	3.200
3	67.939	12.061	3.200	15.261
4	55.396	12.543	2.718	15.261
5	42.351	13.045	2.216	15.261
6	28.784	13.567	1.694	15.261
7	14.674	14.110	1.151	15.261
8	-0	14.674	587	15.261

## ATIVIDADES

Os exercícios são aplicações diretas (mais matemática simples do que finanças) das técnicas apresentadas no capítulo (podem ser usados conceitos de capítulos anteriores). Os problemas já têm enunciados com algum contexto e, em algumas situações, um pouco de dificuldade. Os casos reais trazem situações de aplicação colhidos (e simplificadas) da realidade e são escritos de modo a trazer uma forte impressão do contexto em que ocorreram e permitir fazer os cálculos necessários. Alguns casos podem ser difíceis.

Os exercícios, problemas e casos resolvidos (em planilha) estão assinalados com . Nem sempre os exercícios, problemas e casos exigem cálculos, podendo se resumir a aplicações dos conceitos desenvolvidos no capítulo. Em todas as atividades utilize juros compostos, exceto se houver informação em contrário. Algumas atividades podem ser longas (por envolverem muitos períodos), mas são repetitivas (as equações em cada período são as mesmas). Alguns exercícios e problema são continuação de anteriores, caso em que são assinalados com . Os exercícios, problemas e casos podem trazer (e frequentemente trazem) elementos de capítulos anteriores, que são considerados conhecidos.

### Exercícios

Nos seguintes exercícios, é fornecido o fluxo de amortizações e a taxa de juros do empréstimo. Calcule a tabela de amortização e juros, separando, em colunas distintas, o saldo devedor, os juros devidos, a amortização, os juros capitalizados e o pagamento total.

	454.	455.	456.
ano 0	-14.800	-100.000	-100.000
ano 1	2.300	0	23.100
ano 2	1.000	0	18.800
ano 3	1.200	0	16.900
ano 4	2.100	25.000	15.200
ano 5	500	25.000	13.700
ano 6	1.400	25.000	12.300
ano 7	2.200	25.000	0
ano 8	1.400	0	0
ano 9	1.700	0	0
ano 10	1.000	0	0
taxa de juros	12,0%	3,5%	7,0%

Nos seguintes exercícios, é fornecido o fluxo de pagamentos do empréstimo. Calcule a tabela de amortização e juros, separando, em colunas distintas, o saldo devedor, os juros devidos, a amortização, os juros capitalizados e o pagamento total.

	457.	458.	459.
ano 0	-150.000	-40.000	-35.000
ano 1	20.000	5.985	0
ano 2	30.000	5.985	0
ano 3	40.000	5.985	10.000
ano 4	20.000	14.000	10.000
ano 5	30.000	14.000	10.000
ano 6	20.000	14.000	10.000
ano 7	30.000	14.000	10.000
ano 8	20.000	0	0

	457.	458.	459.
ano 9	30.000	0	0
ano 10	20.000	0	0

São dados os fluxos de pagamentos correspondentes a três empréstimos de \$ 10.000. Pede-se o valor, ano a ano, das amortizações, dos juros, do saldo devedor e dos pagamentos dos empréstimos.

	460.	461.	462.
ano 0	(10.000)	(10.000)	(10.000)
ano 1	3.000	3.000	3.000
ano 2	3.000	0	2.000
ano 3	3.000	4.000	0
ano 4	3.000	5.000	8.000

## Problemas

463. Calcule a tabela de amortização e juros de um empréstimo de \$100.000, amortizado em 5 parcelas anuais iguais (SAC) e pagando uma taxa de 12,5% a.a.

464. ① Calcule a tabela de amortização e juros de um empréstimo de \$100.000, pago em 5 prestações anuais iguais (SPC) e pagando uma taxa de 12,5% a.a.

465. ① Compare as tabelas dos dois problemas anteriores. Quais as vantagens de cada uma?

466. Calcule a tabela de amortização e juros de um empréstimo de \$1.200.000, com 2 anos de carência de principal, seguidos de amortização em 4 parcelas anuais iguais (SAC com carência) e pagando uma taxa de 7,9% a.a.

467. ① Calcule a tabela de amortização e juros de um empréstimo de \$1.200.000, com 2 anos de carência de principal e juros (capitalizados), seguidos de pagamento em 4 parcelas anuais iguais (SPC com carência de principal e juros) e pagando uma taxa de 7,9% a.a.

468. ① Compare as tabelas dos dois problemas anteriores. Quais as vantagens de cada uma?

469. Calcule a tabela de amortização e juros de um empréstimo de \$250.000, com 2 anos de carência de principal e juros, seguidos de amortização em 6 parcelas anuais iguais (SAC com carência de principal e juros) e pagando uma taxa de 16,4% a.a.

470. ① Calcule a tabela de amortização e juros de um empréstimo de \$250.000, com 2 anos de carência de principal, seguidos de pagamento em 6 parcelas anuais iguais (SPC com carência de principal) e pagando uma taxa de 16,4% a.a.

471. ① Compare as tabelas dos dois problemas anteriores. Quais as vantagens de cada uma?

472. Calcule a tabela de amortização e juros de um empréstimo de \$600.000, SAC mensal de 60 meses, com taxa de 13,7% a.a.

473. ① Calcule a tabela de amortização e juros de um empréstimo de \$600.000, Price mensal de 60 meses, com taxa de 13,7% a.a.

474. ① Calcule a tabela de amortização e juros de um empréstimo de \$600.000, cujos pagamentos são a média (some e divide por dois) dos pagamentos dos dois problemas anteriores (SAM).

475. ① Compare as tabelas dos três problemas anteriores. Quais as vantagens de cada uma?

476. Do ponto de vista do devedor, quais as vantagens comparativas do SAC e do SPC?

477. ① Do ponto de vista do credor, quais as vantagens comparativas do SAC e do SPC?

Em todos os problemas seguintes, calcule a tabela de amortização e juros, separando, em colunas distintas o saldo devedor, os juros devidos, a amortização, os juros capitalizados e o pagamento total.

478. Principal = 1.200; taxa = 13,2%; tabela de amortizações:

<u>n</u>	<u>amortização</u>
0	
1	600
2	200
3	100
4	100
5	100
6	100

479. SAC (Sistema de amortizações constantes). Principal = 300.000; taxa = 12,0%; amortização em 8 parcelas anuais iguais.

480. Principal = 1.000.000; taxa = 12,0%; amortização integral ao final do 5º ano.

481. Principal = 4.000.000; taxa = 13,8%; carência de um ano; tabela de amortizações:

<u>n</u>	<u>amortização</u>
2	1.000.000
3	1.500.000
4	1.000.000
5	500.000

482. Principal = 400.000; taxa = 18,4%; 4 anos de carência; amortização em mais 3 parcelas anuais iguais (prazo total de 7 anos).

483. Pagamentos conhecidos. Principal = 1.000.000; tabela de pagamentos:

<u>n</u>	<u>pagamento</u>
0	(1.000.000)
1	200.000
2	250.000
3	300.000
4	300.000
5	300.000

484. Principal = 300.000; taxa = 12,0%; 8 pagamentos anuais iguais.

485. Principal = 80.000; tabela de pagamentos:

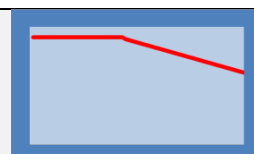
<u>n</u>	<u>pagamento</u>
0	(80.000)
1	0
2	500
3	10.000
4	30.000
5	30.000
6	40.000

486. Misto. Principal = 3.400.000; taxa = 16,8%; carência de principal e juros no primeiro ano; carência apenas de principal no segundo e no terceiro; pagamentos constantes em quatro anos, do quarto ao sétimo.

### Caso: inadimplência bancária

SPC. SAC. Sistema híbrido. Decisão de financiamento no varejo.

Um banco estava tendo elevadas taxas de inadimplência (atraso de pagamento) nas suas operações de financiamento de longo prazo a pessoas físicas. A inadimplência (enquanto ficar só nisso) é lucrativa, porque os clientes pagam belas taxas de mora e tarifas de renegociação, mas pode se converter (e frequentemente se converte) em insolvência (incapacidade ou negativa de pagamento), com perda de



principal para o banco. Algumas sessões de grupo focal com inadimplentes e insolventes mostraram as causas, dentre as quais o excesso de otimismo de clientes em relação à própria renda. Esses financiamentos são tradicionalmente feitos com prestações iguais e a pessoa acha (honestamente mas equivocadamente) que aguenta pagar a mesma mensalidade por todo o período do financiamento. As coisas mudam: a renda cai (troca de emprego, redução de parte da renda variável) ou as despesas aumentam (questões de saúde, necessidade de ajudar algum familiar, os filhos entram na adolescência). A prestação que era apertada torna-se inviável e parte das pessoas torna-se inadimplente (e depois insolvente). O problema é agravado em períodos de situação econômica ruim (em que outras linhas de crédito do banco também dão problema). Uma solução é mudar o sistema de amortização de pagamentos constantes para amortizações constantes. Nos cálculos, considere um financiamento de \$40.000 por 60 meses à taxa de 1,8% a.m. (primeiro pagamento no mês 1).

487. Calcule os 60 pagamentos para o caso em que as prestações são iguais.

488. Construa o gráfico correspondente das prestações em função do tempo (uma horizontal sem graça).

489. Calcule os 60 pagamentos para o caso em que as amortizações são iguais.

490. Inclua essa série de dados no mesmo gráfico anterior.

491. Compare as curvas e explique como a troca do SPC pelo SAC mitiga o problema da insolvência.

492. Qual o efeito (esperado) das prestações iniciais mais altas do SAC sobre as vendas do financiamento?

493. O departamento de desenvolvimento de produtos do banco imaginou uma solução criativa: usar pagamentos constantes nas primeiras 12 prestações (em que esse tipo de inadimplência pouco se manifesta) iguais às que haveria no SPC e amortizações constantes (SAC) depois. Calcule os 60 pagamentos dessa solução híbrida.

494. Inclua a curva da solução híbrida no gráfico.

495. O que ocorre no mês 13?

496. Como fica o gráfico se os pagamentos forem constantes por 30 meses?

497. Por quantos meses as prestações devem ser constantes para que a primeira parcela da fase em SAC não seja maior que a do SPC?

498. Como muda a resposta à questão anterior se a taxa de juros for de 1,5% a.m.?

499. E se for de 2,2% a.m.?

500. Como muda a resposta (mantida a taxa original) se o prazo da operação for de 24 meses?

501. E se for de 36 meses?

502. Redija o texto que (ao mesmo tempo) explique (informação, para que não fique dúvida de como funciona) e venda (o cliente goste da solução e entenda que é o que ele precisa) esse sistema híbrido de amortização. O público é simples (educação formal até a 9ª série e de baixa qualidade). Faça o texto com, no máximo, 300 caracteres (mais que isso o cliente não lê de primeira, esta é uma peça promocional).

### **Caso: renegociação de dívida na confecção**

*SPC (Price). Cadeia de fornecimento. Decisão de investimento. Decisão de financiamento.*

Uma média empresa, do ramo de confecção de roupas, recebeu uma proposta irrecusável de uma grande rede varejista especializada em vestuário: tornar-se um dos 4 fabricantes de uma das marcas próprias da rede. Para tal, tinha que investir \$3 milhões (entre imobilizado e capital de giro) e comprometer-se com um rígido padrão de qualidade e de prazos de entrega. Em troca, recebeu o design das peças,

descontos em fornecedores de tecido (negociado pela rede) e um fluxo de receita (relativamente) garantido. É a megasena, tão bom como tocar o céu com a mão. Para poder fazer frente ao investimento, a confecção contraiu um empréstimo de \$3.000.000, à taxa de 24% a.a., a pagar em 48 parcelas mensais iguais.

503. Calcule o valor das prestações.

504. Qual é o valor da dívida após 10 parcelas?

505. Ao final de um ano, a rede varejista explicou que (por pressão dos concorrentes ou outra desculpa) os preços que pagava deveriam ser reequilibrados para baixo (é isso ou perder as vendas para as outras 3 confecções). A empresa concordou (por falta de escolha) e entrou em dificuldades financeiras. Após 15 meses (e 15 parcelas pagas), decidiu refinanciar o saldo devedor em 42 pagamentos iguais à taxa de 28% a.a.. Qual é o valor do saldo devedor refinanciado?

506. Qual a nova prestação?

507. Após 24 meses do contrato original (e 9 do refinanciamento), a rede varejista exigiu (e obteve) nova redução de preços. A dívida foi refinanciada em mais 60 mensais iguais, desta vez à taxa de 42% a.a. (o banco já estava sentindo que a confecção ia mal e dificultou e encareceu a renegociação).

508. No terceiro ano (36 meses do contrato original e 12 do segundo refinanciamento), a rede varejista deu um novo bote. Desta vez, a confecção estava preparada e se negou a continuar o fornecimento (a não ser que o varejista concordasse com um aumento substancial de preços, o que não ocorreu). O empresário vendeu uma parte da confecção a um investidor, que colocou suficiente dinheiro para saldar a dívida e investir em lojas próprias. A rede varejista ganhou um concorrente agressivo, que lhe tomou parte dos seus melhores mercados. A confecção resolveu quitar (pagar toda) a dívida. Quanto pagou nesta data?

---

### **Caso: porto.**

*SAC com carência. Decisão de financiamento.*

Um grupo econômico estava desenvolvendo o projeto financeiro de um novo porto privado no sul do Brasil. O investimento em EPC (engineering, procurement & construction: projeto e gerenciamento da obra, aquisição de equipamentos e outros materiais, execução da obra) e nos equipamentos de movimentação de carga consumiria \$400 milhões e 2,5 anos. Os acionistas entraram com o terreno (que já haviam comprado) mais o capital de giro. O financiamento do EPC veio de duas fontes de terceiros: o IFC (International Finance Corporation, braço de financiamento ao setor privado do Banco Mundial) e um banco privado (a aprovação do financiamento pela equipe técnica de mais um banco traz segurança ao emprestador), cada um com 50% do principal (de \$400 milhões). O IFC ofereceu uma carência de principal (mas não de juros) de 3 anos mais 20 anos de amortização (SAC), com uma taxa de juros de 1,2% ao trimestre. O banco privado deu 2,5 anos de carência de principal mais 17,5 anos de amortizações (SAC), com juros de 1,5% a.trim.. Ambos trabalham com amortizações e juros trimestrais.

509. Monte as tabelas de amortização e juros de ambos os financiamentos.

510. Remonte as tabelas de amortização sem as carências.

511. A empresa pode aplicar seu dinheiro (em renda fixa) 0,8% a.trim.. Quanto capital próprio os acionistas deveriam investir a mais se os empréstimos não tivessem carência?

512. Por que a carência no financiamento de investimentos é tão importante?

## 12

# OPERAÇÕES PRÉ-FIXADAS

## INTRODUÇÃO

### Conceito e Utilização de Taxa Prefixada

A taxa é prefixada quando seu valor é conhecido antecipadamente. Distingue-se do caso mais complicado da taxa pós-fixada, que é composta de um indexador (IPCA, CDI, TJLP, dólar, TR, etc.) mais uma taxa de juros.

Desambiguação. A expressão renda fixa se refere tanto a operações com taxas pré e pós-fixadas. Ela é usada em contraposição à renda variável (ações, opções de ações), que tem risco (e, espera-se, retorno) muito maior.

As taxas prefixadas são (normalmente) preferidas quando:

- A inflação é previsível. Se a inflação pode ser prevista com razoável segurança pelo período da operação, então não há grande risco em usar uma taxa prefixada.
- A inflação é baixa. Se o componente inflacionário da taxa nominal é baixo, a sua oscilação é pouco relevante. Além do que, inflações baixas costumam ser mais previsíveis.
- O prazo é curto. Dificilmente a inflação terá um grande salto (para cima ou para baixo) rapidamente.
- Há necessidade de fazer hedge. Um empréstimo prefixado pode anular o risco de um investimento prefixado anterior. Alternativamente, um investimento prefixado pode anular o risco de um empréstimo prefixado anterior. Se a inflação subir ou cair, a perda de um é compensada pelo ganho no outro.
- A taxa é muito atraente. O risco da prefixação da taxa é grande, mas a taxa de juros é tão boa que a operação é feita mesmo assim.
- Há expectativa de alta ou baixa de inflação. Nesse caso, é vantagem, respectivamente, tomar dívida ou investir em uma taxa prefixada.
- O contraparte é incauto. Por algum dos motivos acima, o uso de uma taxa prefixada é evidentemente desvantajoso para uma das partes. Entretanto, por não entender do assunto, ele assina o contrato (não faça isso, seja bonzinho(a) e prefira ir para o céu).



## Operações Típicas com Taxa Prefixada

Até este ponto no livro, todas (quase todas) as operações apresentadas utilizaram taxas prefixadas. Em particular, toda a discussão de sistemas de amortização do capítulo 11 foi baseada em dívidas em que a taxa de juros é prefixada.

Muitas operações típicas do mercado utilizam ou podem usar taxas pre ou pós-fixadas, a critério das partes. Dentre elas, estão:

- Títulos públicos, como a LTN (Letra do Tesouro Nacional) e a NTN-F (Nota do Tesouro Nacional, série F). Esses títulos tomam o dinheiro da população, com a finalidade de financiar os gastos do governo federal. A taxa é a do over, de 252 dias úteis.
- Títulos emitidos por instituições financeiras, como o CDB (Certificado de Depósito Bancário), usados para captar o dinheiro dos clientes. A taxa é a do over, de 252 dias úteis.
- Empréstimos de instituições financeiras a grandes empresas e debêntures (emitidas apenas por sociedades anônimas, exceto bancos). A taxa é (geralmente) a do over, de 252 dias úteis.
- Empréstimos (a instituição financeira entrega o dinheiro ao cliente, que o gasta como quiser) e financiamentos (a loja vende um bem ou serviço a prazo; a instituição financeira repassa o dinheiro à vista à loja e cobra o cliente a prazo) dados por instituições financeiras a pessoas físicas e pequenas empresas. Em geral (e para manter a simplicidade da operação), são prefixados e usam taxa mensal.
- Desconto de recebíveis (duplicatas, cartões, cheques predatados, notas promissórias, etc). É uma forma de antecipar o recebimento devido pelos clientes, geralmente usado por pequenas e médias empresas. Os juros são simples, em dias corridos, descontados do principal que o cliente recebe.
- Empréstimos e financiamentos com taxa anual nominal, efetivamente capitalizada em períodos menores que um ano (180 dias corridos, 90 dias corridos, 30 dias corridos, etc.). Esta forma de cálculo é usada predominantemente no exterior e com empréstimos e financiamentos em moeda estrangeira. Usa-se um misto entre juros compostos e simples.

Pela relevância e pela complexidade, a taxa over, os descontos e a taxa anual capitalizada em períodos menores que um ano são tratadas em sessões específicas.

## TAXA DO OVER

### Taxa do Over de 252 dias

A taxa over baseada em um ano de 252 dias úteis é calculada segundo a seguinte expressão:

$$i_{over} = (1 + i_{ao \text{ dia útil}})^{252} - 1$$

Esta taxa é de amplo uso no Brasil, sendo a taxa de referência para operações de renda fixa, tanto pré como pós-fixadas. É a taxa dos títulos públicos federais (com algumas exceções), de remuneração dos depósitos compulsórios dos bancos (os que são remunerados), do DI e da Selic. Como essas são as taxas relevantes no sistema financeiro, esta forma de cálculo é a referência do mercado.

A taxa over baseada em um ano de 252 dias úteis foi criada em **ZXZXZX** para substituir a (fortemente incorreta) taxa over baseada em um mês de 30 dias.

### A Obsoleta Taxa Over de 30 dias

Um pouco de história antiga. Em algum lugar no passado, havia uma taxa (taxa over, ou taxa do overnight, ou taxa over mensal) que era calculada pela seguinte expressão:

$$i_{over} = 30 \cdot i_{ao\ dia\ útil}$$

Deve ser notado que essa é uma taxa nominal (não uma taxa efetiva) que dá um número bem superior ao efetivo. A seguir é apresentada a sucessão de eventos em torno dessa taxa:

- O Banco Central e o Tesouro Nacional remuneram os depósitos compulsórios (os bancos são obrigados a depositar no Banco Central parte dos depósitos de seus clientes) e os títulos públicos apenas nos dias úteis. O dinheiro ‘dorme’ no final do dia e ‘amanhece’ já acrescido dos juros (esse é o motivo pelo qual operações de 1 dia útil são chamadas de overnight).
- Os clientes do banco compravam títulos públicos (e às vezes privados) por um dia, com o compromisso de o banco recomprar o título no dia seguinte (operação compromissada), por um preço um pouco superior (os juros).
- O problema é que os clientes (em sua maioria) não eram (e muitos ainda não são) versados em matemática financeira. Eles estavam acostumados com taxas mensais. Além disso, uma taxa ao dia útil é um número muito pequeno, com muitas casas decimais (algo como 0,0487% a.d.u.), o que é pouco prático no varejo.
- A solução inventada foi multiplicar essa taxa por 30 e dizer que essa era uma taxa mensal. Com isso, o cliente incauto imaginava receber uma taxa alta, quando efetivamente recebia bem menos do que pensava.
- De resto, era explicar aos clientes que, como sábados, domingos e feriados não são dias úteis, não haveria remuneração.
- Alguns clientes não se conformavam com a explicação. Em resposta, o discurso foi modificado para afirmar que, como a sexta feira é um dia meio parado no mercado financeiro, os juros da sexta, do sábado e do domingo seriam  $\frac{1}{3}$  dos juros dos demais dias úteis.

