



Escola Politécnica
Universidade de São Paulo

Curso de Circuitos Elétricos
Volume 1 – Capítulo 1

Conceitos Básicos, Bipolos e Quadripolos

L. Q. Orsini e D. Consonni

Agradecimentos : Dilma Maria Alves da Silva
 Luiz Carlos Molina Torres

CURSO DE CIRCUITOS ELÉTRICOS

Volume 1

- 1. Conceitos Básicos, Bipolos e Quadripolos**
- 2. Associações de Bipolos e Leis de Kirchhoff**
- 3. A Análise Nodal e suas Variantes; Análise de Malhas**
- 4. Redução de Redes e Aplicações Tecnológicas de Redes Resistivas**
- 5. Estudo de Redes de Primeira Ordem**
- 6. Estudo de Redes de Segunda Ordem**
- 7. Introdução à Transformação de Laplace**
- 8. Transformação de Laplace e Funções de Rede**

ENGENHARIA
ELÉTRICA



INFORMAÇÃO
ENERGIA

A Engenharia Elétrica visa essencialmente
prover

RECURSOS

materiais, dispositivos

processos físicos e

químicos

MÉTODOS

análise e síntese

para promover:

- Produção
- Transmissão
- Distribuição
- Armazenagem
- Transformação
- Processamento