Felizmente, essa bizarrice não perambula mais dentre nós.

## DESCONTOS

### Utilização e Cálculo de Descontos

Às vezes a taxa de juros é paga no ato em que o dinheiro é liberado ao tomador do empréstimo. Nesses casos, diz-se que os juros são antecipados e que a operação é de desconto ou de juros antecipados (quando os juros são pagos ao final, diz-se que eles são postecipados).

Ocorre com frequência de um comerciante vender a prazo (com cheque pré-datado, cartão de crédito, duplicata, nota promissória, vale refeição, vale supermercado, ...), mas precisar do dinheiro agora. Uma forma prática e de baixo risco para o banco é ele ‘trocar’ este recebível por um pouco menos de dinheiro vivo. O comerciante entrega seu recebível (valor futuro) em troca de um valor descontado hoje (valor presente).

Como os clientes desta operação não raro são simples e pouco afeitos a fazer cálculos com juros compostos, convencionou-se que a taxa do desconto comercial seja (normalmente) simples e o prazo, dado em dias corridos. Como a operação é lastrada em títulos definidos, o prazo do empréstimo é o destes títulos.

Um comerciante que deseje antecipar um título de certo valor nominal receberá agora o valor nominal do título, menos um desconto calculado como se segue

$$\text{desconto} = \text{valor nominal da operação} \times \text{taxa de desconto} \times \text{prazo dos títulos descontados}$$

Costumeiramente, o prazo é dado em dias corridos e a taxa, em meses. Para manter a coerência das unidades, é necessário converter os dias em meses ou a taxa (geralmente apresentada em % a.m.) em diária. Para isto, basta incluir um multiplicador de 1/30 na equação acima.

### Desconto Comercial e Racional

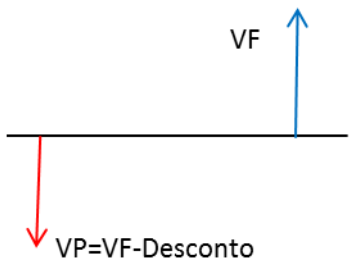
Praticamente todas as operações de desconto do mercado financeiro utilizam o desconto comercial (ou bancário, ou simples comercial). O valor do desconto é calculado com dias corridos e juros simples, e é cobrado antecipadamente (descontado do valor liberado pelo banco, daí o nome da operação). Essa forma de cálculo tem dois motivos:

- Os juros simples são mais fáceis de calcular que os compostos, portanto as contas do banco são mais fáceis de conferir. Os dias corridos são mais fáceis de contar que os úteis (não há necessidade de calendários especiais que mostrem os dias úteis). Ambos os fatores são importantes em pequenas empresas, cujos gestores financeiros (muitas vezes o próprio dono) apresentam (tipicamente) dificuldades cognitivas.
- Utilizando essa forma de cálculo, a instituição financeira pode apresentar uma taxa mais baixa que é efetivamente praticada, o que ajuda a vender o crédito. A obrigatoriedade de apresentação da CET (custo efetivo total) mitiga esta questão, pois o tomador do emprés-

timo tem uma oportunidade (na assinatura do contrato) de enxergar com precisão a taxa efetiva que está pagando.

O **Objeto 70** traz o diagrama de fluxo de caixa e as equações referentes à operação de desconto comercial.

**Objeto 70. Desconto comercial.** Painel A: diagrama de fluxo de caixa. Painel B: equações do desconto e do valor presente. Painel C: equações da taxa efetiva em várias bases.

A. diagrama de fluxo de caixa	B. cálculo do desconto e do valor presente em uma operação de desconto comercial
	$Desconto = VF \cdot i_d \cdot n_c$ $VP = VF - Desconto = VF(1 - i_d \cdot n_c)$
C. taxa efetiva	
ao período:	$i_{efetiva} = \frac{VF}{VP} - 1 = \frac{VF}{VF(1 - i_d \cdot n_c)} - 1 = (1 - i_d \cdot n_c)^{-1} - 1$
ao mês de 30 d.c.:	$i_{efetiva} = (1 - i_d \cdot n_c)^{-30/n_c} - 1$
ao ano de 360 d.c.:	$i_{efetiva} = (1 - i_d \cdot n_c)^{-360/n_c} - 1$
ao ano de 252 d.u.:	$i_{efetiva} = (1 - i_d \cdot n_c)^{-252/n_u} - 1$

A análise das equações do Painel C deixa claro que a taxa efetiva é superior à taxa nominal de desconto (às vezes substancialmente), como exemplificado no **Objeto 71**,

**Objeto 71. Taxa efetiva na operação de desconto comercial.** Taxa efetiva (em %a.m.) para combinações de taxa de desconto (antecipada e simples, em %a.m.) e período (em d.c.). A equação utilizada no cálculo da taxa efetiva é:

$$i_{efetiva} = (1 - i_d \cdot n_c)^{-30/n_c} - 1.$$

		taxa de desconto (simples e antecipada, em %a.m.)					
		0,50%	1,00%	2,00%	5,00%	10,00%	20,00%
período (dias corridos)	5	0,501%	1,006%	2,024%	5,149%	10,610%	22,557%
	10	0,502%	1,007%	2,027%	5,171%	10,706%	22,996%
	15	0,502%	1,008%	2,030%	5,194%	10,803%	23,457%
	20	0,502%	1,008%	2,034%	5,217%	10,903%	23,943%
	30	0,503%	1,010%	2,041%	5,263%	11,111%	25,000%
	45	0,503%	1,013%	2,051%	5,335%	11,443%	26,843%
	90	0,505%	1,020%	2,084%	5,567%	12,625%	35,721%
	120	0,506%	1,026%	2,106%	5,737%	13,622%	49,535%

Com o tempo foram propostas mais duas formas de descontos, cuja finalidade é essencialmente conceitual, ambas chamadas de desconto racional. Também são chamadas de desconto ‘por dentro’, para enfatizar que os juros são calculados sobre o valor presente (que é o normal, por isso foram apelidados de racionais) e não sobre o valor futuro (o do título). Em contraposição,

o desconto comercial é chamado de ‘por fora’ (não confundir com o uso da mesma expressão para denotar o não pagamento de impostos), onde os juros são calculados sobre o valor do título descontado (o valor futuro).

Embora haja algum caso de aplicação prática, o uso do desconto racional é (praticamente) restrito a operações com grandes empresas e mesmo assim não é comum. O **Objeto 72** traz o cálculo dos três tipos de descontos e o da taxa efetiva que eles refletem.

**Objeto 72. Tipo de descontos.** Nomes pelos quais os tipos de descontos são conhecidos. Juros simples (JS) ou compostos (JC) utilizados no cálculo do desconto. Se o desconto é por dentro (D) ou por fora (F).  $n_c$ : prazo da operação em dias corridos.  $n_u$ : prazo da operação em dias úteis. VF: valor futuro da operação (geralmente também o valor nominal).  $i_d$ : taxa de desconto (nominal) da operação, mensal, calculada com dias corridos. Desconto: valor futuro (VF) menos o valor presente. Valor presente: o valor recebido pelo tomador do empréstimo. Taxa efetiva: anual, calculada com base em um ano de 252 dias úteis.

nomes	juros simples (JS) / compostos (JC)	por dentro (D)/ por fora (F)	desconto	valor presente	taxa efetiva (%a.a., com 252 d.u.)
comercial, bancário, simples comercial	JS	F	$VF \cdot i_d \cdot n_c$	$VF(1 - i_d \cdot n_c)$	$(1 - i_d \cdot n_c)^{-\frac{252}{n_u}}$
racional simples	JS	D	$VF \frac{i_d \cdot n_c}{1 + i_d \cdot n_c}$	$\frac{VF}{1 + i_d \cdot n_c}$	$(1 + i_d \cdot n_c)^{\frac{252}{n_u}}$
racional, racional composto	JC	D	$VF \left(1 - \frac{1}{(1 + i_d)^{n_c}}\right)$	$\frac{VF}{(1 + i_d)^{n_c}}$	$(1 + i_d)^{252 \frac{n_c}{n_u}}$

## TAXA ANUAL CAPITALIZADA SUBANUALMENTE

### Cálculo e Utilização

Há um padrão de taxa em que a taxa é expressa ao ano, entretanto capitalizada em períodos mais curtos (semestralmente, trimestralmente, mensalmente ou mesmo diariamente). Para usar esse tipo de taxa, é necessário dividi-la pelo número de períodos de capitalização que há em um ano.

Esse formato de taxa é utilizado amplamente em financiamentos em uma série de países (mas não no Brasil), de grandes e de pequenos montantes, para pessoas físicas e jurídicas, dentre estas para grandes e pequenas empresas, com taxas baixas e elevadas (high yield), a prazos longos e curtos.

Por ser diferente da efetiva, esta é uma taxa nominal (às vezes é apresentada como a taxa nominal). O **Objeto 73** mostra o cálculo da taxa efetiva correspondente.

**Objeto 73. Taxa anual capitalizada em período menor que um ano.** Períodos cheios (sem considerar o efetivo número de dias do período). A taxa efetiva no período de capitalização é obtida pela divisão da taxa nominal pelo número de períodos de capitalização em um ano. A taxa efetiva é obtida pela capitalização da taxa efetiva ao período pelo número de períodos de capitalização no ano.

período de capitalização	taxa efetiva no período de capitalização	taxa efetiva anual
anual	$i_{anual}$	$i_{anual}$
semestral	$\frac{i_{anual}}{2}$	$\left(1 + \frac{i_{anual}}{2}\right)^2 - 1$
trimestral	$\frac{i_{anual}}{4}$	$\left(1 + \frac{i_{anual}}{4}\right)^4 - 1$
mensal	$\frac{i_{anual}}{12}$	$\left(1 + \frac{i_{anual}}{12}\right)^{12} - 1$
diário	$\frac{i_{anual}}{360}$	$\left(1 + \frac{i_{anual}}{360}\right)^{360} - 1$
contínuo ( $n \rightarrow \infty$ )	$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{i_{anual}}{n}\right) = 0$	$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{i_{anual}}{n}\right)^n - 1 = e^{i_{anual}} - 1$

Exemplos e aplicações nos EUA podem ser encontrados em Gosling (1995, p. 124). A origem dessa forma de cálculo do montante a pagar em dívidas é medieval (ou anterior). Como os antigos não podiam fazer cálculos com juros compostos (o uso de tabelas de logaritmos veio mais tarde e era restrito a pouquíssimas pessoas) tiveram que arranjar uma solução aproximada para o período fracionário.

### Cálculo dentro do Período de Capitalização

Dentro do período de capitalização, essa taxa se torna linear. O procedimento é relativamente complexo e é exemplificado no **Objeto 74**:

- Divide-se a taxa pelo número de períodos de capitalização que há em um ano (ou divide-se por 360 e multiplica-se pelo número de dias do períodos de capitalização). Essa é a taxa ao período de capitalização.
- Calcula-se o valor futuro do número inteiro de períodos de capitalização (como se a taxa ao período de capitalização fosse efetiva).
- Restam alguns dias. Para esses (a parte fracionária), continua-se o cálculo do valor futuro com uma formulação de juros simples.

**Objeto 74. Taxa anual capitalizada em período menor que um ano, com parte fracionária.** Painel A: equações do valor futuro e da taxa efetiva anual.  $i_{anual}$ : taxa anual nominal, estabelecida em contrato.  $N$ : número de dias corridos do período de capitalização.  $n$ : número de dias corridos da operação de empréstimo.  $int(x)$ : função que fornece a parte inteira de um número (arredondada para baixo).  $i_{efetiva}$ : taxa anual efetiva. Painel B: exemplo de um empréstimo de 195 dias corridos ( $n$ ), à taxa nominal ( $i_{anual}$ ) de 12% a.a., capitalizada a cada 90 dias corridos ( $N$ ). Como a capitalização ocorre a cada 90 dias, o número de capitalizações no ano é 4 ( $360/90$ ).

<p style="text-align: center;"><b>A. equações</b></p> $VF = VP \left( 1 + \frac{i_{anual}}{360/N} \right)^{int\left(\frac{n}{N}\right)} \left( 1 + \frac{i_{anual}}{360/N} \cdot \left( \frac{n}{N} - int\left(\frac{n}{N}\right) \right) \right)$ $i_{efetiva} = \left( \frac{VF}{VP} \right)^{\frac{360}{n}} - 1 = \left( \left( 1 + \frac{i_{anual}}{360/N} \right)^{int\left(\frac{n}{N}\right)} \left( 1 + \frac{i_{anual}}{360/N} \cdot \left( \frac{n}{N} - int\left(\frac{n}{N}\right) \right) \right) \right)^{\frac{360}{n}} - 1$
<p style="text-align: center;"><b>B. exemplo</b></p> $VF = VP \left( 1 + \frac{12\%}{4} \right)^2 \left( 1 + \frac{12\%}{4} \cdot \frac{15}{90} \right)$ $VF = 1,06620 \cdot VP$ $i_{efetiva} = \left( \frac{VF}{VP} \right)^{\frac{360}{195}} - 1 = 12,56\% \text{ a. a.}$

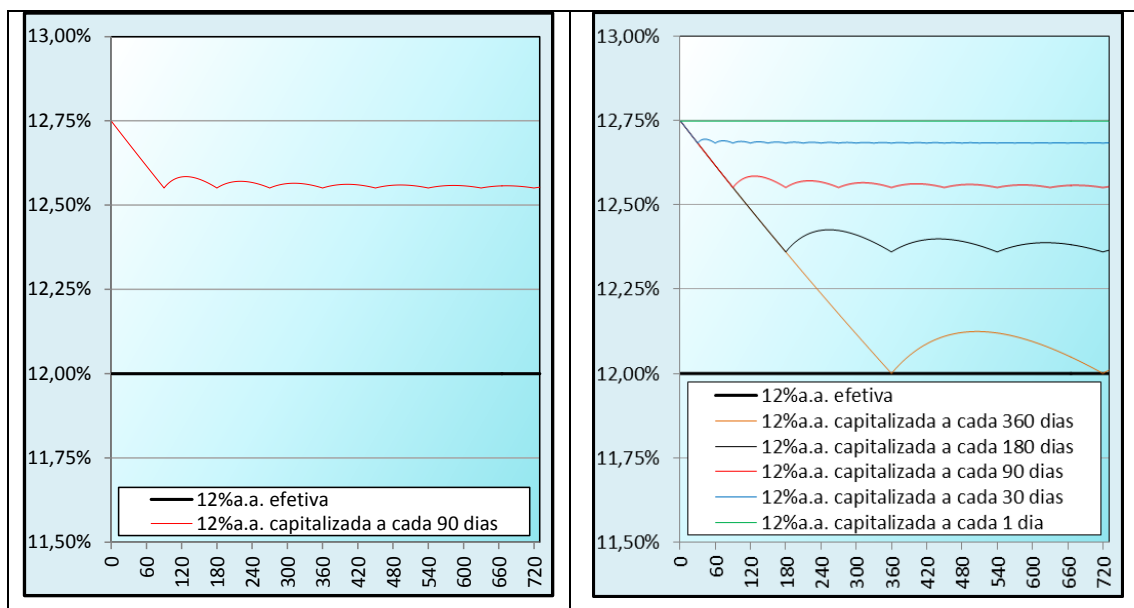
Note-se que a taxa efetiva é superior à nominal. Esse, além da tradição, é a razão das instituições financeiras preservarem esta forma de calcular valores futuros. Afinal de contas, é melhor dizer ao cliente que a taxa é uma (mais baixa) e efetivamente cobrar uma taxa mais alta. O lucro do banco agradece e o cliente (geralmente) nem percebe (ou não tem alternativa).

### Relação com a Taxa Efetiva

A taxa efetiva é mais alta que a contratada (com ganho para o banco) para todos os prazos e períodos de capitalização, como mostrado no Objeto 75.

Objeto 75. Taxa efetiva equivalente a taxa anual capitalizada em período menor que um ano, com parte fracionária. Painel A: taxa efetiva calculada a partir de taxa anual nominal (contratada), capitalizada a cada 90 dias corridos, de 12% a.a. Para comparação é plotada a taxa efetiva. Painel B: taxas efetivas calculadas a partir de taxas anuais nominais (contratadas), capitalizada a cada 1, 30, 90, 180 e 360 dias, todas de 12% a.a. Para comparação é plotada a taxa efetiva.

<b>A. capitalização a cada 90 dias</b>	<b>B. várias capitalizações</b>
--	---------------------------------



## TARIFAS, TRIBUTOS E RECIPROCIDADES

### Tarifas

As instituições financeiras cobram uma série de tarifas dos seus clientes (quase sempre apenas em empréstimos e financiamentos). São cobradas tarifas (em valores variados, podendo haver isenção) como:

- Tarifa de abertura de crédito - TAC (e outras semelhantes), paga no início da operação, justificado pelas despesas na tramitação e análise do pedido de crédito do cliente.
- Tarifa de renegociação de dívida, paga quando (e se) houver a renegociação de uma dívida, justificada pelos custos associados ao atendimento ao cliente e à tramitação correspondente.
- Tarifa de rescisão contratual (quitação antecipada), paga quando (e se) houver a liquidação antecipada do saldo devedor, justificada pelos custos associados ao atendimento ao cliente e à tramitação correspondente.
- Anuidade de cartão de crédito, paga anualmente, justificada pelos custos fixos (dissociados do volume de compras) gerados pelo cartão.

Uma relação de tarifas bancárias autorizadas pelo Banco Central, com os valores médios praticados, pode ser encontrada em [www.bcb.gov.br/?tarifa](http://www.bcb.gov.br/?tarifa). Um exemplo do impacto das tarifas em uma operação de crédito é o do **Objeto 76**



**Objeto 76. Exemplo de impacto de tarifas.** A operação tem um principal de \$30.000,00 e é originalmente contratada com pagamentos constantes de 36 meses à taxa de 2,10% a.m. (28,32% a.a.), portanto com uma prestação de \$1.195,97. Além da taxa de juros, há uma TAC de \$850,00, paga no início. Ao final de 6 meses, o tomador do empréstimo decide reduzir o prazo para 24 meses (que já estava em 30 meses, após os 6 meses transcorridos) e aproveitar que a taxa de juros do mercado caiu, reduzi-la para 1,80% a.m.. Para tal, ele paga uma tarifa de renegociação de dívida de \$350,00. A nova prestação é de \$1.365,45 (maior porque o prazo é maior). Após 12 meses do empréstimo original, o cliente resolve pagar antecipadamente \$10.000,00, mantendo as demais condições da dívida, pagando mais uma tarifa de renegociação de dívida de \$350,00 e reduzindo a prestação a \$810,43 (calculados sobre o saldo devedor da dívida). Ao final do 18º mês (faltando 12 meses para o término), o cliente escolhe quitar a dívida antecipadamente, pagando todo o saldo devedor (o saldo devedor anterior menos a amortização contratual do próprio mês). Paga uma tarifa de rescisão contratual de \$350.

mês	CONDIÇÕES CONTRATADAS			FLUXO DE CAIXA					saldo devedor
	prazo	taxa de juros	prestação	principal contratado	amortização antecipada	juros	tarifas	total	
0				-30.000,00			850,00	-29.150,00	30.000,00
1	36	2,10%	1.195,97	565,97	-	630,00	-	1.195,97	29.434,03
2	36	2,10%	1.195,97	577,86	-	618,11	-	1.195,97	28.856,17
3	36	2,10%	1.195,97	589,99	-	605,98	-	1.195,97	28.266,18
4	36	2,10%	1.195,97	602,38	-	593,59	-	1.195,97	27.663,80
5	36	2,10%	1.195,97	615,03	-	580,94	-	1.195,97	27.048,77
6	36	2,10%	1.195,97	627,95	-	568,02	350,00	1.545,97	26.420,83
7	24	1,80%	1.365,45	641,13	-	554,84	-	1.195,97	25.779,69
8	24	1,80%	1.365,45	654,60	-	541,37	-	1.195,97	25.125,10
9	24	1,80%	1.365,45	668,34	-	527,63	-	1.195,97	24.456,75
10	24	1,80%	1.365,45	682,38	-	513,59	-	1.195,97	23.774,37
11	24	1,80%	1.365,45	696,71	-	499,26	-	1.195,97	23.077,67
12	24	1,80%	1.365,45	711,34	10.000,00	484,63	350,00	11.545,97	12.366,33
13	24	1,80%	810,43	936,28	-	259,69	-	1.195,97	11.430,05
14	24	1,80%	810,43	955,94	-	240,03	-	1.195,97	10.474,11
15	24	1,80%	810,43	976,01	-	219,96	-	1.195,97	9.498,09
16	24	1,80%	810,43	996,51	-	199,46	-	1.195,97	8.501,58
17	24	1,80%	810,43	1.017,44	-	178,53	-	1.195,97	7.484,15
18	24	1,80%	810,43	1.038,80	6.445,34	157,17	350,00	7.991,31	-

O exemplo mostra o funcionamento e o efeito de parte das tarifas mencionadas. A taxa efetiva da operação (a TIR do fluxo de caixa total) é de 2,62% a.m. (36,36% a.a.), superior às taxas contratuais de 2,10% a.a. (28,32% a.a.) e 1,80% a.m. (23,87% a.a.). É o efeito das tarifas.

## Tributos

As pessoas (físicas e jurídicas) pagam uma série de tributos nas suas operações financeiras. Nos itens a seguir são apresentadas as alíquotas típicas, mas há várias situações em que a alíquota é menor, é zero, há isenção ou imunidade.

- IOF sobre o de 0,0041% a.d.c. (juros simples), limitado a 365 d.c., pago no início de operações de crédito sobre o principal liberado ao cliente.
- IOF adicional de 0,38% (independente de prazo), pago no início de operações de crédito, sobre o principal liberado ao cliente.
- IOF (imposto sobre operações de crédito, câmbio e seguro ou relativas a títulos ou valores mobiliários, antigamente imposto sobre operações financeiras), projetado para penalizar aplicações de menos de 30 d.c.. Este imposto é de 96% do rendimento para resgates após

1 d.c., porcentagem que cai gradualmente para chegar a zero nos resgates após 30 d.c. ou mais.

- IRPF (imposto de renda pessoa física), pago sobre os juros recebidos. A alíquota cai com o prazo de resgate da aplicação, indo de 22,5% para até 6 meses a 15,0% acima de 24 meses.
- IRPJ/CSLL-LR (imposto de renda pessoa jurídica e contribuição social sobre o lucro líquido de empresa optante pela tributação do lucro real). Os juros (nominais) recebidos são receita e os juros pagos são despesa, ambos compondo a base de cálculo do imposto. A alíquota é a que a empresa normalmente paga sobre o lucro (1% ou 25% de IR mais 9% de CSLL).
- IRPJ/CSLL-LP (imposto de renda pessoa jurídica e contribuição social sobre o lucro líquido de empresa optante pela tributação do lucro presumido ou pelo simples). Os juros (nem recebidos nem pagos) não têm efeito sobre o IR ou a CSLL (porque o lucro é presumido e calculado como porcentagem da receita de vendas, não importando receitas ou despesas financeiras).

### **Reciprocidade**

Não é incomum que um banco exija (sugira fortemente, a título de reciprocidade) a compra de mais produtos/serviços (cross selling) quando fornece um empréstimo, financiamento ou outro produto/serviço de que o cliente precise muito naquele momento. Muitas vezes, trata-se de vendas casadas, proibidas pelo Código de Defesa do Consumidor, mas incentivadas por meio dos planos de metas (e bônus) de bancos. Naturalmente, as vítimas são pequenas e médias empresas e pessoas físicas, que têm menor capacidade de resistir à pressão do que as grandes empresas.

O produto/serviço comprado a título de reciprocidade pode ser graduado em relação a quanto é desejado pelo cliente e ao seu custo:

- Indesejado, caso em que o cliente somente compra o produto/serviço com o único objetivo de conseguir o empréstimo ou financiamento. Nesse caso, o valor pago é integralmente um custo para o cliente. Já para o banco, há despesas associadas ao produto. Um caso especial de compra de produto/serviço indesejado (que normalmente seria desejado) ocorre quando o cliente precisa tanto do dinheiro que concorda em comprar o mesmo produto/serviço (em redundância) de mais de um banco que lhe dê algum empréstimo ou financiamento.
- Aceitável, desde que seja muito barato. O cliente apenas compraria o produto/serviço (de qualquer um) se o preço fosse menor (geralmente muito menor) que o disponível no mercado (que supostamente é menor que o necessário para a obtenção do empréstimo / financiamento). Neste segundo caso, o custo da reciprocidade é a diferença entre o preço cobrado e esse (hipotético) preço que levaria o cliente a comprar o produto/serviço de alguém.

- Desejado, utilizado em outro banco, mas caro demais. O cliente do banco poderia comprar o mesmo produto/serviço mais barato de outro fornecedor. Como o cliente precisa contratar esses serviços em algum banco, o custo da reciprocidade é a diferença entre as tarifas cobradas pelo novo banco (que concedeu o crédito) em relação ao antigo (que perdeu o cliente).
- Desejado e a preço de mercado. Nesse caso não há um custo de reciprocidade, pois o cliente iria comprar o produto/serviço de outro fornecedor e pode transferi-lo (sem perdas) ao banco fornecedor do empréstimo ou financiamento. Quem perde é o outro banco (que perdeu a venda), mas quem o mandou não conceder o crédito.

Em geral, os produtos e serviços são aqueles que a instituição financeira tem um grande interesse em vender por lhe trazerem um lucro desproporcional. Uma relação de reciprocidades típicas é:

- Abertura de conta corrente. Bancos geralmente exigem que todos seus clientes tenham uma conta corrente. O custo é o pagamento de mais uma cesta de serviços de conta corrente (baixa), além do custo administrativo (baixo) de controlar mais uma conta. Às vezes, o banco cobra juros mais baixos se o cliente concordar com o débito automático das parcelas da conta corrente, justificada pelos menores custos de cobrança. O banco aposta que o débito automático induza o cliente a deixar saldo na conta, o que, por sua vez, o induz a trazer suas demais transações financeiras (lucrativas para o banco).
- Compra de seguros no banco. Muitos clientes não fariam um seguro, por acreditarem que o seu prêmio (seu preço) seja exagerado em relação ao custo do risco que indenizam. Nesse caso, o custo da reciprocidade é a diferença entre o prêmio cobrado e o prêmio que faria o cliente desejar comprar aquele seguro. Se o cliente já compra o seguro em outro lugar (com um corretor), o custo da reciprocidade é a diferença entre o prêmio cobrado e o que já é pago nesse outro lugar. Não é incomum que os prêmios de seguros vendidos por bancos sejam os mais altos do mercado.
- Compra de títulos de capitalização. Um título de capitalização paga uma remuneração semelhante (mas não igual) à da caderneta de poupança (que já é baixa) e sorteia alguns prêmios (em geral de baixo valor e com baixa probabilidade de ganhar), mas cobra alguns custos (que podem ser grandes no início da vigência do título) e cujo rendimento (quando existe) paga imposto de renda (ao contrário da poupança). Se o tomador do empréstimo ou financiamento viesse a usar títulos de capitalização como forma de se obrigar a fazer uma poupança (o eu é pouco provável), então esta forma de reciprocidade não tem custo. Se teria feito outro tipo de aplicação financeira, então o custo é a diferença entre as duas remunerações. Se ele não teria feito aplicações, então o custo da reciprocidade é a diferença entre a taxa de juros do empréstimo e o rendimento do título de capitalização.
- Transferência ao banco dos serviços de pagamento dos salários dos empregados (folha de pagamento), de pagamento dos fornecedores e de cobrança dos clientes (por boletos bancários, cartões ou outros meios). Esses serviços já são (provavelmente) contratados de algum outro banco. Principalmente com a folha de pagamento, mas possivelmente com a

atração de fornecedores e distribuidores que sejam dependentes da empresa, o banco pode obter um bom lucro indireto (além da que ele tem pela tarificação do serviço). Recebendo pela empresa, os empregados (e talvez pequenos fornecedores e até distribuidores) são obrigados a abrir contas correntes no banco, o que aumenta muito a probabilidade deles comprarem outros produtos/serviços desse banco e não dos concorrentes (cross selling). Como a margem de lucro com pessoas físicas e pequenas empresas é alta, o banco ganha indiretamente com essa atração.

- O banco pode exigir a manutenção de um saldo médio (que não rende juros) na conta corrente (reciprocidade muito citada em livros de matemática financeira, mas relativamente pouco relevante hoje em dia). A justificativa é que, já que o cliente precisa manter algum saldo médio, que o faça na conta do banco que lhe deu o tão necessário empréstimo ou financiamento. Se for apenas uma transferência de outro banco, não há custo. Se houver necessidade de manter um saldo médio mais alto do que o naturalmente desejado, isso equivale a receber um valor menor quando da liberação do empréstimo e tê-lo devolvido (sem remuneração) ao final.

O exemplo do **Objeto 77** mostra o efeito da reciprocidade por meio da compra de produtos/serviços (e de tarifas e de tributos).

**Objeto 77. Exemplo de custo de reciprocidade.** O cliente contrata um empréstimo SAC de 6 meses e taxa de 1,25% a.m. e TAC de \$2.500. O IOF é de 0,38% do valor liberado mais 0,0041% a.d.c.. A título de reciprocidade, o gerente do banco exige: (1) a compra de um seguro de vida do dono da empresa, no valor de \$1.800, mas que o titular não queria, mas que compraria voluntariamente por, no máximo, \$800, (2) a transferência do serviço de cobrança de outro banco, cujo preço é equivalente; (3) a compra de um título de capitalização, que o cliente não deseja; (4) a manutenção de um saldo médio de 20% do principal, sendo que o natural é de \$10.000. ok?: a – intrínseco à operação; b – desejado e competitivo; c – desejado, porém não competitivo; d – tolerado, se muito competitivo; e – indesejado; co – custo de oportunidade (fluxo de caixa alternativo).

item do fluxo de caixa	ok?	mês 0	mês 1	mês 2	mês 3	mês 4	mês 5	mês 6
principal	a	100.000	-	-	-	-	-	-100.000
juros	a		-1.250	-1.250	-1.250	-1.250	-1.250	-1.250
TAC (tarifa de abertura de crédito)	e	-2.500	-	-	-	-	-	-
IOF (fixo)	e	-380	-	-	-	-	-	-
IOF (proporcional ao prazo)	e	-738	-	-	-	-	-	-
<b>Fluxo de Caixa do Empréstimo</b>		<b>96.382</b>	<b>-1.250</b>	<b>-1.250</b>	<b>-1.250</b>	<b>-1.250</b>	<b>-1.250</b>	<b>-101.250</b>
seguro de vida	d	-1.800	-	-	-	-	-	-
valor do seguro para a empresa	co	800	-	-	-	-	-	-
<b>Custo da reciprocidade com o seguro</b>		<b>-1.000</b>	-	-	-	-	-	-
serviços de cobrança bancária	b	-	-500	-500	-500	-500	-500	-500
tarifas do banco concorrente	co	-	500	500	500	500	500	500
<b>Custo da reciprocidade com a cobrança</b>		-	-	-	-	-	-	-
fluxo de caixa de título de capitalização	e	-3.000	-	-	-	-	-	3.005
valor para a empresa do título	co	-	-	-	-	-	-	-
<b>Fluxo de caixa da reciprocidade</b>		<b>-3.000</b>	-	-	-	-	-	<b>3.005</b>
saldo médio exigido pelo banco	c	-20.000	-	-	-	-	-	20.000
saldo médio normalmente mantido	co	10.000	-	-	-	-	-	-10.000
<b>Custo da reciprocidade com o título</b>		<b>-10.000</b>	-	-	-	-	-	<b>10.000</b>
<b>FLUXO DE CAIXA TOTAL</b>		<b>82.382</b>	<b>-1.250</b>	<b>-1.250</b>	<b>-1.250</b>	<b>-1.250</b>	<b>-1.250</b>	<b>-88.245</b>

A taxa de juros (1,25% a.m. = 16,1% a.a.) é intrínseca à operação, assim como o próprio principal (liberado no início e devolvido ao final). A TAC pode ser considerada indesejada, embora também possa ser considerada intrínseca à operação por ter sido contratada com a instituição financeira. O IOF é totalmente indesejado (embora inevitável). O custo efetivo total (CET) da operação é a taxa efetiva do empréstimo, contados todos os seus custos ao cliente, como os juros, quaisquer tarifas, tributos, e outros produtos/serviços necessariamente incluídos na operação. A CET é regulada pelo governo, deve ser calculada pela instituição financeira e dada a conhecer ao cliente antes dele concordar com um empréstimo ou financiamento. No exemplo, a CET é calculada com base no fluxo de caixa total do empréstimo, que inclui apenas os custos formalmente contratados na operação. No exemplo a CET foi de 1,89% a.m. (25,2% a.a.).

A cobrança é transferida de outro banco (que possivelmente recusou dar o empréstimo ou tinha taxa pior) a uma tarifa equivalente à alternativa, o que torna essa reciprocidade indiferente. O seguro de vida não seria comprado pelo dono da empresa, a não ser que seu preço (prêmio) fosse muito barato (até abaixo do preço normal de mercado); o custo da reciprocidade é a diferença entre o que é pago e o máximo que o dono pagaria.

O título de capitalização é totalmente indesejado (até porque está com falta e não excesso de dinheiro), é um produto com remuneração muito desvantajosa (terrivelmente baixa) e será integralmente resgatado ao final do empréstimo. Portanto seu fluxo de caixa (tanto a aplicação quanto o resgate) apenas onera o empréstimo.

O banco exige a manutenção de um saldo médio (não remunerado) na conta corrente. O efeito sobre o fluxo de caixa é uma retenção de parte do valor liberado (uma saída de caixa, no início) e a sua liberação ao final do empréstimo (uma entrada de caixa, ao final). O efeito é o mesmo de um empréstimo de valor efetivo menor ao nominal, mas pagando juros sobre um valor liberado (na verdade, não liberado) nominal maior. Entretanto, como a empresa precisa manter algum saldo médio em algum banco (independentemente do empréstimo), nem todo o saldo médio exigido é um custo de reciprocidade.

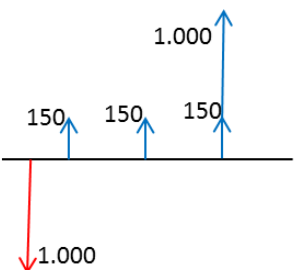
A taxa efetiva, consideradas as reciprocidades, torna-se 2,40% a.m. (32,9% a.a.), devendo ser confrontada com a CET de 25,2% a.a. e com a taxa de juros contratada, de 16,1% a.a.. As tarifas, tributos e reciprocidades têm efeitos semelhantes em empréstimos e financiamentos pós-fixados (o impacto sobre os pós-fixados é exemplificado no Capítulo 13).

## IMPACTO DA VARIAÇÃO DA TAXA EM ATIVOS FINANCEIROS PREFIXADOS

### Variação do Valor da Dívida em decorrência da Variação da Taxa de Juros

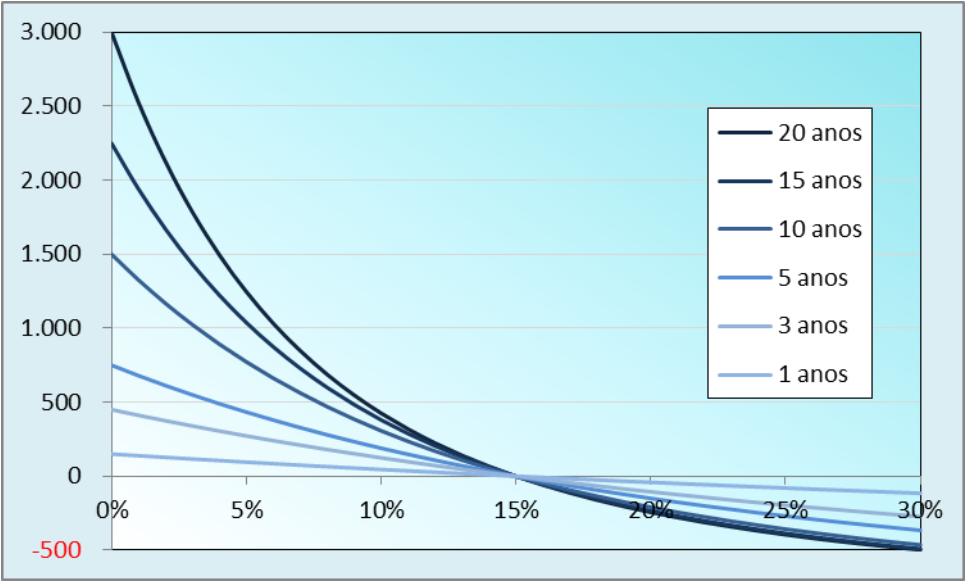
É normal que, depois de emitido um ativo financeiro (dívida para o emissor, investimento para o comprador), a taxa do mercado mude. Quaisquer novos ativos deverão ser emitidos à nova taxa de mercado. Entretanto, o ativo já emitido permanece com a taxa original (a não ser que haja alguma cláusula contratual modificando isso). Com isso, o valor do ativo já emitido e cujo fluxo de caixa não se modifica deve ser recalculado, desta vez à nova taxa do mercado.

**Objeto 78. Impacto da variação da taxa sobre o valor de um ativo.** Ativo de valor nominal \$1.000, pactuado à taxa de 15% a.a., com juros pagos anualmente e amortização ao final. A taxa pactuada permanece constante, mas a taxa de mercado oscila. Painel A: diagrama de fluxo de caixa. Painel B: valor presente a várias taxas de mercado (12% a.a., os originais 15% a.a. e 18% a.a.).

A. fluxo de caixa	A. valor presente a várias taxas
	$VP(12\%) = \frac{150}{1,12^1} + \frac{150}{1,12^2} + \frac{1150}{1,12^3} = 1.072$ $VP(15\%) = \frac{150}{1,15^1} + \frac{150}{1,15^2} + \frac{1150}{1,15^3} = 1.000$ $VP(18\%) = \frac{150}{1,18^1} + \frac{150}{1,18^2} + \frac{1150}{1,18^3} = 935$

O **Objeto 79** mostra os valores (valor presente) de ativos de renda fixa como função da taxa de juros de mercado.

**Objeto 79. Impacto da variação da taxa.** Valor presente de um título como função da taxa de mercado. Título de valor nominal \$1.000, pactuado à taxa de 15% a.a., com juros pagos anualmente e amortização ao final. A taxa pactuada permanece constante, mas a taxa de mercado oscila. Títulos com prazos de 1, 3, 5, 10, 15 e 20 anos. Taxas de mercado de 0% a 30%.



Como se vê, os ativos financeiros mais atingidos pela variação da taxa de juros de mercado são aqueles que têm prazo maior. A variação da taxa de juros de mercado afeta também os ativos financeiros pós-fixados, mas geralmente é mais forte nos prefixados (o impacto sobre os pós-fixados é discutido no Capítulo 13).

### Duration enquanto Prazo Médio Ponderado pelo Valor Presente

Há três formas de calcular o prazo de um ativo financeiro (do ponto de vista do investidor) ou uma dívida (o mesmo ativo, do ponto de vista do devedor), mostrados no **Objeto 80**.

**Objeto 80. Alternativas de definição de prazo de ativos financeiros.**  $n$ : último período do ativo.  $j$ : cada período.  $FC_j$ : fluxo de caixa de cada pagamento gerado pelo ativo.  $i_{\text{mercado}}$ : taxa de juros atualmente vigente no mercado financeiro para esse ativo (não confundir com a taxa originalmente contratada).