de ENERGIA e INFORMAÇÃO

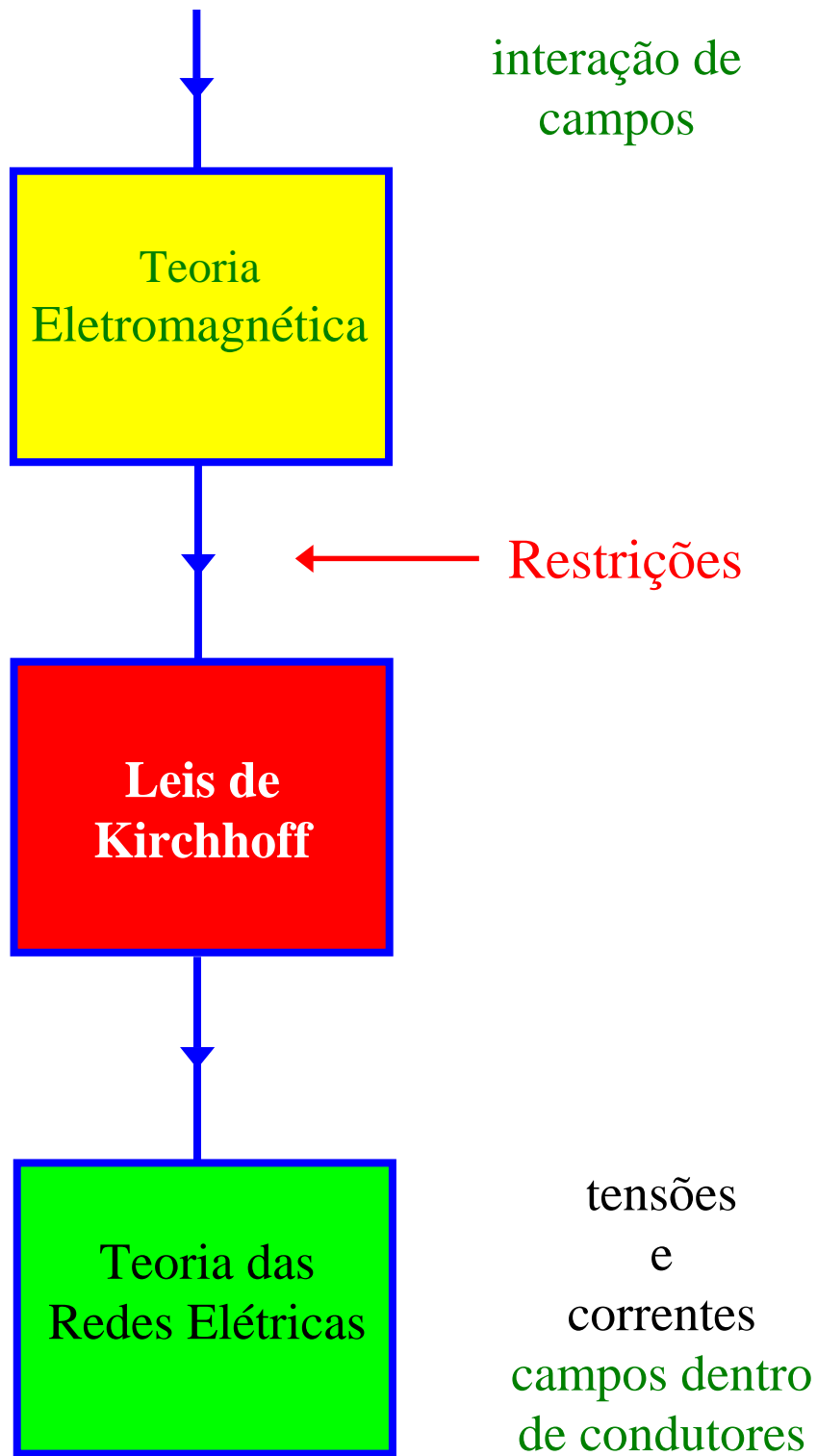
Engenharia Elétrica



Aplicações práticas de fenômenos
eletromagnéticos

Eletromagnetismo

- Oersted 1820
- Gauss / Ampère ~ 1825
- Faraday - Henry 1831
- Siemens ~ 1850
- Maxwell 1864
- Hertz 1888
- Landell de Moura 1894
- Marconi 1901



Eletromag x Circuitos

Teoria Clássica de Eletromagnetismo



Equações de Maxwell



Leis que relacionam campos elétricos e magnéticos



grandezas vetoriais



Métodos de solução complicados → aproximações

Teoria Clássica de Circuitos



Leis de Kirchhoff



Relações entre tensões e correntes em elementos simples
ideais: R L C



grandezas escalares



Métodos de solução bem estabelecidos

Exemplos

a) Rede de distribuição de energia
Elétrica: 60 Hz

5ª harmônica: 300 Hz

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3 \cdot 10^8}{300} = 10^6 \text{ metros}$$