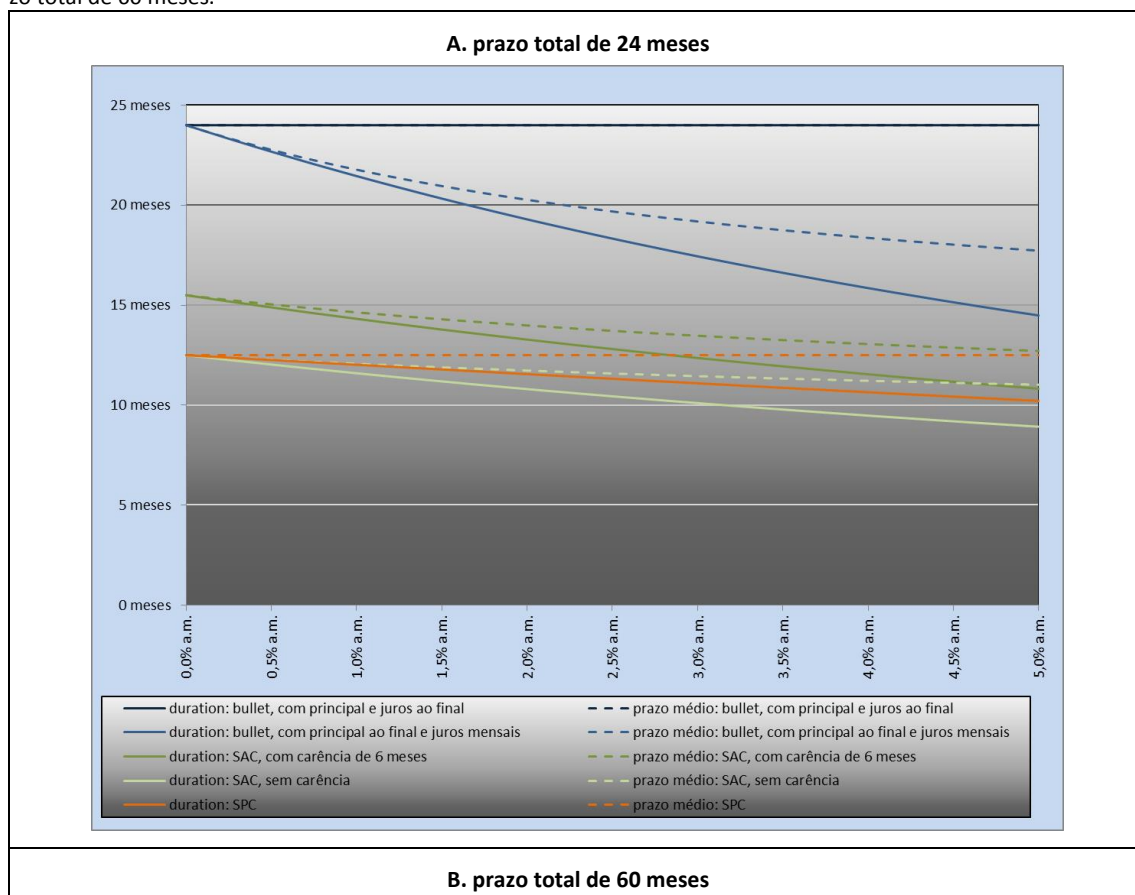
Alternativa	Conceito	Cálculo
Maturidade (prazo total)	simplesmente o prazo total do ativo até o seu vencimento	$n$
Prazo médio (WAL – weighted average life)	é a media dos prazos das parcelas ponderadas pelo seu fluxo de caixa	$\frac{\sum_{j=1}^n j \cdot FC_j}{\sum_{j=1}^n FC_j}$
Duration (Macaulay)	é a media dos prazos das parcelas ponderadas pelo valor presente de seu fluxo de caixa	$\frac{\sum_{j=1}^n j \cdot FC_j \cdot (1 + i_{\text{mercado}})^{-j}}{\sum_{j=1}^n FC_j \cdot (1 + i_{\text{mercado}})^{-j}}$

O conceito de duration (duration de Macaulay) foi originalmente desenvolvido por Macaulay, em 1910 (wiki/Frederick\_Macaulay, 2014?). A duration de Macaulay (veja também a duration modificada), é o prazo médio da operação quando o ponderador são os valores presentes de cada fluxo de caixa:

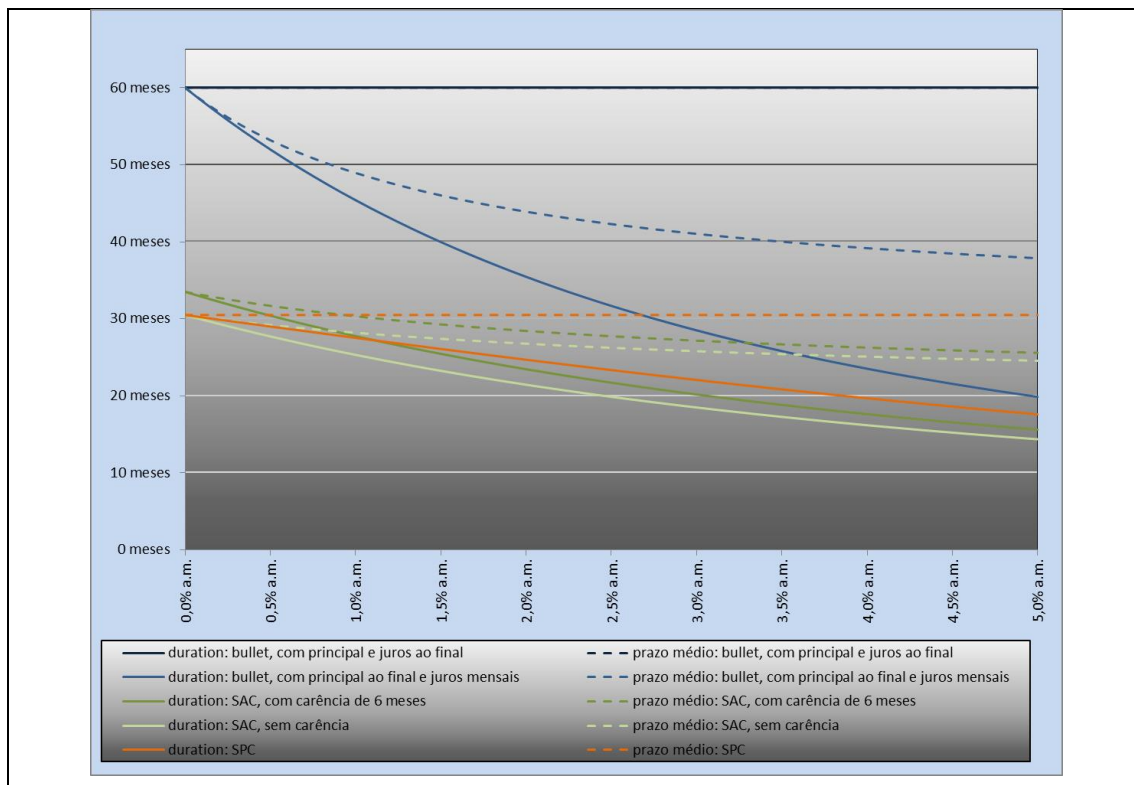
$$DurMac = \frac{\sum_{j=1}^n j \cdot FC_j \cdot (1+i)^{-j}}{\sum_{j=1}^n FC_j \cdot (1+i)^{-j}}$$

Note-se que o prazo médio do ativo financeiro é o mesmo que a duration se a taxa de juros de mercado for zero (Desafio, 513: mostre que esta última afirmação é verdadeira). O prazo médio e a duration são fortemente afetadas pelas taxas utilizadas, pelo prazo da operação e pelo sistema de amortização empregado, como mostrado nos gráficos do **Objeto 81**.

**Objeto 81. Duration e prazo médio em função da taxa.** Duration e prazo médio em função da taxa de juros contratada para diferentes sistemas de amortização. Painel A: ativo com prazo total de 24 meses. Painel B: ativo com prazo total de 60 meses.







A observação destes gráficos permite observar que:

- Para o ativo que é amortizado integralmente e paga juros somente ao final da operação, a duration e o prazo médio são sempre iguais ao prazo total (Desafio, 514: mostre que esta última afirmação é verdadeira).
- Em todos os casos, o prazo médio sempre é maior (ou igual) à duration (Desafio, 515: mostre que esta última afirmação é verdadeira).
- No SPC (sistema de pagamentos constantes), o prazo médio independe da taxa e é igual a metade do prazo total (Desafio, 516: mostre que esta última afirmação é verdadeira).

Quando o prazo é maior, o efeito da taxa sobre a duration é maior.

### Duration enquanto Sensibilidade do Valor Presente

A duration (embora modificada em relação à de Macaulay) é a sensibilidade do valor presente à taxa de juros do mercado. A duration modificada é apresentada a seguir e demonstrada no **Objeto 82**:

$$DurMod = \frac{1}{VP} \frac{dVP}{di} = - \frac{1}{1+i} \frac{\sum_{j=1}^n j \cdot FC_j \cdot (1+i)^{-j}}{\sum_{j=1}^n FC_j \cdot (1+i)^{-j}} = - \frac{DurMac}{1+i}$$

**Objeto 82. Demonstração da duration enquanto sensibilidade do valor presente à taxa de juros.**

Partimos do valor presente e da duration de Macaulay

$$VP = \sum_{j=1}^n FC_j \cdot (1+i)^{-j} \quad (25)$$

$$DurMac = \frac{\sum_{j=1}^n j \cdot FC_j \cdot (1+i)^{-j}}{\sum_{j=1}^n FC_j \cdot (1+i)^{-j}}$$

A sensibilidade do valor presente à taxa de juros é a sua derivada em relação à taxa. Em outras palavras, quanto varia percentualmente o VP se a taxa sofrer variação

$$DurMod = \frac{1}{VP} \frac{dVP}{di} \quad (26)$$

A derivada de cada termo de (25) é

$$\frac{d}{di} (FC_j \cdot (1+i)^{-j}) = -j \cdot FC_j \cdot (1+i)^{-j-1} = -\frac{j \cdot FC_j \cdot (1+i)^{-j}}{1+i}$$

Portanto, a equação (26) pode ser escrita como



$$DurMod = \frac{1}{VP} \frac{dVP}{di} = -\frac{1}{1+i} \frac{\sum_{j=1}^n j \cdot FC_j \cdot (1+i)^{-j}}{\sum_{j=1}^n FC_j \cdot (1+i)^{-j}} = -\frac{DurMac}{1+i} \quad (\text{c.q.d.})$$

A duration modificada é exata para variações infinitesimais da taxa, mas apenas aproximada para variações maiores. Ela tem sinal negativo, pois quando a taxa cresce o valor presente do ativo cai. Mesmo assim, o mais comum é apresentá-la com sinal positivo.

Por expressas e sensibilidade do valor de um ativo à taxa de juros, a duration modificada é utilizada na avaliação de riscos de carteiras de renda fixa.

**ATIVIDADES**

Os exercícios são aplicações diretas (mais matemática simples do que finanças) das técnicas apresentadas no capítulo (podem ser usados conceitos de capítulos anteriores). Os problemas já têm enunciados com algum contexto e, em algumas situações, um pouco de dificuldade. Os casos reais trazem situações de aplicação colhidos (e simplificadas) da realidade e são escritos de modo a trazer uma forte impressão do contexto em que ocorreram e permitir fazer os cálculos necessários. Alguns casos podem ser difíceis.

Os exercícios, problemas e casos resolvidos (em planilha) estão assinalados com . Nem sempre os exercícios, problemas e casos exigem cálculos, podendo se resumir a aplicações dos conceitos desenvolvidos no capítulo. Em todas as atividades utilize juros compostos, exceto se houver informação em contrário. Algumas atividades podem ser longas (por envolverem muitos períodos), mas são repetitivas (as equações em cada período são as mesmas). Alguns exercícios e problema são continuação de anteriores, caso em que são assinalados com . Os exercícios, problemas e casos podem trazer (e frequentemente trazem) elementos de capítulos anteriores, que são considerados conhecidos.

**Exercícios**

Nos exercícios a seguir, calcule a taxa efetiva mensal (quando nada for estipulado no enunciado, assuma um mês de 30 dias corridos ou 21 dias úteis) e anual (para um ano de 12 meses ou 252 dias úteis). Calcule também a taxa real anual para uma inflação de 3,4% a.a.


517. Um empréstimo de capital de giro, em que o principal e os juros são pagos ao final de 6 meses e a taxa de juros cobrada é de 1,65% a.m..
518. Um empréstimo de capital de giro, em que o principal e os juros são pagos ao final de 15 d.u. e a taxa de juros cobrada é de 14,55% a.a. (ano de 252 dias úteis).
519. Um empréstimo de capital de giro, com principal e juros no final, prazo de 48 d.c. e taxa de 11,60% a.a. (1 ano = 252 d.u.).
520. Um desconto (comercial) de cheque pré-datado de 40 d.c. à taxa de desconto de 2,11% a.m..
521. Um desconto (bancário) de duplicata, com prazo de 18 d.c. (12 d.u.) à taxa de desconto de 1,95% a.m..
522. Um desconto (simples comercial) de cheque pré-datado de 92 d.c. (3 meses) à taxa de desconto de 3,70% a.m..
523. Um empréstimo com taxa nominal de 10,88% a.a., capitalizada trimestralmente (e calculada como simples dentro do trimestre), pelo prazo de 280 d.c. (2 trimestres cheios mais 36 d.c.).
524. Um empréstimo com taxa nominal de 6,70% a.a., capitalizada trimestralmente (e calculada como simples dentro do trimestre), pelo prazo de 400 d.c. (4 trimestres cheios mais 34 d.c.).


## Problemas

525. Uma empresa precisa de \$ 100 mil por um mês. Possui uma duplicata de \$ 105 mil, com vencimento em 32 dias corridos, que pode descontar à taxa de 2,11% a.m. Esta taxa é simples, ao dia corrido e paga antecipadamente. Quanto é o valor liberado? Ignore o IOF.
526. Um posto de gasolina recebeu cheques para 42 dias e deve pagar contas de \$ 36 mil hoje. Pode descontar os cheques em uma factoring à taxa de 4,8% a.m. Para obter os \$ 36 mil, deve descontar que valor em cheques de clientes. Ignore o IOF.
527. Um banco deseja cobrar a taxa efetiva anual de 22% nas suas operações de descontos para pequenas empresas. Qual a taxa de desconto ele deve oferecer para prazos de 20 d.c., equivalente (nesse período) a 15 d.u.?
528. ❶ No problema anterior, qual a taxa a oferecer para um prazo de 23 d.c. e 16 d.u. (pegou um feriado na sexta)?
529. ❶ Por que as taxas ficaram tão diferentes?
530. Calcule a taxa efetiva anual (ano de 252 dias úteis) para um empréstimo tomado à taxa nominal de 9,82% a.a., capitalizada trimestralmente (a cada trimestre calendário) e simples nos trimestres fracionários, cuja amortização e juros são trimestrais (ao final de cada trimestre calendário), que foi levantada no dia 16jan14 e vencendo no dia 5ago14 (necessário contar dias corridos e úteis em um calendário).
531. Calcule a taxa efetiva anual (ano de 252 dias úteis) para um empréstimo tomado à taxa nominal (simples ao dia corrido) de 12,00% a.a., cuja amortização e juros são trimestrais, que foi levantada no dia 10out07 e venceu em 30mar12 (necessário contar dias corridos e úteis em um calendário).
532. Uma jornalista escreveu a seguinte frase. “É um absurdo! Um carro de \$ 40 mil, pago em 48 prestações (1+47) de \$1.160, acaba saindo por \$ 56 mil, ou seja 40% mais caro!”. Sabendo que a taxa de mercado para aplicações financeiras é de 1,5% a.m., explique por que você concorda ou discorda dela?
533. Calcule o custo efetivo total (anual, ano de 252 dias úteis) do ponto de vista do cliente do banco (CET) para um empréstimo de capital de giro no valor de \$40.000, em que o principal é pago ao final de 6 meses, os juros são pagos mensalmente e a taxa é de 1,65% a.m..
534. ❶ Recalcule a CET do problema anterior com um IOF de 0,0041% a.d.c., mais 0,38% do principal, pago antecipadamente.
535. ❶ Refaça os cálculos adicionando (além do IOF) uma TAC de \$3.000, paga antecipadamente.

536. Calcule o custo efetivo total (anual, ano de 252 dias úteis) do ponto de vista do cliente do banco para um desconto de duplicatas no valor de \$800.000, em que o principal é pago ao final de 32 d.c. (22 d.u.) e os juros são de 1,80% a.m..

537.  Adicione o IOF de 0,0041% a.d.c., mais 0,38% do principal, pago antecipadamente.

538.  Adicione uma TAC de \$3.000, paga antecipadamente.

539.  Adicione a exigência do banco de manter, em conta corrente e sem remuneração, um saldo médio (além daquele que normalmente seria mantido) de \$50.000.

540. Considerando um valor futuro de \$ 100 mil e um prazo de um período, complete a tabela:

taxa de desconto	'por fora'	'por dentro'
4%	96.000	96.154
7%	93.000	93.458
10%		
20%		
25%		
50%		
100%		
200%		

541. O que acontece com o desconto comercial para taxas iguais superiores a 100%?

542. Segundo qual destes dois métodos, a taxa de desconto efetivamente correspondeu à taxa de juros da operação.

### Caso: financiamento do FIES e inflação

SPC. Decisão de financiamento de longo prazo. Impacto da inflação. Subsídio governamental.



O Brasil tem 7 milhões (em 2014) de alunos cursando o ensino superior (graduação). O seu ensino é financiado de quatro formas (principais): ensino público gratuito (25% dos alunos; quem paga é o contribuinte), Prouni (21% dos alunos; se for integral, quem paga é o contribuinte; se for parcial, a conta é dividida entre o contribuinte, a família e o FIES), FIES (22% dos alunos; o estudante paga uma parte e o governo outra; uma parte dos alunos também tem o Prouni), ensino privado não subsidiado (o restante dos alunos; quem paga é a família do estudante ou ele mesmo). O Programa de Financiamento Estudantil (FIES) financia até 100% das mensalidades (dependendo da renda familiar per capita) e cobra uma taxa de juros nominal de 3,4% a.a. (menor que a inflação), nas seguintes condições (MEC, 2014?):

- Fase de utilização. Durante o curso, as mensalidades vão se acumulando no saldo devedor. O estudante paga, a cada três meses, juros sobre o saldo devedor, até o teto de R\$ 50,00, sendo que o restante dos juros é capitalizado.
- Fase de carência. Após a conclusão do curso, o estudante tem uma carência de 18 meses (para começar a trabalhar e se arrumar na vida). O estudante paga, a cada três meses, juros sobre o saldo devedor, até o teto de R\$ 50,00, sendo que o restante dos juros é capitalizado (o mesmo procedimento da fase de utilização).
- Fase de amortização. Após a carência, o saldo devedor do estudante é parcelado, com prestações iguais não sem indexador, em até o triplo do período financiado do curso, mais 12 meses.

Nos cálculos a seguir, considere um curso com duração de 36 meses (3 anos), com mensalidades iniciais de \$500,00 que são reajustadas anualmente pela inflação, que é (média no período) de 7,0% a.a.. O período de carência é de 18 meses e o de amortização é de mais 120 meses (10 anos).

543. Monte o fluxo de caixa da fase de utilização (não se esqueça de que parte dos juros é paga e parte é capitalizada). Qual o saldo devedor ao final da fase de utilização (início da de carência).

544. Monte o fluxo de caixa da fase de carência (não se esqueça de que parte dos juros é paga e parte é capitalizada). Qual o saldo devedor ao final da fase de carência (início da de amortização).

545. Por que o FIES exige o pagamento de alguns juros ainda nestas duas fases?
546. Calcule o valor das prestações (iguais) da fase de amortização. Monte o fluxo de caixa da fase de amortização.
547. Calcule a taxa efetiva nominal da operação (em % a.a.).
548. Calcule a taxa efetiva real da operação (em % a.a.), para uma inflação (média no período) de 7,0% a.a..
549. Refaça os cálculos para uma inflação de 3,0% a.a. e para uma de 15,0% a.a.. Qual o impacto da incerteza quanto à inflação futura?
550. Refaça todos os fluxos de caixa (e cálculo de prestações) não com a taxa subsidiada do FIES, mas com a da LFT, estimada (na média, para todo o período) em 12% a.a..
551. Sabendo-se que a taxa da LFT é a de mercado, qual parte (%) das prestações calculadas com a taxa de mercado (LFT) é paga pelo estudante? E qual a parte subsidiada pelo governo?
- Este caso teve a colaboração de Rui Otávio Bernardes de Andrade, na estimação da quantidade de alunos em cada modalidade de financiamento da educação.

### **Caso: casa própria**

*SPC. Decisão de poupança. Decisão de financiamento.*

Um médico está considerando trocar seu apartamento (de \$600 mil) por um que dê mais comodidade para sua família (de \$1500 mil), até porque os seus filhos (5 e 7 anos) em pouco tempo precisarão de quartos separados. Ele já tem \$100 mil, aplicados à taxa líquida de 1,2% a.m. (considere esta taxa nos cálculos a seguir). Para isto, ele tem três opções:

- 1ª: Comprar um apartamento pronto, dando o seu dinheiro e o apartamento atual como entrada e financiando o restante em 84 meses anos à taxa de 1% a.m.;
  - 2ª: Comprar um apartamento em construção, com entrega em 2,5 anos. Dá uma entrada equivalente ao valor que possui aplicado, paga 30 mensais iguais à da alternativa anterior, dá o apartamento atual nas chaves e paga mais 54 parcelas iguais às primeiras.
  - 3ª: Juntar dinheiro durante  $n$  meses (em valor equivalente ao das prestações das questões anteriores), para comprar o apartamento à vista, com 15% de desconto. Neste caso, ele vende seu apartamento atual quando tiver juntado o dinheiro necessário para comprar o novo.
552. Esboce o fluxo de caixa da 1ª alternativa, calcule o valor da prestação aplicável e o valor presente do custo do apartamento nesta alternativa.
553. Esboce o fluxo de caixa da 2ª e calcule o valor presente do custo do apartamento nesta alternativa.
554. Compare os custos e benefícios da 1ª e da 2ª alternativas. Qual você escolheria.
555. Esboce o fluxo de caixa da 3ª alternativa, calcule o número de meses até comprar o apartamento e o valor presente do custo do apartamento nesta alternativa.
556. Compare os custos e benefícios da 2ª e da 3ª alternativas. Qual você escolheria.
557. Agora é para valer: e entre a 1ª e a 3ª?
558. Algumas pessoas escolheriam a outra alternativa. Por que?

### Caso: desconto de recebíveis no atacarejo

Desconto comercial. IOF. Títulos descontados de vários vencimentos. Seleção de alternativas de desconto de recebíveis.