Sistema contido em um raio de 10 km



Vale a Teoria dos Circuitos

b) Receptor FM: 100 MHz

$$\lambda = \frac{3 \cdot 10^8}{10^8} = 3 \text{ metros}$$

$$\lambda/4 = 0,75 \text{ m}$$

Dimensões do circuito << 75 cm

TABELA DE UNIDADES

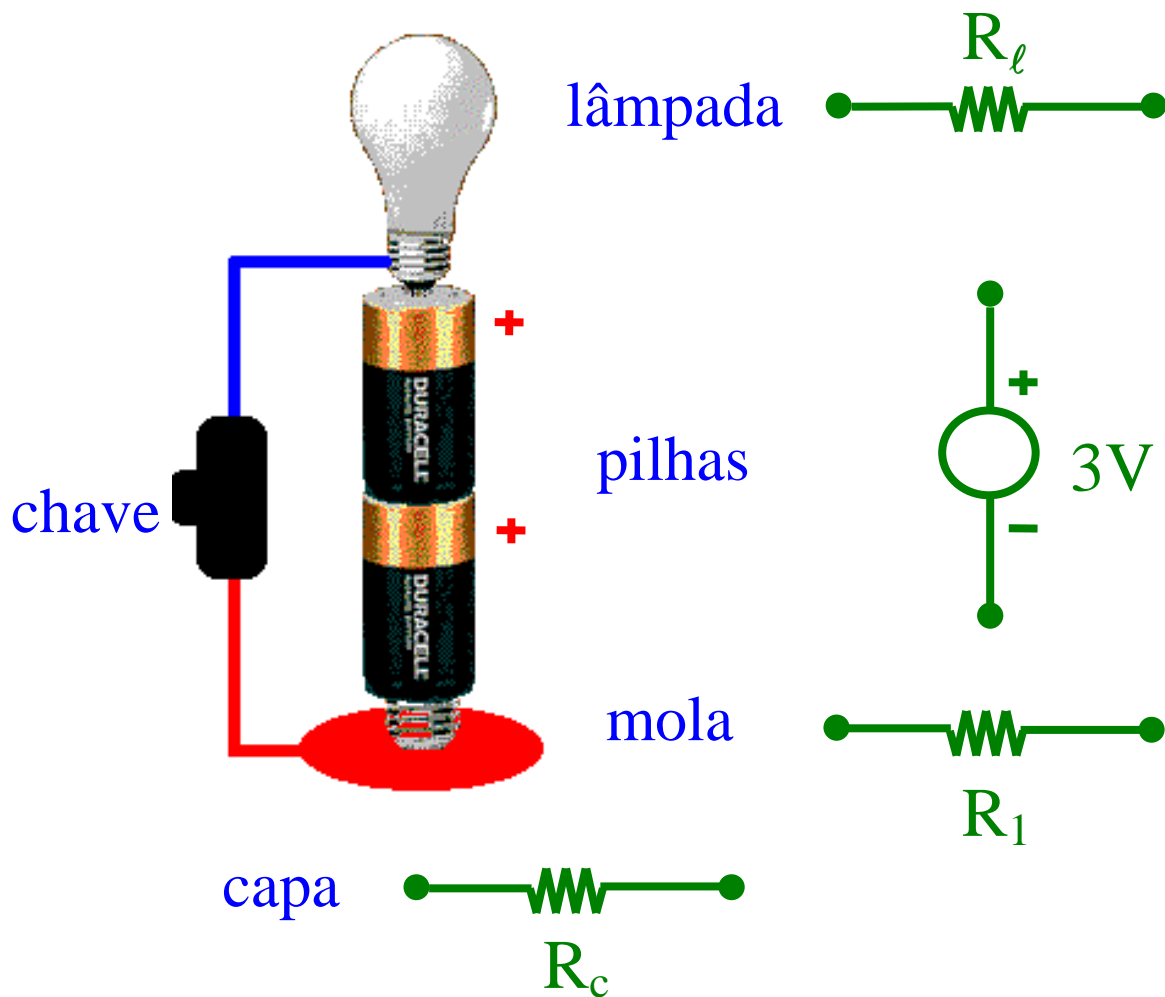
GRANDEZA	SISTEMAS CONSISTENTES			
	S.I.	A.F.	R.F.	U.H.F.
Tensão	V	V	V	V
Corrente	A	mA	mA	mA
Resistência	Ω	k Ω	k Ω	k Ω
Condutância	S	mS	mS	mS
Capacitância	F	μ F	nF	pF
Indutância	H	H	mH	μ H
Tempo	s	ms	μ s	ns
Freq. angular	rad/s	krad/s	Mrad/s	Grad/s
Frequência	Hz	kHz	MHz	GHz

T	Tera	10^{12}
G	Giga	10^9
M	Mega	10^6
k	Quilo	10^3
m	Mili	10^{-3}
μ	Micro	10^{-6}
n	Nano	10^{-9}
p	Pico	10^{-12}

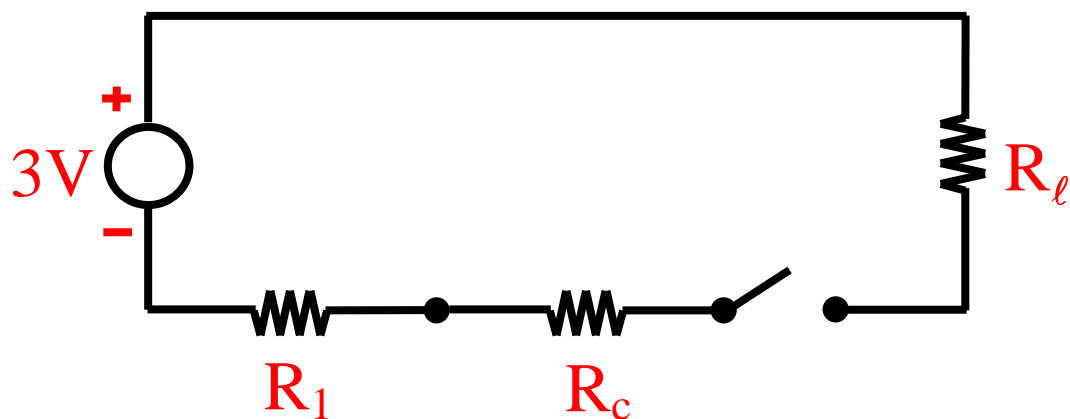
SISTEMAS DE UNIDADES CONSISTENTES			
GRANDEZA	S.I.	ÁUDIO FREQ.	RÁDIO FREQ.
Tempo	seg	mseg	μseg
Frequência	Hz	kHz	MHz
Tensão	V	V	V
Corrente	A	mA	mA
Resistência	Ω	kΩ	kΩ
Condutância	S	mS	mS
Capacitância	F	μF	nF
Indutância	H	H	mH