Um atacarejo (supermercado híbrido entre atacado e varejo que vende somente em grandes volumes e atende tanto pequenas empresas como pessoas físicas) precisa de \$2.000.000 para pagar a folha de pagamento (empregados), os fornecedores e os impostos do mês (atrasar os pagamentos geraria problemas imensos). Para levantar esse dinheiro pode descontar duplicatas (vendas a pequenas empresas, com risco menor) e cheques pré-datados (microempresas e pessoas físicas, com custo de operação maior). A tabela mostra os valores (em \$1.000) passíveis de serem descontados por vencimento (em d.c. e d.u.) e as taxas de desconto (em %a.m.).

dias		valor dos títulos		taxa de desconto	
d.c.	d.u.	duplic	cheques	duplic	cheques
7	5	850	1.250	sem negócio	
14	9	180	980	1,64%	2,14%
21	15	4.500	1.500	1,75%	2,20%
28	20	120	870	1,68%	2,08%
35	25	0	320	1,68%	2,03%
42	29	0	1.270	1,69%	1,99%
49	34	180	210	1,76%	2,01%
56	40	0	170	1,87%	2,07%
63	45	700	90	1,86%	2,06%
70	50	0	40	1,86%	2,06%
total		6.530	6.700		

559. Para cada combinação de prazo e título, calcule (para cada \$1 de títulos) o valor liberado pelo banco (sem ainda considerar o IOF).

560. Para cada combinação de prazo e título, calcule a taxa efetiva (em %a.a.) do ponto de vista do banco (sem ainda considerar o IOF).

561. Por que o banco utiliza uma taxa de juros maior em operações de prazo muito curto?

562. Por que razão o banco não deseja fazer operações de prazo curtíssimo (a sem negócio)?

563. Por que o banco utiliza uma taxa de juros maior em operações de prazo mais elevado?

564. Por que o desconto de cheques pré-datados é mais caro?

565. Para cada prazo, calcule o IOF para cada \$1 liberado pelo banco (uma porcentagem do valor liberado). O IOF é de 0,0041% por dia corrido mais 0,38% fixos, sempre sobre o valor liberado pelo banco.

566. Para cada combinação de prazo e título, calcule a taxa efetiva (em %a.a.) do ponto de vista do cliente (descontando também o IOF).

567. O cliente deseja minimizar o custo efetivo total do dinheiro captado. Qual o valor de cada combinação de prazo e título ele deve descontar?

### Caso: cheque especial e o método hamburguês

Método hamburguês. Decisão de financiamento no varejo.

O método hamburguês é utilizado para calcular os juros sobre o saldo médio das contas de cheque especial e outras assemelhadas. Para saber o valor do juros a pagar, calcula-se o saldo médio da conta e multiplica-se pela taxa mensal. Eis, ao lado, um exemplo.

dia		movimento		saldo
do mês	da semana	crédito	débito	
				(1.200,00)
1	segunda	300,00	-	(900,00)
2	terça	-	-	(900,00)
3	quarta	-	300,00	(1.200,00)
4	quinta	-	-	(1.200,00)
5	sexta	-	-	(1.200,00)
6	sábado			(1.200,00)
7	domingo			(1.200,00)
8	segunda	-	600,00	(1.800,00)
F	feriado			(1.800,00)
10	quarta	4.500,00	800,00	1.900,00
11	quinta	-	-	1.900,00
12	sexta	-	200,00	1.700,00
13	sábado			1.700,00
14	domingo			1.700,00
15	segunda	-	-	1.700,00
16	terça	-	700,00	1.000,00
17	quarta	-	-	1.000,00
18	quinta	-	500,00	500,00
19	sexta	-	-	500,00
20	sábado			500,00
21	domingo			500,00
22	segunda	-	-	500,00
23	terça	300,00	500,00	300,00
24	quarta	-	300,00	0,00
25	quinta	-	-	0,00
F	feriado			0,00
27	sábado			0,00
28	domingo			0,00
29	segunda	-	200,00	(200,00)
30	terça	100,00	-	(100,00)
total		5.200,00	4.100,00	

568. Calcule o saldo médio dessa conta.

569. Com uma taxa de 4,5% a.m., calcule os juros (em \$) dessa operação.

570. O método hamburguês usa juros simples ou compostos?

571. Qual a taxa anual equivalente a essa taxa mensal (1 ano = 12 meses).

572. Calcule a taxa efetiva (%a.d.u. e %a.a., com 1 ano = 252 d.u.) da operação?

573. Compara a taxa efetiva com a nominal da operação (ambas anuais).

574. A taxa efetiva pode se tornar menor que a nominal (o que não é nada comum em bancos). Como o banco compensa isso?

### Caso: venda casada em financiamento

*Crédito rural a taxa fixa. Reciprocidades. Questões éticas. Decisão de financiamento.*

Um produtor agrícola deve escolher entre três bancos. Todos emprestam os \$17 milhões de que ele precisa, pelo prazo de 1 ano, à mesma taxa de 8,4% a.a. A amortização e os juros são pagos ao final. A questão são as demais exigências:

1º banco: TAC de \$4.000, saldo médio em conta corrente de \$5 milhões, compra de seguros contra intempéries com prêmio (preço) de \$400 mil, transferência ao banco da folha de pagamento, compra de títulos de capitalização de \$100 mil.

2º banco: saldo médio em conta corrente \$3 milhões, compra de seguros contra intempéries com prêmio de \$700 mil, transferência ao banco da folha de pagamento.

3º banco: saldo médio em conta corrente \$1 milhão, compra de seguros contra intempéries com prêmio de \$200 mil transferência ao banco da folha de pagamento. O gerente exige uma contribuição (suborno) de \$200 mil.

Os seguros dos 3 bancos têm coberturas equivalentes e substituem uma apólice já existente (e muito necessária) que tem prêmio de \$300 mil. Os depósitos em conta corrente não são remunerados e a empresa planeja manter um saldo médio (espontâneo) de \$3 milhões. A folha tem que ser paga através de algum banco (os empregados mais baixos hierarquicamente preferem o 3º banco por ser mais amigável no relacionamento, os mais altos detestam esse banco por ser atrapalhado e caro). O título de capitalização rende 1,0% a.a. e é considerado um abuso (assim como tal contribuição ao gerente e os seguros caros demais). Todas as reciprocidades sob forma de despesa são pagas na liberação do principal. Por se tratar de financiamento agrícola (incentivado), não há IOF.

575. Quais os valores presentes e futuros nos 3 bancos?

576. Quais as três taxas efetivas?

577. Para uma inflação de 6,5% a.a., quais as 3 taxas efetivas reais?

578. Que alternativas há para lidar com a questão ética apresentada pela exigência de contribuição ao gerente no 3º banco?

579. Que alternativas há para lidar com a questão ética apresentada pela venda casada de produtos (que é ilegal, pois fere o Código de Defesa do Consumidor) pelos 3 bancos?

580. Há questões éticas que devem ser levadas a sério enquanto outras não?



# 13

## OPERAÇÕES PÓS-FIXADAS

### INTRODUÇÃO

#### Conceito e Utilização de Taxa Pós-fixada

A taxa é pós-fixada quando uma parte (pode ser todo) do valor futuro de uma operação depende de uma variável desconhecida (pode ser projetada) a priori. No caso geral, a taxa pós-fixada é composta de um indexador (IPCA, CDI, TJLP, dólar, TR, etc.) mais uma taxa de juros.

As taxas pós-fixadas são preferidas (em situações normais) nos casos em que:

- A inflação ou a taxa básica de juros (Selic, CDI) são difíceis de prever e são (ou podem se tornar) altas. Nesse caso, o credor (quem fez o empréstimo ou financiamento) pode ser fortemente prejudicado pelo uso de uma taxa prefixada. A sua defesa (dentre outras) é exigir que o empréstimo ou financiamento seja feito a uma taxa pós-fixada.
- O prazo é longo, pois há possibilidade de a inflação ou a taxa básica de juros cresçam inesperadamente.
- Há necessidade de fazer hedge. Um empréstimo pós-fixado pode anular o risco de um investimento pós-fixado anterior. Alternativamente, um investimento pós-fixado pode anular o risco de um empréstimo pós-fixado anterior. Se a inflação subir ou cair, a perda de um é compensada pelo ganho no outro.
- Há expectativa de alta ou baixa de inflação ou da taxa básica de juros. Nesse caso, é vantagem, respectivamente, investir ou se endividar ou em uma taxa pós-fixada.
- O contraparte é incauto e pode ser levado a fazer uma operação com taxa pós-fixada quando não lhe convém (Desafio, 581: Esboce o sistema ético em que o contraparte deve ser impedido de agir contra seus próprios interesses. Desafio, 582: Esboce o sistema ético em que o contraparte deve ser abandonado à própria sorte. Desafio, 583: Qual desses dois sistemas éticos é prevalente no mercado financeiro?).

#### Sistemas de Indexação

São utilizados dois sistemas de indexação, além de um híbrido:

- Indexação dos juros. Com utilização de uma taxa nominal.
- Indexação do principal, com atualização do saldo da dívida pelo indexador e aplicação de uma taxa real.

No sistema de indexação dos juros, além do indexador (usualmente uma taxa de juros, flutuante), há uma taxa adicional (um spread). Os juros são nominais (usualmente) e são aplicados sobre o saldo não atualizado da dívida. O sistema é (usualmente) utilizado quando o indexador é uma taxa de juros. Este sistema é exemplificado no **Objeto 83**.

**Objeto 83. Sistema de indexação dos juros.** A taxa nominal é aplicada sobre o saldo, não atualizado, da dívida. Indexador: definido no contrato da dívida e variável em razão da conjuntura econômica. Taxa real: definida no contrato e fixa. Taxa nominal: composição não linear do indexador como taxa real. Amortização - % do saldo da dívida: parcela do saldo da dívida a ser amortizada em cada ano ( $= 1 / \text{número de parcelas remanescentes}$ ). Amortização - \$: valor da amortização no ano, calculada pela aplicação da % do saldo da dívida sobre o saldo atualizado antes da amortização (ou não atualizado, dado neste caso serem iguais). Saldo da dívida antes da amortização: saldo anterior (após a amortização), sem atualização. Juros: multiplicação do saldo atualizado antes da amortização (ou não atualizado, dado neste caso serem iguais) pela taxa de juros nominal. Pagamento: soma da amortização e dos juros.

ano	INDEXADOR			AMORTIZAÇÃO		SALDO DA DÍVIDA		juros	pagamento total
	indexador	taxa real	taxa nominal	% do saldo da dívida	\$	antes da amortização	após a amortização		
0					-20.000	20.000			-20.000
1	8,0%	5,0%	13,4%	20%	4.000	20.000	16.000	2.680	6.680
2	5,0%	5,0%	10,3%	25%	4.000	16.000	12.000	1.640	5.640
3	6,5%	5,0%	11,8%	33%	4.000	12.000	8.000	1.419	5.419
4	7,0%	5,0%	12,4%	50%	4.000	8.000	4.000	988	4.988
5	6,0%	5,0%	11,3%	100%	4.000	4.000	0	452	4.452
soma, média			12,0%		0			7.179	7.179

Nos casos em que a indexação recai sobre o saldo da dívida, ele é atualizado pelo indexador e os juros são calculados sobre o novo principal. Nesse caso, a taxa de juros usada é (usualmente) a real. Esse sistema é (usualmente) preferido quando o indexador é um índice de inflação. O **Objeto 84** exemplifica esses dois sistemas.

**Objeto 84. Sistema de indexação do principal.** A taxa real é aplicada sobre o saldo atualizado da dívida. Indexador: definido no contrato da dívida e variável em razão da conjuntura econômica. Taxa real: definida no contrato e fixa. Taxa nominal: composição não linear do indexador como taxa real. Amortização - % do saldo da dívida: parcela do saldo da dívida a ser amortizada em cada ano ( $= 1 / \text{número de parcelas remanescentes}$ ). Amortização - \$: valor da amortização no ano, calculada pela aplicação da % do saldo da dívida sobre o saldo atualizado antes da amortização. Saldo da dívida antes da amortização: saldo anterior (após a amortização), atualizado. Juros: multiplicação do saldo atualizado antes da amortização pela taxa de juros real. Pagamento: soma da amortização e dos juros.

ano	INDEXADOR			AMORTIZAÇÃO		SALDO DA DÍVIDA		juros	pagamento total
	indexador	taxa real	taxa nominal	% do saldo da dívida	\$	antes da amortização	após a amortização		
0					-20.000	20.000			-20.000
1	8,0%	5,0%	13,4%	20%	4.320	21.600	17.280	1.080	5.400
2	5,0%	5,0%	10,3%	25%	4.536	18.144	13.608	907	5.443
3	6,5%	5,0%	11,8%	33%	4.831	14.493	9.662	725	5.555
4	7,0%	5,0%	12,4%	50%	5.169	10.338	5.169	517	5.686
5	6,0%	5,0%	11,3%	100%	5.479	5.479	0	274	5.753
soma, média			12,0%		4.335			3.503	7.838

Os dois métodos são corretos m(não provocam ganhos ou perdas para as partes). Note-se que ambos os exemplos são idênticos (mesmo indexador, prazo, taxa e método de amortização), à exceção do sistema de indexação usado. As taxas efetivas nominais dos exemplos com indexação dos juros e indexação do principal foram, respectivamente, 12,03% a.a. e 11,99% a.a.. Essas taxas são muito próximas, como era de se esperar (Desafio, 584: por que há diferença entre as taxas nominais efetivas nos dois sistemas de indexação?).

Em alguns casos, é usado um sistema híbrido entre a indexação da amortização e dos juros. Primeiro, é feita a atualização do saldo devedor segundo um indexador (usualmente a taxa de câmbio). A seguir, são pagos (ou capitalizados) os juros, que têm um segundo indexador (usualmente uma taxa de juros flutuante) mais um adicional fixo (um spread). Este sistema é tratado e exemplificado quando da discussão das operações em moeda estrangeira.

## OPERAÇÕES INDEXADAS COM ÍNDICES DE INFLAÇÃO

### Principais Índices de Inflação no Brasil

A inflação é a perda do poder aquisitivo da moeda (quanto mais dinheiro é necessário para comprar as mesmas coisas). Os índices de inflação são calculados pelo quanto (na média) aumentaram os preços de uma cesta de produtos/serviços, o que exige que uma instituição (geralmente uma Fundação) mantenha um belo e permanente esforço de coleta de preços, uma metodologia bem cuidada e um sistema de cálculo robusto. Mesmo assim (e é normal que assim seja), há alguma imprecisão da estimação da inflação.

Alguns dos índices têm foco na variação dos preços do consumo das famílias (os índices de preços ao consumidor) e outros usam como base uma cesta de custos das empresas (como o IPA e o INCC, dentre muitos outros). A tabela do **Objeto 85** traz os principais índices de inflação em uso no Brasil.

**Objeto 85. Principais índices de inflação.** Indexador: sigla e nome. Instituição: instituto de pesquisa que levanta os dados e calcula o índice. Base de cálculo: público-alvo considerado para definir o índice. Utilização geral: principais usos do índice, exceto em operações financeiras pós-fixadas. Uso no mercado financeiro: grau de utilização em operações financeiras, podendo haver exceções (ex.: inexistente = praticamente inexistente). SM: salário mínimo. O número de salários mínimos (usados como referência em índices de preços ao consumidor) é o da época em que foi realizada a POF (pesquisa de orçamento familiar). Como o salário mínimo aumentou mais que a inflação, o número de salários mínimos de referência é (supostamente) menor ao informado.

indexador	instituição	base de cálculo	utilização geral	uso no mercado financeiro
<b>IPCA</b> (Índice de Preços ao Consumidor Ampliado)	IBGE	famílias com renda 1 a 40 SM, nas capitais de BA, CE, DF, ES, GO, MG, MS, PA, PE, PR, RJ, RS e SP	o mais importante e utilizado índice de inflação no Brasil, preferido pelo governo federal como índice de inflação em contratos e títulos pós-fixados	um dos mais utilizados

indexador	instituição	base de cálculo	utilização geral	uso no mercado financeiro
<b>INPC</b> (Índice Nacional de Preços ao Consumidor)	IBGE	famílias com renda 1 a 5 SM, nas capitais de BA, CE, DF, ES, GO, MG, MS, PA, PE, PR, RJ, RS e SP	semelhante ao IPCA e mais antigo, é menos usado	inexistente
<b>IPC-Fipe</b> (Índice de Preços ao Consumidor da Fipe)	Fipe (USP)	famílias com renda 1 a 10 SM, na capital de SP	preferido pelo governo do Estado de São Paulo como índice de inflação	inexistente
<b>IPC-GV</b> (Índice de Preços ao Consumidor da FGV)	FGV-Rio	famílias com renda 1 a 33 SM, nas capitais de BA, DF, MG, PE, RJ, RS e SP	componente do IGP-DI e derivados	inexistente
<b>IPC-Dieese</b> (Índice de Preços ao Consumidor do Dieese)	Dieese	capital de SP	pleitos de sindicatos laborais	inexistente
<b>IPA</b> (Índice de Preços ao Produtos Amplo)	FGV-Rio	preços de venda de produtores agrícolas e industriais no atacado	componente do IGP-DI e derivados	inexistente
<b>INCC</b> (Índice Nacional de Custo da Construção)	FGV-Rio	custos de construção civil, nas capitais de BA, CE, DF, GO, MG, PA, PE, PR, RJ, RS, SC, SP	reajustes de preços no setor imobiliário; componente do IGP e derivados	inexistente
<b>IGP-DI</b> (Índice Geral de Preços – Disponibilidade Interna)	FGV-Rio	média ponderada do IPA (60%), do IPC-GV (30%) e do INCC (10%)	tem um relevante componente cambial (por conta do IPA); mais alto que o IPCA quando o real desvaloriza; alguma preferência por empresas como índice de inflação	baixo uso e declinante
<b>IGP-M</b> (Índice Geral de Preços do Mercado)	FGV-Rio	a mesma do IGP-DI, calculado entre o dia 21 anterior e o dia 20 de cada mês	semelhante ao IGP-DI	baixo uso e declinante
<b>IGP-10</b> (Índice Geral de Preços - 10)	FGV-Rio	a mesma do IGP-DI, calculado entre o dia 11 anterior e o dia 10 de cada mês	semelhante ao IGP-DI	inexistente

## Utilização e Cálculo

As operações indexadas com inflação são de médio e longo prazo (geralmente)

- O principal título público é a NTN-B (Nota do Tesouro Nacional, série B), indexada pelo IPCA, com amortização integralmente ao final (bullet) e que paga juros semestralmente. A variante NTN-B Principal, paga os juros também ao final.
- Debêntures são comumente indexadas pelo IGP ou pelo IPCA.

As operações que cobram inflação mais uma taxa real seguem (geralmente) o sistema de indexação do principal, de acordo com as equações:

$$SD_n = SD_{n-1}(1 + i_{infl}) - A_n$$

$$J_n = SD_{n-1}(1 + i_{infl}) \cdot i_{real}$$

Onde  $SD_n$  é o saldo devedor,  $A_n$  é a amortização,  $J_n$  são os juros,  $i_{infl}$  é a taxa de inflação e  $i_{real}$  é a taxa de juros reais. O método de cálculo não é diferente do exemplo do **Objeto 83**.

O uso desse sistema de indexação é natural: a operação é explicada (em geral) como pagando o principal corrigido, ou seja, devolvendo todo o dinheiro emprestado com uma correção que garanta a perpetuação do poder de compra desse dinheiro. É como se o efeito da inflação fosse eliminado.

O exemplo do **Objeto 86** mostra uma operação indexada pelo IPCA com carência e amortizações iguais subsequentes.

**Objeto 86. Empréstimo corrigido pelo IPCA.** A taxa real é aplicada sobre o saldo atualizado da dívida. Indexador: definido no contrato da dívida e variável em razão da conjuntura econômica. Taxa real: definida no contrato e fixa. Taxa nominal: composição não linear do indexador com taxa real. Amortização - % do saldo da dívida: parcela do saldo da dívida a ser amortizada em cada ano ( $= 1 / \text{número de parcelas remanescentes}$ ). Amortização - \$: valor da amortização no ano, calculada pela aplicação da % do saldo da dívida sobre o saldo atualizado antes da amortização. Saldo da dívida antes da amortização: saldo anterior (após a amortização), atualizado. Juros: multiplicação do saldo atualizado antes da amortização pela taxa de juros real. Pagamento: soma da amortização e dos juros.

ano	INDEXADOR			AMORTIZAÇÃO		SALDO DA DÍVIDA		juros	pagamento total
	indexador	taxa real	taxa nominal	% do saldo da dívida	\$	antes da amortização	após a amortização		
0					-20.000	20.000			-20.000
1	8,0%	5,0%	13,4%	20%	4.320	21.600	17.280	1.080	5.400
2	5,0%	5,0%	10,3%	25%	4.536	18.144	13.608	907	5.443
3	6,5%	5,0%	11,8%	33%	4.831	14.493	9.662	725	5.555
4	7,0%	5,0%	12,4%	50%	5.169	10.338	5.169	517	5.686
5	6,0%	5,0%	11,3%	100%	5.479	5.479	0	274	5.753
soma, média			12,0%		4.335			3.503	7.838

## OPERAÇÕES INDEXADAS COM TAXAS DE JUROS

### Principais Taxas de Juros usadas como Indexadores

Em muitas operações, o indexador é uma taxa de juros (como DI, TJLP ou TR) e não de inflação (como IPCA ou IGP). Taxas de juros usadas como indexador não são um substituto da inflação, mas às vezes são usadas como se o fossem. A tabela do **Objeto 87** traz as principais taxas de juros em uso no Brasil.

**Objeto 87. Principais taxas de juros que agem como indexadores.** Indexador: sigla e nome. Instituição: instituto de pesquisa que levanta os dados e calcula o índice. Base de cálculo: forma como o indexador é determinado. Principal utilização: principais usos do índice. Uso no mercado financeiro: grau de utilização em operações financeiras, podendo haver exceções (ex.: inexistente = praticamente inexistente).

indexador	instituição	base de cálculo	principal utilização	uso no mercado financeiro
DI (depósitos interbancários)	Cetip	média da taxa de juros nos empréstimos entre instituições financeiras	empréstimos entre instituições financeiras; captação de instituições financeiras (CDBs e semelhantes); empréstimos e financiamentos de instituições financeiras	um dos mais utilizados
taxa Selic (taxa do Sistema Especial de Liquidação e de Custódia)	Banco Central do Brasil	média da taxa de juros nas operações compromissadas com títulos federais	referência para o DI	inexistente
Selic meta	Copom (Comitê de Política Monetária do Banco Central do Brasil)	definida como componente da política monetária	referência para a taxa Selic	inexistente
TJLP (taxa de juros de longo prazo)	BNDES	meta de inflação para os próximos 12 meses, mais um prêmio	empréstimos e financiamentos do BNDES; empréstimos e financiamentos de bancos, quando repassam recursos do BNDES (repasses)	financiamento do BNDES
TR (taxa referencial)	Banco Central do Brasil	taxa prefixada média dos 30 maiores bancos, aplicado um redutor	caderneta de poupança e financiamento imobiliário	financiamento imobiliário

As operações indexadas com uma taxa de juros seguem (geralmente) o sistema de indexação dos juros (frase esquisitinha, mas não encontrei uma que combinasse estética com clareza).

## Operações Indexadas com DI

A taxa média dos depósitos interbancários – DI (ou dos Certificados de Depósito Interbancário – CDI) é um dos indexadores mais importantes do mercado financeiro brasileiro. Dentre outros, são (tipicamente) indexados pelo DI:

- Títulos emitidos por instituições financeiras, como o CDB (Certificado de Depósito Bancário) a LCI (Letra de Crédito Imobiliário) e a LCA (Letra de Crédito do Agronegócio).
- Empréstimos bancários, especialmente para grandes e médias empresas.
- Debêntures e commercial papers (NPs), que também utilizam frequentemente outros indexadores.

O DI é uma taxa nominal, que têm a inflação embutida. Coerentemente, essas operações seguem (quase sempre) o sistema de indexação de juros, em que o principal não recebe correção e é aplicada uma taxa nominal. Essa taxa nominal é baseada no DI, podendo ser maior ou menor, de duas variantes:

- DI mais uma taxa adicional. A taxa nominal é calculada pela acumulação, segundo a formulação dos juros compostos, entre a taxa do DI e uma taxa adicional fixa.
- Uma porcentagem do DI. Essa porcentagem pode ser maior ou menor que 100%.

Pelo fato de a taxa DI usar um ano de 252 d.u., as operações indexadas nele utilizam (tipicamente) a mesma base temporal.

O **Objeto 88** mostra como os cálculos são feitos nas duas variantes. Ambos os exemplos são construídos com os mesmos dados básicos (taxa do DI, prazo, sistema de amortização) e com adicional e porcentagem do DI que levam a taxas efetivas semelhantes.

**Objeto 88. Exemplos de operações indexadas com DI.** Exemplos de operações com DI + um adicional e de % do DI. Sistema de indexação de juros. DI: taxa do DI, variável no tempo. Principal: entrada e pagamento do principal da operação. Saldo da dívida: principal acumulados. Juros: saldo da dívida multiplicado pela taxa de juros nominal. Total: amortização mais juros. Painel A: taxa nominal = DI + taxa adicional. Painel B: taxa nominal = DI x % DI.

A. DI + um adicional							
ano	INDEXADOR			PAGAMENTOS			
	DI adicional	taxa nominal		principal	saldo da dívida	juros	total
0				-100.000	100.000		-100.000
1	11,0%	3,0%	14,3%	0	100.000	14.330	14.330
2	10,5%	3,0%	13,8%	0	100.000	13.815	13.815
3	11,3%	3,0%	14,6%	0	100.000	14.639	14.639
4	9,8%	3,0%	13,1%	0	100.000	13.094	13.094
5	10,2%	3,0%	13,5%	100.000	0	13.506	113.506
soma, média		13,9%		0		69.384	69.384

A. porcentagem do DI							
ano	INDEXADOR			PAGAMENTOS			
	DI	% DI	taxa nominal	principal	saldo da dívida	juros	total
0				-100.000	100.000		-100.000
1	11,0%	130,0%	14,3%	0	100.000	14.300	14.300
2	10,5%	130,0%	13,7%	0	100.000	13.650	13.650
3	11,3%	130,0%	14,7%	0	100.000	14.690	14.690
4	9,8%	130,0%	12,7%	0	100.000	12.740	12.740
5	10,2%	130,0%	13,3%	100.000	0	13.260	113.260
soma, média			13,8%	0		68.640	68.640

Em operações de crédito (e assemelhadas, como debêntures) é necessário cobrar um adicional para manter a estrutura operacional do emprestador, para cobrir a sua perda esperada com a insolvência dos devedores e para dar-lhe um modesto (nem sempre tão modesto) lucro. Nesse caso, quando a opção é pela cobrança de uma porcentagem do DI, essa porcentagem é maior que 100%.

Em operações de depósito bancário (ou outras em que o devedor e pagador de juros é uma instituição financeira) a relação se inverte. Nesse caso, é paga uma porcentagem do DI menor que 100%. Com essa diferença é que são cobertos os custos operacionais do banco e o seu lucro. Instituições financeiras (bancos e outras) de menor porte podem pagar mais do que 100% do DI, que recuperam em operações de crédito (e outras) mais caras.

### Operações Indexadas com a TJLP

A TJLP (Taxa de Juros de Longo Prazo) é utilizada desde 1994 pelo BNDES (e pelos bancos, nos repasses do BNDES) como indexador de uma série de financiamentos de longo prazo e baixa taxa de juros. Ela é constituída pela inflação projetada mais um prêmio de risco.

As operações com a TJLP seguem um sistema de indexação híbrido, com a parte da TJLP até os 6% a.a. paga periodicamente e o restante da TJLP capitalizada. As equações são (BNDES, 2013?):

- É calculada uma variável denominada fator de capitalização ( $F_C$ ) pela parte da TJLP que exceder os 6% a.a. (se houver), considerado o prazo ( $n$ ) em dias corridos (o ano é de 360 d.c.):

$$F_C = \max \left\{ \left( \frac{1 + TJLP}{1 + 6\%} \right)^{n/360}, 1 \right\}$$



- O novo saldo devedor (a ser amortizado) é o anterior ( $SD_t$ ) multiplicado pelo fator de capitalização:

$$SD_{t+1} = SD_t \cdot F_C$$

- A taxa de juros paga ( $j_p$ ) é a TJLP até os 6% a.a. mais um spread que remunera o BNDES e bancos intermediadores:

$$j_p = spread + \min\{TJLP, 6\%\}$$

- Os juros são calculados sobre o saldo devedor (antes da amortização) multiplicado pelo fator de capitalização:

$$Juros = SD_t \cdot F_C \cdot \left( (1 + j_p)^{n/360} - 1 \right)$$

Quase sempre, um financiamento do BNDES tem um período de carência de principal, segue o sistema de amortizações constantes e tanto a amortização como os juros são pagos mensalmente. Há exceções.

Essa forma de indexação híbrida limita os juros que a empresa deve pagar em cada mês, capitalizando o restante para pagamento no futuro. Dessa forma, o devedor não é surpreendido com um súbito aumento da inflação, que elevaria a TJLP e tornaria a dívida difícil de pagar (Desafio, 585: O que acontece, em moeda real, se a inflação e a TJLP sobem muito? A solução encontrada pelo BNDES é estável sob inflação elevada?). Essa regra de indexação não traz ganhos ou perdas para o tomador ou o BNDES (Desafio, 586: Mostre que a taxa efetiva reflete a composição da TJLP e do spread, para qualquer TJLP).

O **Objeto 89** traz o exemplo de um financiamento com prazo total de 18 meses (na prática, as operações do BNDES costumam ser bem mais longas e a TJLP costuma ser muito mais estável).

**Objeto 89. Exemplos de operação indexadas pela TJLP.** Dias do mês: dias corridos no mês. TJLP: vigente no mês. Fator de capitalização: 1+ parcela da TJLP a ser adicionada ao saldo devedor. Spread: fixado no contrato. Taxa de juros pagos: spread mais parcela da TJLP paga no mês. % do saldo da dívida: inverso do número de parcelas remanescentes (SAC) ou zero se na carência). Principal: entrada de caixa (negativo) e amortização. Saldo da dívida antes da amortização: saldo anterior (após a amortização) multiplicado pelo fator de capitalização. Saldo da dívida após a amortização: saldo antes da amortização menos amortização. Juros pagos: saldo da dívida antes da amortização multiplicado pela taxa de juros pagos. Pagamento total: amortização mais juros pagos.

PRAZO		TAXA DE JUROS				AMORTIZAÇÃO		SALDO DA DÍVIDA		juros pagos	pagamento total
mês	dias no mês	TJLP (%a.a.)	fator de capitalização	spread (%a.a.)	taxa dos juros pagos	% do saldo da dívida	principal	antes da amortização	após a amortização		
0							-120.000	120.000	120.000		-120.000
1	31	7,0%	100,1%	3,0%	0,74%	0,0%	0	120.097	120.097	895	895
2	28	7,0%	100,1%	3,0%	0,67%	0,0%	0	120.185	120.185	808	808
3	31	7,0%	100,1%	3,0%	0,74%	0,0%	0	120.282	120.282	896	896
4	30	5,0%	100,0%	3,0%	0,64%	0,0%	0	120.282	120.282	774	774
5	31	5,0%	100,0%	3,0%	0,66%	0,0%	0	120.282	120.282	800	800
6	30	5,0%	100,0%	3,0%	0,64%	0,0%	0	120.282	120.282	774	774
7	31	5,0%	100,0%	3,0%	0,66%	8,3%	10.024	120.282	110.259	800	10.823
8	31	5,0%	100,0%	3,0%	0,66%	9,1%	10.024	110.259	100.235	733	10.757
9	30	5,0%	100,0%	3,0%	0,64%	10,0%	10.024	100.235	90.212	645	10.668
10	31	8,0%	100,2%	3,0%	0,74%	11,1%	10.040	90.357	80.317	673	10.713
11	30	8,0%	100,2%	3,0%	0,72%	12,5%	10.055	80.442	70.387	580	10.635
12	31	8,0%	100,2%	3,0%	0,74%	14,3%	10.071	70.500	60.429	525	10.597
13	31	9,0%	100,2%	3,0%	0,74%	16,7%	10.096	60.574	50.479	451	10.547
14	28	9,0%	100,2%	3,0%	0,67%	20,0%	10.118	50.588	40.471	340	10.458
15	31	9,0%	100,2%	3,0%	0,74%	25,0%	10.142	40.568	30.426	302	10.444
16	30	6,0%	100,0%	3,0%	0,72%	33,3%	10.142	30.426	20.284	219	10.361
17	31	6,0%	100,0%	3,0%	0,74%	50,0%	10.142	20.284	10.142	151	10.293
18	30	6,0%	100,0%	3,0%	0,72%	100,0%	10.142	10.142	0	73	10.215
soma, média		6,4%		3,0%	ief: 9,5%		1.018			10.439	11.457

## Operações Indexadas com a TR

A TR (Taxa Referencial) foi criada em 1991 e é calculada pela aplicação de um redutor a uma taxa básica financeira (TBF, que serve só para calcular a TR). A TBF é a taxa prefixada média paga pelos CDBs dos 30 maiores bancos (desde que emitam CDBs e excluídas as duas maiores e as duas menores taxas).

O redutor é arbitrado pelo Banco Central do Brasil e tem como justificativa a exclusão dos impostos e de uma taxa real. Se essa exclusão for adequadamente feita, a TR espelha a taxa de inflação implícita nos juros pagos pelo sistema financeiros nos CDBs (que não sofre interferência do governo). Em outras palavras, como a taxa nominal é a inflação mais (composto) a real (considerados os impostos), a taxa implícita de inflação nos juros nominais é a taxa nominal menos a real, excluído o efeito dos impostos. Na prática, há grandes questionamentos sobre a forma (e principalmente sobre o resultado) do arbitramento do redutor.

Por serem usados (predominantemente) para financiar os setores imobiliário e agrícola (que também recebem outros subsídios), os depósitos em caderneta de poupança não pagam imposto de renda (que, nos CDBs vai de 15% a 22,5%, dependendo do prazo de aplicação).

Os depósitos em caderneta de poupança são remunerados de duas formas, a depender da taxa Selic, sempre segundo o sistema de indexação dos juros:

- Se a meta da taxa Selic (a Selic meta) for maior que 8,5% a.a., a remuneração é:

$$(1 + TR). (1 + 0,5\%) - 1 \quad (27)$$

- Se a Selic meta for igual ou inferior a 8,5% a.a., a remuneração passa a ser:

$$(1 + TR). (1 + 70\% \text{ Selic meta}) - 1 \quad (28)$$

Desta forma, a remuneração da caderneta de poupança não excede a dos CDBs e evita-se o desequilíbrio que causaria uma corrida de grandes investidores para a poupança quando (e se) a taxa meta da Selic finalmente descer a níveis razoáveis.

O contingenciamento em relação à Selic não era válido antigamente, portanto para os depósitos antigos (anteriores a 3mai12), apenas a equação (27) é usada (Desafio, 587: Mostre o desequilíbrio entre a remuneração da poupança e do CDB na regra antiga se a Selic meta for de 3% a.a.; não esqueça que a poupança é isenta de IR).

O principal uso dos recursos da caderneta de poupança é o financiamento à construção imobiliária e à compra de imóveis. Ao contrário do que é feito no caso dos depósitos em caderneta de poupança, as operações de financiamento imobiliário utilizam o sistema de indexação do principal. São operações de longo prazo (tipicamente de 15 a 25 anos), com pagamentos mensais segundo o SAC ou o SPC (Price). A tabela de amortização e juros segue a do **Objeto 84**.

## LFT

Há um caso (pelo menos) de ativo financeiro (passivo, se olhado do lado do governo) que paga o seu próprio indexador e mais nada. É a LFT (Letra Financeira do Tesouro), cujo valor foi fixado no passado (R\$ 1.000,00 em 1jul00) e que valoriza diariamente de acordo com a taxa Selic.

O cálculo da rentabilidade da LFT (STN, 2013?) é:

$$i_{\text{anual}} = \left( \frac{\text{Preço de Venda}}{\text{Preço de Compra}} \right)^{252/n} = i_{\text{Selic}}$$

O prazo (n) é dado em dias úteis e o ano é contado com 252 d.u.. O preço da LFT valoriza de acordo com a taxa Selic entre o dias da compra e da venda do título, portanto a taxa efetiva da LFT é a mesma da Selic (pode haver pequenos ágios e deságios que a tornam ligeiramente diferente). Como a taxa Selic é levantada diretamente do mercado financeiro, que não têm interferência operacional do governo, essa taxa é considerada confiável e equivalente á do mercado privado.







## OPERAÇÕES EM MOEDA ESTRANGEIRA

### Moedas Estrangeiras Utilizadas

As operações em moeda estrangeira são indexadas (tem quem argumente que a moeda estrangeira não é exatamente uma forma de indexação) na variação da taxa de câmbio (o preço) daquela moeda. Esta operação é usada (quase sempre) em empréstimos com recursos que vêm de outros países.

Para ser usada em empréstimos externos, a moeda deve ser forte (baixa inflação e baixo risco) e ser aceita em outros países. O **Objeto 90** apresenta as moedas mais usadas em títulos financeiros. No Brasil, por uma questão histórica (como de resto na América Latina), a moeda estrangeira predominante é o dólar americano.

**Objeto 90. Principais moedas em ativos financeiros.** Saldo de ativos financeiros emitidos em dez13, em bilhões de USD. Sigla: código da moeda na ISO 4217. País e nome da moeda: bandeira do país emissor e nome por extenso da moeda. Total: soma dos saldos na moeda. Comm. paper: comercial papers. Outros: demais ativos de curto prazo. Pré: bonds e notas prefixados. Pós: bonds e notas pós-fixados (flutuante). Equity: ativos financeiros relacionados a ações (mas que não são ações). Fonte: (BIS, 2014). Valores em bilhões de dólares americanos (de dez13).

MOEDA		TOTAL		MONEY MARKET		BONDS E NOTAS		
sigla	país e nome da moeda	\$	%	comm. papers	outros	pré	pós	equity
EUR	 euro	10.225,2	45%	161,9	152,4	6.577,1	3.250,3	83,5
USD	 dólar americano	8.174,8	36%	192,8	134,6	6.079,9	1.564,9	202,6
GBP	 libra esterlina	2.241,0	10%	104,9	56,9	1.242,1	829,7	7,4
JPY	 yen	498,9	2%	1,5	11,3	364,8	89,8	31,5
CHF	 franco suíço	365,0	2%	4,5	3,5	332,3	23,4	1,3
CAD	 dólar canadense	261,8	1%	0,8	0,1	210,0	37,6	13,3
todas as demais moedas		1.027,0	5%	19,0	26,7	739,9	205,1	36,3
TOTAL		22.793,7	100%	485,4	385,5	15.546,1	6.000,8	375,9
%		100%		2%	2%	68%	26%	2%

### Operações com Taxa Fixa

A forma mais simples de empréstimo em moeda estrangeira é com uma taxa fixa (fixed rate):

- O saldo devedor é atualizado pela variação da moeda estrangeira em que a dívida é denominada (USD, EUR, GBP, etc.). A variação cambial pode ser negativa (a moeda estrangeira cai em relação ao BRL), caso em que o saldo devedor diminui.
- Os juros são calculados pela aplicação da taxa fixa contratada ao saldo devedor atualizado pela variação cambial, antes de qualquer amortização desse saldo.
- A amortização (quando há) também ocorre com base no saldo atualizado.

A taxa de juros é expressa em termos anuais, calculada com base nos dias corridos de cada período e um ano de 360 dias (conhecida como  $\text{actual}/360$ ), exceto quando a moeda é GBP (ou

CAN, ou AUD) que usa um ano de 365 dias (actual/365). Os juros são pagos (geralmente) trimestral ou semestralmente.

Os empréstimos em moeda estrangeira usam (geralmente) a formulação dos juros simples (por uma questão de tradição e porque, a taxas baixas, não faz tanta diferença). Embora aparentemente simples, os juros se tornam efetivos na periodicidade de seu pagamento. Um exemplo. Se os juros são pagos trimestralmente, a taxa trimestral é  $\frac{1}{4}$  da anual (aproximadamente, devido ao número de dias não ser igual em todos os trimestres). Após serem pagos, os juros serão utilizados segundo o interesse e gosto do credor (que os recebeu), possivelmente reinvestidos em operação semelhante a taxa semelhante. Isso faz com que a taxa efetiva da operação seja (para trimestres inteiros) a taxa trimestral nominal (anual dividida por 4). Portanto, apesar de incluir cálculos com juros simples, a operação é de juros compostos. Em períodos fracionários (menores que um trimestre), a taxa continua sendo de juros simples.

Um empréstimo em moeda estrangeira a taxa fixa é um caso de indexação do principal (pela variação cambial). Um exemplo é mostrado no **Objeto 91**. A despesa total de cada trimestre (lançada no resultado) é a soma da variação cambial e dos juros. O fluxo de caixa total são os juros (pagos) mais o principal (tanto a entrada de caixa como a amortização). A variação cambial é despesa, mas não é (diretamente) fluxo de caixa, pois é paga como parte da amortização.

**Objeto 91. Exemplo de flat rate.** Prazo: em trimestres, em dias corridos (inclusive acumulados) e em dias úteis (inclusive acumulados). Variação cambial no período (o período pode ser menor a um mês). Taxa de juros fixa (em % a.a.). Principal, devolvido integralmente ao final. Saldo da dívida antes da amortização: saldo anterior (após a amortização) adicionado da variação cambial. Saldo da dívida após a amortização: saldo antes da amortização menos amortização. Variação cambial: saldo da dívida anterior (após a amortização) multiplicado pela variação cambial (em % no período). Juros pagos: saldo da dívida (antes da amortização) multiplicado pela taxa de juros e pela divisão do número de dias corridos por 360. Pagamento total: amortização mais juros pagos.