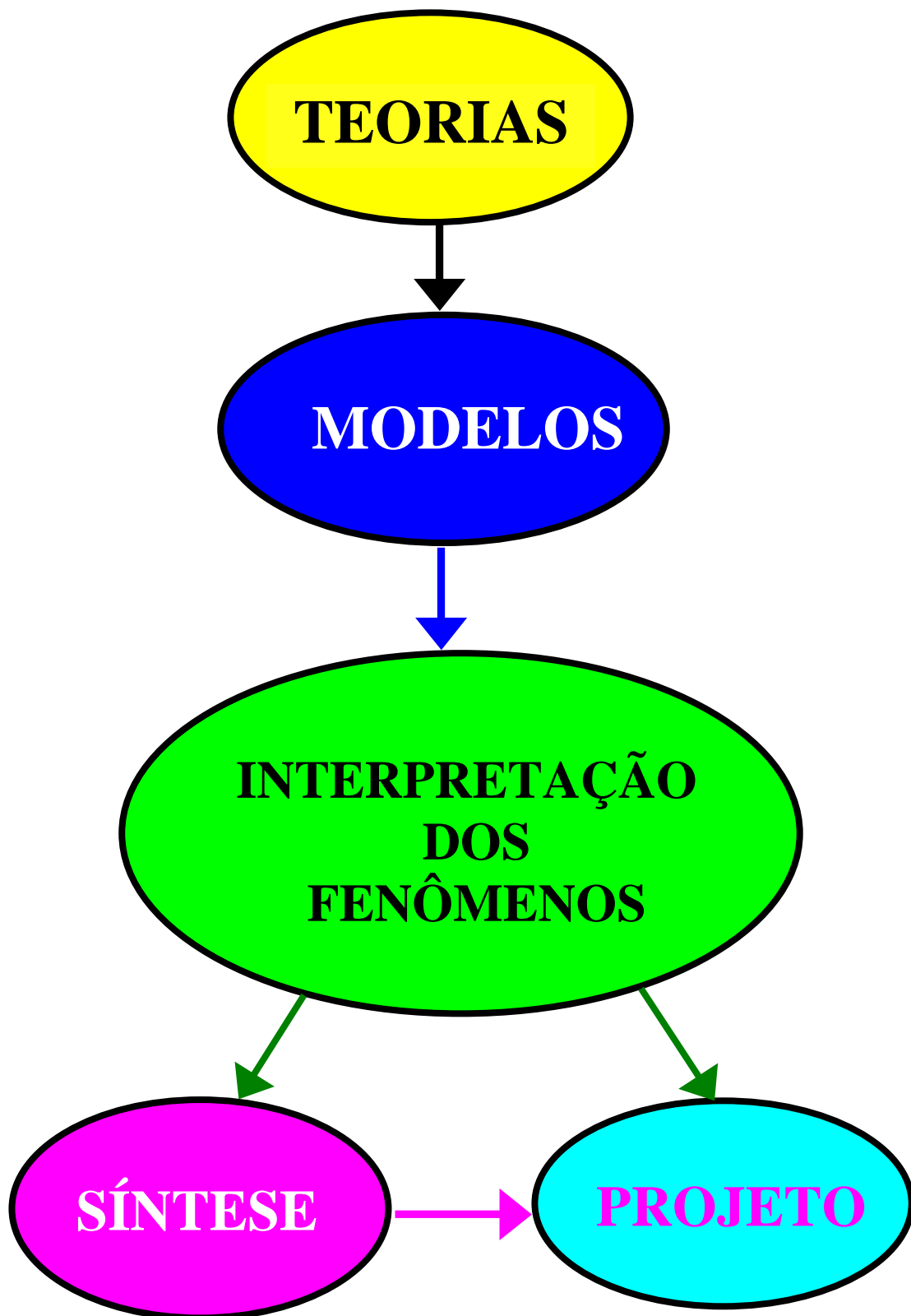
MODELAMENTO

Lanterna:



Modelo :





CIRCUITOS ELÉTRICOS I :

CONCEITOS BÁSICOS:

- CARGA ELÉTRICA $q(t)$:

Múltiplo inteiro de $1,602 \cdot 10^{-19}$ coulombs

- CORRENTE ELÉTRICA ATRAVÉS DE UMA SUPERFÍCIE:

- VALOR MÉDIO:

$$i_m = \frac{\Delta q(t)}{\Delta t} \quad (\text{AMPÈRES})$$

- VALOR INSTANTÂNEO:

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt} \quad (\text{AMPÈRES})$$

Carga elétrica

- Conservativa
- Quantizada $1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$
- Bipolar \oplus \ominus
Atração e Repulsão
- Móvel ou Fixa
- Materiais: $\left\{ \begin{array}{l} \text{Condutores} \\ \text{Semi-condutores} \\ \text{Isolantes} \end{array} \right.$

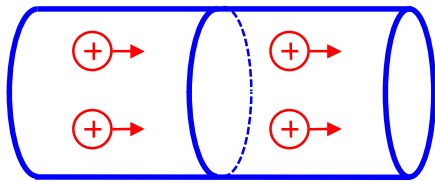
Corrente Elétrica (física)

- Condução lâmpada incandescente
- Convecção íons em eletrólitos \rightarrow luz néon
- Difusão semicondutores
- Deslocamento dielétricos

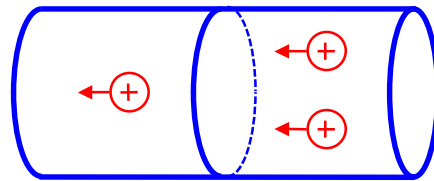
$$i(t) \triangleq dq/dt$$

$$q(t) = \int_{t_0}^t i(\tau) d\tau + q(t_0)$$

CORRENTE ELÉTRICA



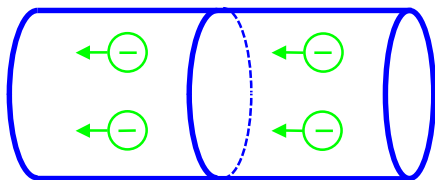
$+ Q_1$



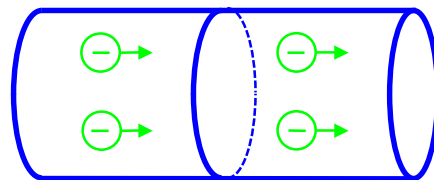
$- Q_2$



Sentido de Referência



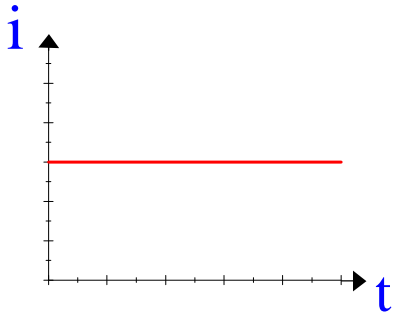
$+ Q_3$



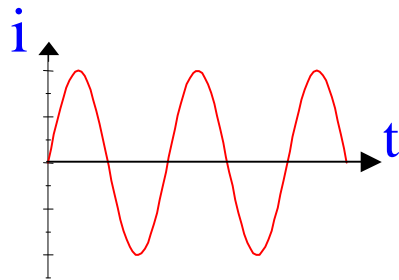
$- Q_4$

$$i_m = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{+Q_1 - Q_2 + Q_3 - Q_4}{\Delta t}$$

FORMAS DE ONDA

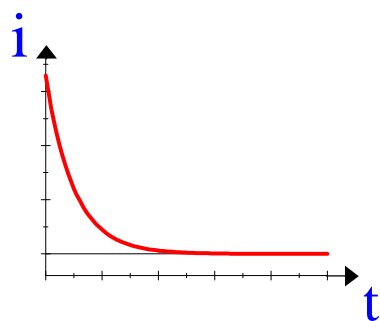


Contínua CC
DC

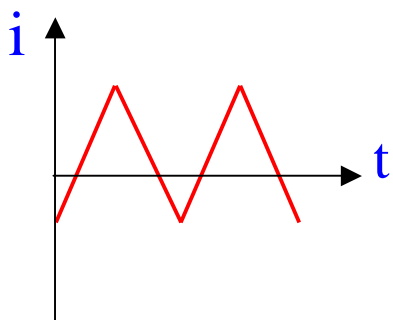


Alternativa CA
AC

Ex.: senoidal
- Periódica, média
nula num período

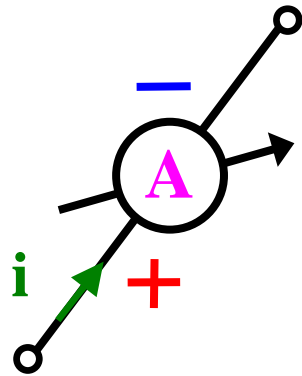


Não-periódica
Ex.: exponencial



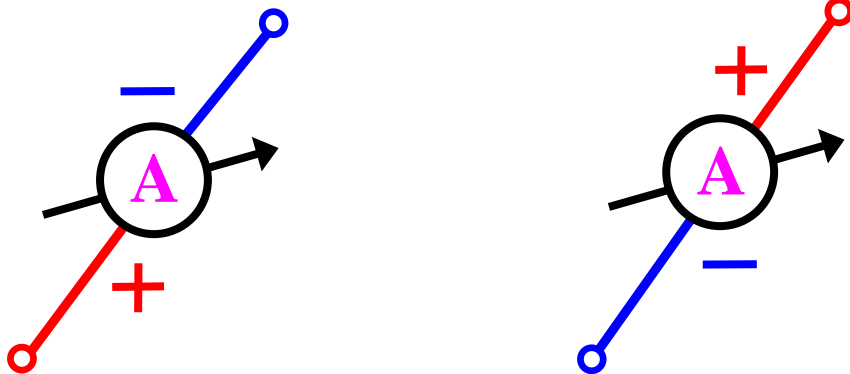
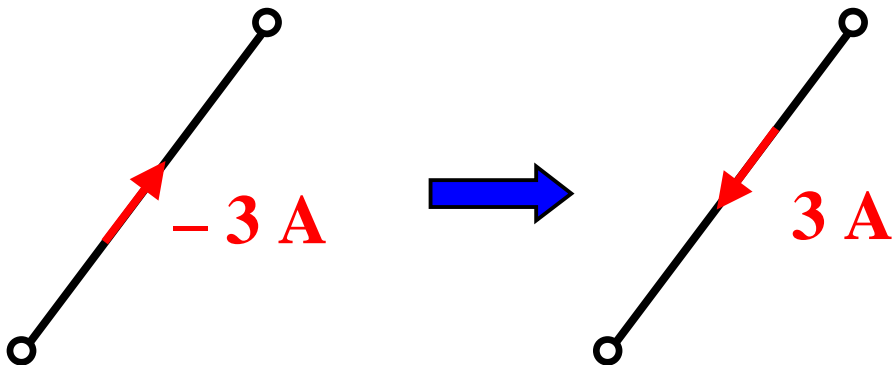
Pulsada
Ex.: triangular