PRAZO					variação cambial	taxa de juros	principal	SALDO DA DÍVIDA		DESPESAS			pagamento total
trimestre	dias corridos		dias úteis					antes da amortização	após a amortização	variação cambial	juros pagos	despesa total	
0		0		0			-100.000	100.000	100.000				-100.000
1	90	90	62	62	-3,48%	5,00%	0	96.519	96.519	-3.481	1.206	-2.274	1.206
2	91	181	63	125	6,21%	5,00%	0	102.511	102.511	5.992	1.296	7.288	1.296
3	92	273	64	189	5,73%	5,00%	0	108.385	108.385	5.874	1.385	7.259	1.385
4	92	365	64	253	-0,20%	5,00%	0	108.173	108.173	-212	1.382	1.170	1.382
5	90	455	62	315	0,97%	5,00%	0	109.221	109.221	1.049	1.365	2.414	1.365
6	91	546	63	378	-0,88%	5,00%	0	108.260	108.260	-961	1.368	407	1.368
7	92	638	64	442	-1,77%	5,00%	0	106.340	106.340	-1.920	1.359	-561	1.359
8	92	730	64	506	2,69%	5,00%	0	109.203	109.203	2.863	1.395	4.258	1.395
9	90	820	62	568	2,07%	5,00%	0	111.458	111.458	2.255	1.393	3.648	1.393
10	91	911	63	631	3,37%	5,00%	0	115.217	115.217	3.759	1.456	5.215	1.456
11	58	969	40	671	1,26%	5,00%	116.663	116.663	0	1.446	940	2.386	117.603
soma, média					1,49%	5,00%	16.663			16.663	14.546	31.209	31.209

A taxa efetiva dessa operação pode ser calculada de duas formas precisas e duas imprecisas (porém de resultado próximo):

- Com base nos dias corridos acumulados (por isso estão na tabela) de cada trimestre (considerando um ano de 365 dias). A função do excel que faz essa conta é XTIR (que já considera um ano de 365 dias como padrão). No exemplo, a taxa efetiva para um ano de 365 dias corridos é de 11,41% a.a.

- Com base nos dias úteis acumulados de cada trimestre (contados em um calendário). Se for usada a função XTIR do excel, o resultado deve ser ajustado de 365. A taxa resultante deve ser ajustada de 365 para 252 dias. Essa taxa é comparável com as taxas over do mercado. O resultado do exemplo, para um ano de 252 dias úteis é de 11,38% a.a. (Desafio, 588: Como deveria ser o calendário para essa taxa ser idêntica à calculada com os dias corridos acumulados?).
- Com base nos trimestres cheios (cada trimestre conta 1, independentemente do número de dias que tenha). Nesse caso, a função do excel é a TIR e o resultado no exemplo é de 11,02% a.a. (Desafio, 589: Como deveriam ser o prazo do empréstimo e o calendário para essa taxa ser idêntica à calculada com os dias úteis acumulados?). Esta forma de cálculo é bastante imprecisa, mas o maior problema é a do último trimestre, que é fracionário.
- Com base nas taxas. A taxa efetiva resultante compõe (na formulação dos juros compostos) a taxa de variação cambial média (1,49% a.trim.), que deve ser anualizada, com a taxa de juros (que já é anual). O resultado no exemplo é de 11,42% a.a.. Esta forma é muito usada por ser rápida e relativamente precisa. No exemplo, foi usada uma taxa média de variação cambial estimada por uma média linear das variações de cada trimestre, ponderadas pelo saldo da dívida (antes da amortização) de cada trimestre. (Desafio, 590: Que modificações deveriam ser feitas para essa taxa ser idêntica à calculada com os dias úteis acumulados? Vale a pena tanto malabarismo para chegar a um resultado que pode ser obtido de forma mais simples apenas com os dias acumulados?).

### Operações com Taxa Flutuante

Uma forma muito comum de operação com moeda estrangeira é com uma taxa flutuante (floating rate) mais uma taxa fixa (spread). As principais taxas flutuantes são:

- Libor (London Interbank Offered Rate), calculada para o Mercado de Londres pela Thomson Reuters, a serviço da BBA (British Bankers' Association). A Libor é a taxa flutuante mais utilizada em operações com moeda estrangeira e é calculada para operações em cinco moedas (USD, EUR, CHF, GBP, JPY).
- Euribor (Euro Interbank Offered Rate), calculada para o mercado da Zona do Euro pela Federação Bancária da União Europeia (apenas em EUR).
- US Prime Rate, calculada para o mercado dos EUA pelo Wall Street Journal (apenas em USD).

A sistemática de cálculo é (o texto desta descrição é mantido sempre que possível exatamente igual ao da taxa fixa, para facilitar comparações):

- O saldo devedor é atualizado pela variação da moeda estrangeira em que a dívida é denominada (USD, EUR, GBP, etc.). A variação cambial pode ser negativa (a moeda estrangeira cai em relação ao BRL), caso em que o saldo devedor diminui.

- Os juros são calculados pela aplicação da taxa flutuante (Libor, Euribor, Prime Rate, etc.) mais o spread contratado ao saldo devedor atualizado pela variação cambial, antes de qualquer amortização desse saldo. A taxa flutuante e o spread são simplesmente somados.
- A amortização (quando há) também ocorre com base no saldo atualizado.

Os juros (taxa flutuante mais spread) são pagos com periodicidade anual, semestral, trimestral, bimestral, mensal, semanal ou diária (os mais comuns em empréstimos em moeda estrangeira no Brasil são os períodos semestrais ou trimestrais, sendo os demais raros). A taxa (flutuante mais spread) é calculada como juros simples, mas se torna efetiva na periodicidade de seu pagamento (mas continua simples no período fracionário) (Desafio, 591: mostre que esta última afirmação é verdadeira). Maiores detalhes sobre cálculos com a Libor podem ser encontrados em Treasury and Finance Info (2014?).

O exemplo do **Objeto 92** traz os cálculos de uma operação em moeda estrangeira (USD) com taxa flutuante (Libor). Para facilitar comparações, foram usados o mesmo calendário e a mesma variação cambial do **Objeto 91**. A soma da Libor média e do spread também é igual.

**Objeto 92. Exemplo de floating rate.** Prazo: em trimestres, em dias corridos (inclusive acumulados) e em dias úteis (inclusive acumulados). Variação cambial no período (o período pode ser menor a um mês). Taxa de juros: LIBOR mais taxa fixa (ambos em % a.a.). Principal, devolvido integralmente ao final. Saldo da dívida antes da amortização: saldo anterior (após a amortização) adicionado da variação cambial. Saldo da dívida após a amortização: saldo antes da amortização menos amortização. Variação cambial: saldo da dívida anterior (após a amortização) multiplicado pela variação cambial (em % no período). Juros pagos: saldo da dívida (antes da amortização) multiplicado pela taxa de juros e pela divisão do número de dias corridos por 360. Despesa total: variação cambial mais juros pagos. Pagamento total: amortização mais juros pagos.



trimestre	PRAZO			variação cambial	JUROS			principal	SALDO DA DÍVIDA		DESPESAS			pagamento total
	dias corridos	dias úteis			LIBOR	spread			antes da amortização	após a amortização	variação cambial	juros pagos	despesa total	
0		0	0					-100.000	100.000	100.000				-100.000
1	90	90	62	62	-3,48%	2,03%	3,00%	0	96.519	96.519	-3.481	1.214	-2.266	1.214
2	91	181	63	125	6,21%	2,00%	3,00%	0	102.511	102.511	5.992	1.296	7.288	1.296
3	92	273	64	189	5,73%	1,99%	3,00%	0	108.385	108.385	5.874	1.381	7.255	1.381
4	92	365	64	253	-0,20%	2,05%	3,00%	0	108.173	108.173	-212	1.396	1.183	1.396
5	90	455	62	315	0,97%	1,94%	3,00%	0	109.221	109.221	1.049	1.348	2.397	1.348
6	91	546	63	378	-0,88%	2,02%	3,00%	0	108.260	108.260	-961	1.373	412	1.373
7	92	638	64	442	-1,77%	2,04%	3,00%	0	106.340	106.340	-1.920	1.370	-550	1.370
8	92	730	64	506	2,69%	1,99%	3,00%	0	109.203	109.203	2.863	1.393	4.256	1.393
9	90	820	62	568	2,07%	1,99%	3,00%	0	111.458	111.458	2.255	1.390	3.646	1.390
10	91	911	63	631	3,37%	1,99%	3,00%	0	115.217	115.217	3.759	1.454	5.212	1.454
11	58	969	40	671	1,26%	1,95%	3,00%	116.663	116.663	0	1.446	931	2.377	117.593
soma, média					1,49%	2,00%	3,00%	16.663			16.663	14.546	31.209	31.209

As taxas efetivas são as mesmas (até a segunda casa decimal) do exemplo com taxa fixa: 11,41% a.a. com dias corridos e 11,38% a.a. com dias úteis. As taxas baseadas em trimestres cheios e na composição das taxas médias também são as mesmas.

## ATIVIDADES

Os exercícios são aplicações diretas (mais matemática simples do que finanças) das técnicas apresentadas no capítulo (podem ser usados conceitos de capítulos anteriores). Os problemas já têm enunciados com algum contexto e, em algumas situações, um pouco de dificuldade. Os

casos reais trazem situações de aplicação colhidos (e simplificadas) da realidade e são escritos de modo a trazer uma forte impressão do contexto em que ocorreram e permitir fazer os cálculos necessários. Alguns casos podem ser difíceis.

Os exercícios, problemas e casos resolvidos (em planilha) estão assinalados com . Nem sempre os exercícios, problemas e casos exigem cálculos, podendo se resumir a aplicações dos conceitos desenvolvidos no capítulo. Em todas as atividades utilize juros compostos, exceto se houver informação em contrário. Algumas atividades podem ser longas (por envolverem muitos períodos), mas são repetitivas (as equações em cada período são as mesmas). Alguns exercícios e problema são continuação de anteriores, caso em que são assinalados com . Os exercícios, problemas e casos podem trazer (e frequentemente trazem) elementos de capítulos anteriores, que são considerados conhecidos.

## Exercícios

Nos exercícios a seguir calcule a tabela de amortização e juros. Calcule a taxa efetiva da operação.

exercício	592.	593.	594.
principal (BRL mil)	100.000	4.000	2.000.000
taxa de juros	IPCA + 12% a.a.	INPC + 14% a.a.	IGP-M + 7% a.a.
indexador	IPCA = 7% a.a.	INPC = 5,5% a.a.	IGP-M = 6,5% a.a.
prazo	2 anos	3 anos	4 anos
pagamento dos juros	mensal	mensal	bimestral
carência de principal	não há	6 meses	12 meses
sistema de amortização	ao final	amortizações constantes	pagamentos constantes

Nos exercícios a seguir calcule a tabela de amortização e juros. Calcule a taxa efetiva da operação.

exercício	595.	596.	597.
principal (BRL mil)	100	1.000	30.000
taxa de juros	120% do DI	DI + 3% a.a.	DI + 1% a.a.
indexador	DI = 25% a.a.	DI = 7,0% a.a.	DI = 12,5% a.a.
prazo	124 d.u. (6 meses)	252 d.u. (1 ano)	60 d.u. (3 meses)
pagamento	mensal	ao final	mensal



<b>exercício</b>	<b>595.</b>	<b>596.</b>	<b>597.</b>
dos juros			
carência de principal	não há	não há	não há
sistema de amortização	ao final	ao final	amortizações constantes

Nos exercícios a seguir calcule a tabela de amortização e juros. Calcule a taxa efetiva da operação.

<b>exercício</b>	<b>598.</b>	<b>599.</b>	<b>600.</b>
principal (BRL mil)	140.000	90.000	120
taxa de juros	TJLP + 4,2% a.a.	TJLP + 3,8% a.a.	TJLP + 9,4% a.a.
indexador	TJLP = 5,0% a.a.	TJLP = 9,0% a.a.	TJLP = 6,5% a.a.
prazo	4 anos	5 anos	3 anos
pagamento dos juros	trimestral	trimestral	trimestral
carência de principal	1 ano	1 ano	6 meses
sistema de amortização	amortizações constantes	amortizações constantes	amortizações constantes

Nos exercícios a seguir calcule a tabela de amortização e juros. Calcule a taxa efetiva da operação.

<b>exercício</b>	<b>601.</b>	<b>602.</b>	<b>603.</b>
principal (BRL mil)	2.100	300	8.400
taxa de juros	TR + 11,5% a.a.	TR + 14,0% a.a.	TR + 6,5% a.a.
indexador	TR = 1,4% a.a.	TR = 3,8% a.a.	TR = 0,3% a.a.
prazo	15 anos	25 anos	10 anos
pagamento dos juros	mensal	mensal	mensal
carência de principal	não há	não há	não há
sistema de amortização	pagamentos constantes	pagamentos constantes	pagamentos constantes

exercício	601.	602.	603.
		tantes	

Nos exercícios a seguir calcule a tabela de amortização e juros. Calcule a taxa efetiva da operação.

exercício	604.	605.	606.
principal (BRL mil)	90.000	25.000	175.000
taxa de juros	USD + 7,0% a.a.	USD + Libor + 3,5% a.a.	EUR + Euribor + 2,4% a.a.
indexador	USD = 4,0% a.a.	USD = 4,0% a.a. Libor = 3,6% a.a.	EUR = 2,2% a.a. Euribor = 2,0% a.a.
prazo	4 anos	9 meses	6 anos
paga-mento dos juros	trimestral	trimes-tral	trimestral
carência de prin-cipal	não há	não há	12 meses
sistema de amor-tização	amortiza-ções cons-tantes	amorti-za-ções cons-tantes	amortiza-ções cons-tantes

## Problemas

Nos exercícios seguintes considere uma inflação (IPCA) projetada em 8% a.a., uma variação cambial projetada em 10% a.a., uma Libor projetada em 3,6% a.a., um DI projetado em 12% a.a. e uma TJLP projetada em 6% a.a.. Em cada um deles, calcule a tabela de amortização e juros e a taxa efetiva da operação, tanto nominal como real.

607. Um financiamento de \$40.000.000 a IPCA mais 3% a.a., sem carência e amortizado em 5 pagamento anuais iguais.

608. Um empréstimo de \$15.000.000 a IPCA mais 1,5% a.a., sem carência e com 6 pagamento semestrais iguais.

609. O mesmo empréstimo anterior, mais reciprocidades: (1) um seguro de \$300.000 anuais, necessário e a preço adequado; (2) a transferência da folha de pagamento, que deve gerar um desconforto nos empregados valorado (por estimativa qualitativa) em \$100.000 anuais.

610. Um financiamento imobiliário no valor de \$2 milhões, por 20 anos, com pagamentos mensais pelo SAC, que custa TR mais 11% a.a.

611. Um financiamento imobiliário de \$400.000, custando TR mais 8,5% a.a., com prazo de 18 anos, com pagamentos mensais pelo SAC.

612. Um financiamento direto com o BNDES, de \$200.000.000, a TJLP mais 3,5% a.a., com 2 anos de carência de principal mais 3 anos de amortização, com pagamentos de juros e amortizações (SAC) trimestrais.

613. O mesmo financiamento anterior, com TJLP projetada em 7% a.a..

614. Um financiamento com recursos do BNDES, intermediado por um banco comercial, a TJLP mais 6% a.a., de \$3.500.000, com 1 ano de carência de principal mais 3 anos de amortizações trimestrais iguais.

615. A mesma operação anterior com a exigência de contratar a elaboração do projeto de financiamento no banco, ao custo de \$200.000, dos quais apenas \$50.000 são considerados necessários.

616. Um empréstimo em euros (EUR) mais 9% a.a., com 8 pagamentos semestrais (4 anos), sem carência, com amortizações constantes (em EUR).

617. Um empréstimo de 80 milhões de libras esterlinas (GBP) com uma carência de 1,5 anos mais 4,5 de amortização, sendo as amortizações constantes, à taxa Libor mais 4% a.a., com pagamentos trimestrais.

618. A mesma operação anterior, com o pagamento inicial de comissões de 1% do valor emprestado.

619. Um empréstimo de \$1.000.000, que paga juros anuais de DI mais 4% a.a., é amortizado em 6 parcelas anuais iguais sem carência. A taxa DI é projetada em 12% a.a.

620. Um empréstimo de \$1.000.000, em moeda estrangeira (USD), que paga juros anuais de Libor mais 3% a.a., é amortizado em 3 parcelas anuais iguais sem carência. A Libor é projetada em 2% a.a. e a variação cambial (do USD) em 20% no primeiro ano e em 0% após isso.

621. Uma empresa tomou um empréstimo de \$400 milhões de USD, com juros de 3% a.a. mais Libor pagos anualmente, com 2 anos de carência de principal mais amortização em 5 parcelas anuais iguais. A variação do USD é projetada em 7% a.a. e a Libor em mais 2% a.a.. Monte a tabela de amortização e juros.

622.  Qual a taxa efetiva (anual) do empréstimo?

623.  Essa taxa é nominal ou real?

### **Caso: limite de garantia do FGC**

*Aplicação a DI. Decisão de investimento. Instabilidade da taxa de juros.*



Às vezes, algum banco quebra (sofre liquidação extrajudicial pelo Banco Central do Brasil, o Bacen), o que pode trazer (grande) insegurança para o mercado financeiro. Um dos mecanismos para apaziguar os depositantes das instituições financeiras (bancos, financeiras e outras) é dar-lhes uma garantia de que (se o banco quebrar) vão receber o dinheiro depositado. O FGC garante depósitos de até BRL 250 mil (somando o total à vista, CDBs, poupança, LCIs, LCAs, ...) nas instituições financeiras associadas ao fundo. Com isso, os pequenos poupadores (que não sabem analisar a saúde de um banco) não precisam ter tantas preocupações. De tempos em tempos, há uma revisão do valor garantido pelo FGC, mas não dá para saber quando ou de quanto será a próxima. Algumas instituições financeiras pagam taxas de juros altas (risco alto) e pode valer a pena alocar um pouco de dinheiro a elas. Mas (para ter risco baixo) só até o valor garantido pelo FGC. Quem tem um valor maior para investir pode dividi-lo em várias instituições, aproveitando que a garantia é por instituição (alguns também dividem a aplicação por vários CPFs, possivelmente cítricos). A questão é que o limite garantido é (provavelmente) válido para todo o período de aplicação e, sendo o valor futuro mais alto que o presente, é esse valor futuro que deve ser garantido. O caso é o de um investidor que tem \$500 mil para investir em CDBs e está considerando 4 bancos: Banco A (que paga 120% do CDI), Banco B (109% do CDI), Banco C (108% do CDI) e Banco D (também 108% do CDI). Todos os CDBs têm o prazo de 2 anos e pagam juros somente ao final.

624. Considerando que o CDI está a 11,2% a.a., quanto terá (após 2 anos) o investidor se ele comprar \$250 mil do CDB do Banco A?

625. Se o Banco A quebrar no final de 2 anos (mas antes do resgate do CDB), de quanto será a perda (provável) do investidor?

626. Mantida a atual taxa do CDI, qual o valor máximo a investir no CDB do Banco A para afastar essa possibilidade de perda?

627. Mantida a atual taxa do CDI, como o investidor deve distribuir o seu dinheiro entre os bancos para ter a máxima rentabilidade sem correr riscos com a quebra de algum (ou todos) desses bancos?

628. As taxas do CDI mudam no tempo, podendo se tornar bem mais altas que as atuais. Em um cenário de stress (evento fortemente indesejável, conquanto improvável) a taxa do CDI alcançará os 30% a.a. (embora não dê realmente para por um teto no pior). Nesse cenário, qual o valor máximo a investir no CDB do Banco A para evitar perdas com uma possível quebra do banco?

629. Nesse cenário de stress, como o investidor deve distribuir o seu dinheiro entre os bancos para ter a máxima rentabilidade sem correr riscos com a quebra de algum (ou todos) desses bancos?

### **Caso: subsídio ou normalização pelo BNDES?**

*SAC com carência. Duration. Empréstimo a TJLP. Empréstimo a DI. Empréstimo externo com taxa fixa. Subsídio do BNDES. Decisão de financiamento de investimento.*



O BNDES é principal o banco de desenvolvimento brasileiro e atua (predominantemente) no financiamento de investimentos (imobilizado e capital de giro). A taxa de juros que cobra é (predominantemente) baseada na TJLP, que é historicamente (muito) inferior à Selic (verifique o nível atual de todas as taxas). A sua principal fonte de recursos é o Tesouro Nacional, cujo custo do dinheiro (marginal) é a Selic. Nas últimas décadas (e provavelmente nas próximas), a Selic tem sido superior às taxas básicas (reais) dos demais países (devido à atuação desastrosa de muitos governos). Financiar investimentos com base na Selic (ou CDI) seria torná-los caros em comparação com os internacionais, em muitos casos ao ponto de inviabilizar os investimentos. Nos cálculos a seguir considere uma TJLP de 5,0% a.a., um DI (considerado equivalente à Selic) de 11,3% a.a. e uma variação cambial (nominal) de 6% a.m..

630. Considere um financiamento do BNDES, com 1 ano de carência mais 4 de amortização com amortizações constantes, a TJLP mais 5,0% a.a. Qual a taxa efetiva desse financiamento?

631. Qual a duration desse investimento (utilize a taxa dos DI).

632. Considere um empréstimo bancário em moeda nacional, sem carência e com 3 anos de amortização com pagamentos constantes, a DI mais 5,0% a.a. Qual a taxa efetiva desse financiamento?

633. Qual a duration desse investimento (utilize a taxa dos DI).

634. Considere um empréstimo externo, com 1 ano de carência mais 4 de amortização com amortizações constantes, a variação cambial mais 5,0% a.a. Qual a taxa efetiva desse financiamento?

635. Qual a duration desse investimento (utilize a taxa dos DI).

636. Avalie a diferença de custos efetivos das alternativas sob o ponto de vista da empresa tomadora e do impacto sobre seus projetos de investimento.

637. Avalie a diferença de prazos de pagamento (total e duration) das alternativas sob o ponto de vista da empresa tomadora e do impacto sobre seus projetos de investimento.

638. A TJLP deve ser considerada um subsídio ou uma compensação (normalização) da elevada taxa de juros imposta pelo próprio governo?

### **Caso: carência intermediária em financiamento imobiliário**

*Financiamento imobiliário. Duration. Renegociação de dívida. Carência intermediária. Decisão de financiamento no varejo.*



Um problema que aflige muitas famílias é a perda temporária de renda, que pode ocorrer várias vezes durante um financiamento longo, como o imobiliário. A solução básica do banco é considerar o cliente insolvente (após alguns meses de avisos) e retomar o imóvel financiado. Essa solução é conflituosa e demorada, podendo resultar em perdas para o banco (e certamente para o cliente). Outra solução ado-

tada por bancos (apenas para os clientes que considera que se tornarão bons pagadores) é renegociar a dívida (mais prestações de menor valor), Essa segunda solução tem custo (pelo longo envolvimento de funcionários do banco), recuperado com sobras quando é cobrada uma tarifa de renegociação. Essa renegociação é uma alternativa traumática para a clientela (menos que ter o imóvel retomado) que pode fazê-la se afastar do crédito. Entretanto, é perfeitamente sabido que uma família passará por alguns momentos de dificuldade financeira (geralmente associados a quedas temporárias de renda, como perda de emprego ou redução de comissões) ao longo de um financiamento imobiliário. Uma alternativa é a introdução de alguns períodos de carência intermediária, acionáveis pelo tomador do empréstimo. Por exemplo, o cliente pode, a cada 3 anos, decidir que não pagará até 3 parcelas seguidas, sendo o saldo devedor automaticamente refinanciado na mesma taxa original. Tudo sem grandes complicações (é só assinar um termo), sem precisar dar (humilhantes) explicações e sem que ninguém seja chamado de caloteiro.

639. Monte a tabela de amortizações e juros de um financiamento imobiliário de \$800.000 a TR (use 2% a.a.) mais 11% a.a., a ser pago em 240 prestações mensais iguais.

640. Qual a taxa efetiva (anual 252)?

641. Qual o duration da operação (use uma taxa igual à composição entre a TR e a taxa de juros da operação).

642. Qual o saldo devedor após o 36º pagamento?

643. Quanto o cliente passa a dever se deixar de pagar as parcelas 37, 38 e 39 (à mesma taxa, sem multas)?

644. Se o cliente renegociar a dívida (na taxa original), de quanto passa a ser a prestação?

645. Monte nova tabela de amortizações e juros, considerando que a cada 36 meses, o cliente deixará de pagar 3 prestações.

646. Qual a taxa efetiva (anual 252) com as carências intermediárias?

647. Qual a duration com as carências intermediárias?

648. Qual deve ser o impacto das carências intermediárias sobre a remuneração do banco?

649. Qual deve ser o impacto das carências intermediárias sobre a duration da operação?

650. Qual deve ser o impacto das carências intermediárias sobre a facilidade de venda do crédito imobiliário?

651. Qual deve ser o impacto das carências intermediárias sobre o risco da operação para o banco?

### **Caso: Plano Real e a dança do dólar**

*Inflação. Variação cambial. Taxa de câmbio.*



Após uma década e meia de hiperinflação crônica, com várias tentativas de solução (tanto ortodoxas quanto heterodoxas, todas fracassadas, portanto péssimas para as pessoas e ótimas para aprender economia), finalmente acertaram uma dentro. A solução veio com uma combinação de medidas econômicas e jurídicas (que estão sendo discutidas nos tribunais até hoje) que incluíram uma âncora cambial (controle estrito do câmbio com liberação de importações, de forma que os preços não pudessem subir), desindexação (proibição de correção monetária automática), o controle dos gastos do governo (inclusive de Estados e Municípios, com a Lei de Responsabilidade Fiscal), restrição monetária (juros e depósitos compulsórios bancários altos, portanto menos crédito, portanto menos consumo, portanto controle da inflação), um programa de privatizações (naquela época o governo ainda mantinha empresas ineficientes do setor produtivo). O Plano Real foi editado em julho de 1994 (após meio ano de fortes preparativos) e foi um sucesso instantâneo: a inflação caiu de 47% a.m. em junho para 1,86% a.m. em agosto. O dólar americano (USD) foi fixado em 1,00 BRL (real brasileiro) em 1º jul, mas despencou imediatamente (por conta dos juros altos e da forte entrada de dinheiro para investimento), chegando a

0,84 BRL em outubro. Com o fim da inflação, vieram o otimismo, o investimento, o emprego e o influxo de capital estrangeiro (e brasileiro que estava no exterior, só esperando a tempestade passar), em um período de euforia que durou até a crise cambial iniciada em 1998 e que estourou em 1999 (logo após a eleição, como é o costume).

652. Fim da inflação? Colete as taxas de inflação (IPCA) de agosto de 1994 até a última disponível ([www.bacen.gov.br](http://www.bacen.gov.br) ⇒ economia e finanças ⇒ séries temporais ⇒ acesso ao sistema de séries temporais ⇒ sistema gerenciador de séries temporais ⇒ atividade econômica ⇒ preços ⇒ índices de preços ao consumidor ⇒ cód. 433).

653. Calcule a taxa de inflação total do real desde o início do Plano Real (julho de 1994) até hoje.

654. Calcule quanto vale \$1,00, valorizado pelo IPCA desde julho de 1994 até agora. Calcule a inflação anual média desde o início do Plano Real.

655. A inflação dos Estados Unidos (CPI – consumer price index) foi de aproximadamente 2,4% a.a. no mesmo período. Calcule quanto valeria \$1,00 se fosse aplicada a inflação do dólar desde o início do Plano Real até agora (em todos os cálculos, tome o cuidado de usar os mesmos meses).

656. Compare as duas inflações (tanto anuais médias como em todo o período). O Plano Real acabou com a inflação?

657. Divida o \$1,00 atualizado pelo IPCA pelo mesmo \$1,00 atualizado pelo CPI. Como, no primeiro dia do Plano Real 1,00 USD era igual a 1,00 BRL, essa seria a taxa de câmbio atual (BRL/USD) se aplicadas apenas as inflações dos dois países.

658. Colete o dólar comercial correspondente ao final do mês até o qual há taxas de inflação disponível ([www.bacen.gov.br](http://www.bacen.gov.br) ⇒ economia e finanças ⇒ séries temporais ⇒ acesso ao sistema de séries temporais ⇒ sistema gerenciador de séries temporais ⇒ setor externo ⇒ taxas de câmbio ⇒ taxas administradas ou livres ⇒ dólar comercial (venda)). Este é o dólar em reais efetivo hoje.

659. Compare o dólar em reais efetivo com o reajustado pela combinação IPCA/CPI. Usando exclusivamente esta informação, em relação ao equilíbrio (?!?) do início do Plano Real, o dólar está caro ou barato?

660. E em relação ao equilíbrio (?!?) de outubro de 1994?

### **Caso: a crise da dívida externa e a dança da Libor**

*Empréstimo em moeda estrangeira mais Libor. Sistema de indexação de principal x de juros. Decisão de financiamento.*



A década de 1970 foi caracterizada por um período de grande expansão de infraestrutura e industrial financiada com a emissão de títulos de dívida do governo no exterior (a poupança interna sempre foi baixa e os ciclos de investimentos precisam ser financiados parcialmente com recursos externos). As obras de infraestrutura eram (predominantemente) governamentais. Os investimentos na indústria eram tanto privados como mistos (sociedade entre o governo e um acionista privado) e fortemente financiados pelo BNDES (na época, BNDE), que recebia a maior parte de seus recursos (como hoje recebe) do Tesouro Nacional. Em 1973, os países produtores de petróleo provocaram a 1ª crise do petróleo (montaram um cartel, aumentaram os preços do petróleo, provocaram uma redução na produção dos países consumidores, que tiveram alta inflação devida ao aumento do preço do petróleo). Crise para uns, bonança para outros: os produtores se encheram de dinheiro, os petrodólares, que precisavam ser canalizados para algum lugar. O Brasil servia; e o Brasil aproveitou. Em outras palavras, o investimento necessário ao crescimento econômico foi financiado com títulos emitidos pelo governo federal no exterior, em dólar (USD), que pagavam Libor mais um spread (frequentemente de 2,0% a.a.). Esses investimentos gerariam uma receita em exportações (e substituição de importações com produtos nacionais) capaz de trazer as divisas (moeda estrangeira) necessárias para amortizar a dívida e o seu serviço (os juros). O problema veio com a 2ª crise do petróleo (segundo grande aumento, em 1979), que provocou mais inflação ainda nos EUA (e no dólar), grandes aumentos na Libor e redução na oferta de empréstimos novos. A tabela

ano	inflação nos EUA (CPI)	Libor (%a.a.)	dívida externa do Bra- sil / PIB	dívida exter- na / ex- porta- ções
-----	------------------------------	------------------	---	--

1973	6,2%	8,0%	17,7%	2,4
1978	7,6%	10,0%	25,9%	4,1
1980	13,5%	20,0%	27,0%	3,2
1984	4,3%	8,5%	53,3%	3,8
1987	3,6%	7,4%	42,9%	4,6
1994	2,6%	6,5%	33,9%	3,8
2013	1,5%	0,3%	13,8%	1,3

662. Calcule os pagamento em moeda real, utilizando a inflação do dólar (CPI) de 1978. Esse era o plano de pagamento projetado e considerado exequível quando a dívida foi contratada.

663. Monte a mesma tabela e converta-a em moeda real usando a Libor e a inflação de 1980.

664. Essa era a visão (terrível) daquele ano. Note que embutir a inflação na taxa e usar um sistema de indexação dos juros pode resultar (como resultou) em uma forte aceleração dos pagamentos da dívida. Qual o impacto esperado desse tipo de antecipação?

665. Monte a mesma tabela com a inflação (CPI) e a Libor de 1980, mas indexando o principal pela inflação (que deve ser subtraída da taxa de juros).

666. Converta os pagamentos em moeda real usando a inflação (CPI) de 1980. Essa é a solução proposta por (Kanitz, 1984) e que teria mitigado a grave crise que se seguiu, evitado a moratória da dívida externa em 1987, a crise de credibilidade e financiamento que se seguiu e a geração perdida iniciada nos anos 80. Foi ignorada.

667. Com o uso do sistema de indexação do principal pode anular (mitigar) o efeito de um súbito aumento do indexador (no caso, a inflação do dólar)?

668. Como esse fator de risco afeta empresas que tomam empréstimos com taxas de juros indexadas (em contraposição a principal indexado)?

*Empréstimo a taxa fixa. Empréstimo indexado a DI. Empréstimo indexado a inflação. Empréstimo em moeda estrangeira com taxa flutuante. Empréstimo indexado a TJLP. Duration. Impacto da variação da taxa de juros. Renegociação de dívidas.*

*Empréstimo em moeda estrangeira com taxa flutuante. Empréstimo indexado a TJLP. Duration. Impacto da variação da taxa de juros. Renegociação de dívidas.*

*Duration. Impacto da variação da taxa de juros. Renegociação de dívidas.*

Um conglomerado (grupo formado por operações de vários setores) tem dívidas contraídas em várias épocas, com vários indexadores e taxas de juros. A tabela a seguir apresenta as características de cada operação.

operação 1	A
	B
	C
	D
operação 2	E
	F
	G
operação 3	H
	I
operação 4	J

ope- ração	taxa (nominal, anual), sistema de amortização	saldo amortização	
		devedor ( '000 BRL)	[+carência] (trim.)
A	fixa 15%, bullet	4.500	24
B	fixa 14%, SAC	21.000	12
C	DI + 3%, bullet	2.000	8
D	110% do DI, bullet	3.200	10
E	IPCA + 8%, SAC	7.818	12
F	IGP + 4%, SAC	8.368	15
G	USD + 7%, SAC	12.960	18
H	GBP + Libor + 3%, SAC	3.248	16 [+4]
I	TJLP + 4%, SAC	16.912	20 [+3]
<b>TOTAL</b>		<b>80.005</b>	

Os indexadores são projetados como na tabela a seguir.

indexador	taxa projetada
DI	12,8%
IPCA	8,0%
IGP	10,0%
USD	25,0%
GBP	28,0%
Libor	1,5%
TJLP	6,0%

669. Calcule os fluxos de caixa projetados para cada uma das operações (em moeda nominal) e o da carteira de dívidas (de todos os fluxos de caixa somados).

670. Com base nesses fluxos de caixa, calcule as taxas efetivas anuais de cada operação e da carteira.

671. O cenário econômico mudou e hoje é possível obter um novo empréstimo bancário a 16,0% a.a. (prefixada), para uma operação de mesmo duration da A. Com essa taxa, calcule o valor atual de cada uma das operações e da carteira.

672. Com a taxa do novo empréstimo possível (a taxa de mercado), calcule as durations de cada uma das operações e da carteira.

673. O cenário do mercado financeiro está se tornando perigoso e pode ser que falte liquidez. Diante disso, a empresa se dispõe a pagar até 0,1% a.a. a mais para cada ano de duration que conseguir. É possível substituir as dívidas pelo novo empréstimo bancário (mais caro, porém mais longo), à exceção das em moeda estrangeira (tribunais no exterior) e a do BNDES (poderia ficar mal visto). Quais operações recomenda-se sejam quitadas e substituídas pelo novo empréstimo no banco?



---

# **PARTE E**

# **POSFÁCIO**

---

# 14

## PRÓXIMOS PASSOS

A matemática financeira é um dos pilares do conhecimento e da atuação profissional em finanças. O seu domínio é fundamental para todos que queiram fazer uma carreira de sucesso na área. Eis uma lista (incompleta e não detalhada) de aplicações da matemática financeira:

- Finanças Corporativas. Na avaliação de projetos de investimento, atividade que vai muito além da matemática financeira. Na avaliação de empresas, cuja técnica é semelhante à de avaliação de projetos de investimento. Em diversas aplicações referentes à estrutura a ao custo de capital. Em empréstimos e financiamentos.
- Investimentos. Em aplicações de renda fixa, inclusive de crédito. No investimento em ações. Em derivativos de juros, moeda estrangeira, commodities e ações.
- Contabilidade. No cálculo do valor justo de ativos e passivos.
- Economia. Em decisões e análise de política monetária.
- Engenharia, operações e TI. No dimensionamento de equipamentos, pessoal e estoques. Na substituição de equipamentos.
- Marketing. Na precificação de produtos e serviços.
- Gestão de pessoas. Em planos e negociações salariais. Em fundos e planos de previdência.
- Atuária. No cálculo de prêmios e reservas.

## 15

# BIBLIOGRAFIA

- (1990). Código de Defesa do Consumidor (Lei Nº 8.078).
- Assaf Nº, A. (2010). *Finanças Corporativas e Valor*. São Paulo: Atlas (5ª ed.).
- Assaf Nº, A. (2013). *Matemática Financeira e suas Aplicações*. São Paulo: Atlas.
- BIS. (2014). *Debt securities statistics*. Acesso em 2014, disponível em BIS:  
[www.bis.org/statistics/secstats.htm](http://www.bis.org/statistics/secstats.htm)
- BNDES. (2013?). *Taxa de Juros de Longo Prazo*. Acesso em 2014, disponível em  
[www.bndes.gov.br](http://www.bndes.gov.br):  
[http://www.bndes.gov.br/SiteBNDES/export/sites/default/bndes\\_pt/Galerias/Arquivos/produtos/download/tjlp.pdf](http://www.bndes.gov.br/SiteBNDES/export/sites/default/bndes_pt/Galerias/Arquivos/produtos/download/tjlp.pdf)
- Brealey, R. A., Myers, S. C., & Allen, F. (2013). *Princípios de Finanças Corporativas*. Porto Alegre: McGraw-Hill (10ª ed.).
- Brigham, E., & Houston, J. (1999). *Fundamentos da Moderna Administração Financeira*. (12ª ed.).
- Bruni, A. L. (2008a). *A matemática das finanças: com aplicações na HP 12-C e Excel*. São Paulo: Atlas ( Vol.1, 3ª. ed.).
- Bruni, A. L., & Famá, R. (2008b). *Matemática financeira com HP 12-C e Excel*. São Paulo: Atlas (5ª ed.).
- Carrete, L. S. (2014). *Cálculo no Mercado Financeiro - Conceitos, Ferramentas e Exercícios*. São Paulo: Atlas.
- Casa Nova, S. P., Kassai, J. R., Santos, A. d., & Assaf Nº, A. (2000). *Retorno de Investimento: Abordagem Matemática e Contábil do Lucro Empresarial*. São Paulo: Atlas (2. ed.).
- Damodaran, A. (2004). *Finanças Corporativas - Teoria e Prática*. Porto Alegre: Bookman (2ª ed.).
- Gitman, L. J. (2010). *Princípios de Administração Financeira*. São Paulo: Pearsosn (12ª ed.).
- Gomes, J. M., & Matias, W. F. (2009). *Matemática Financeira*. São Paulo: Atlas (6ª ed.).
- Gosling, J. (1995). *QuickSmart Maths for Business & Finance*. Glebe, NSW, Australia: Pascal Press. Obtido (parcialmente) de [books.google.com.br](http://books.google.com.br) em mar14.

- Jurandir, L. (2012). *iptvusp*. Acesso em 25 de maio de 2014, disponível em iptvusp:  
<http://200.144.182.164/portal/skins/default/imgsIPTV/video.action?idItem=8501>
- Kanitz, S. C. (1984). Uma proposta de renegociação da dívida externa brasileira. *Revista de Administração*, 19(2), p.60-72.
- MEC. (2014?). *FIES*. Acesso em 23 de junho de 2014, disponível em MEC:  
<http://sisfiesportal.mec.gov.br/condicoes.html>
- Myers, S. C., Allen, F., & Brealey, R. A. (2013). *Princípios de Finanças Corporativas*. Porto Alegre: Amgh (10ª ed.).
- Paschoarelli, R. (2007). *Como usar a calculadora HP-12C*. São Paulo: Saint Paul.
- Ross, S. A., Jordan, B. D., & Westerfield, R. W. (2013). *Administração Financeira*. (9ª ed.).
- Securato, J. R., & coautores. (2008). *Cálculo financeiro das tesourarias*. São Paulo: Saint Paul (4a ed.).
- Sousa, A. F. (2007). *Avaliação de Investimentos - uma Abordagem Prática*. São Paulo: Saraiva.
- STN. (2013?). *Cálculo da Rentabilidade dos Títulos Públicos ofertados no Tesouro Direto - LFT*. Acesso em 2014, disponível em  
[http://www3.tesouro.gov.br/tesouro\\_direto/download/metodologia/lft.pdf](http://www3.tesouro.gov.br/tesouro_direto/download/metodologia/lft.pdf)
- Treasury and Finance Info. (2014?). *BBA LIBOR: Definition and Conventions*. Acesso em 2014, disponível em <http://treasuryandfinance.info/TF/bba-libor-definition-and-conventions.html>
- Vieira Sobrinho, J. D. (2012). *Cobrança de juros sobre juros - Anatocismo*. São Paulo: Almedina.
- wiki/Frederick\_Macaulay*. (2014?). Acesso em 2014, disponível em Wikipaedia:  
[http://en.wikipedia.org/wiki/Frederick\\_Macaulay](http://en.wikipedia.org/wiki/Frederick_Macaulay)
- wiki/Irving\_Fisher*. (2014?). Acesso em 2014, disponível em Wikipaedia:  
[http://en.wikipedia.org/wiki/Irving\\_Fisher](http://en.wikipedia.org/wiki/Irving_Fisher)
- wiki/Richard\_Price*. (2014?). Acesso em 2014, disponível em Wikipedia:  
[en.wikipedia.org/wiki/Richard\\_Price](http://en.wikipedia.org/wiki/Richard_Price)