Aparelho para medir corrente elétrica

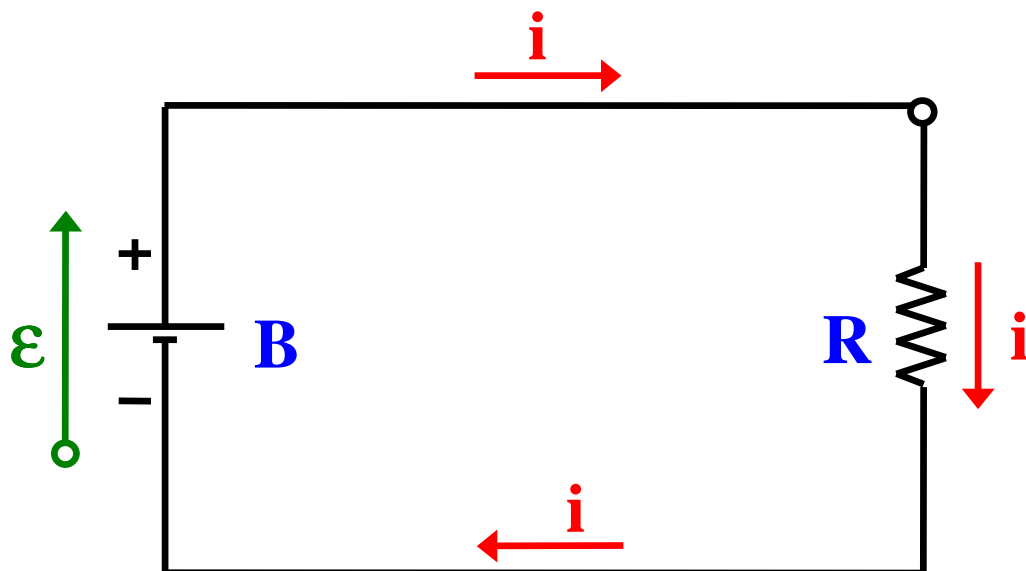


Amperímetro
Ideal

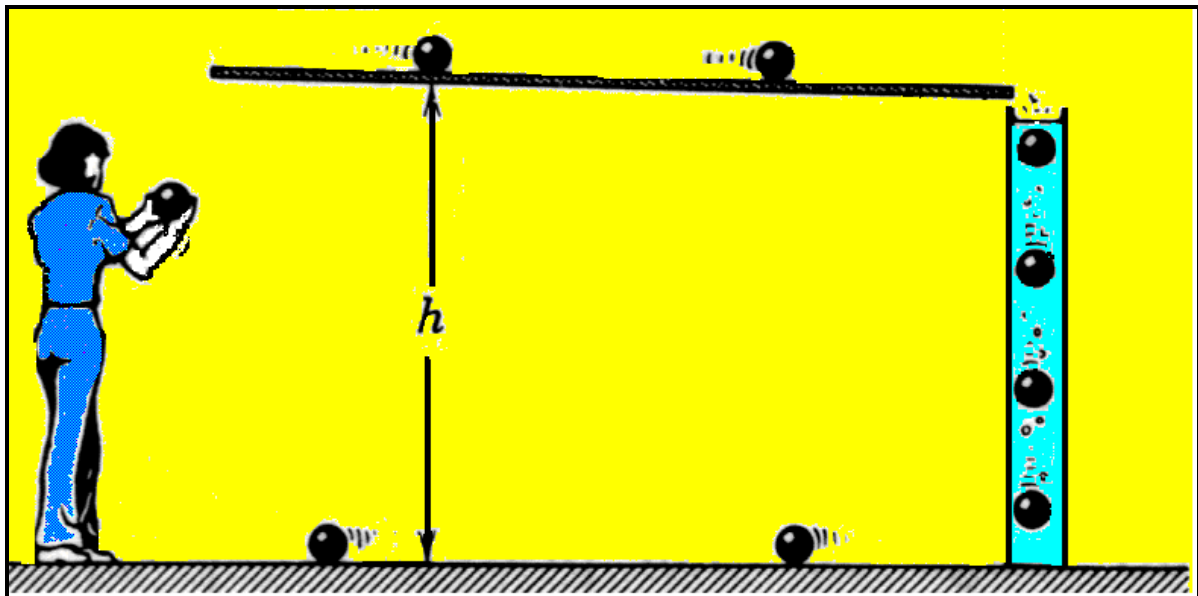
→ curto-circuito



CONCEITO DE TENSÃO ELÉTRICA (ddp)



a) Circuito elétrico



b) Analogia mecânica

Tensão Elétrica

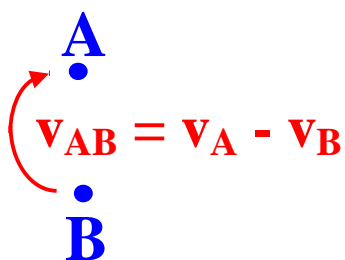
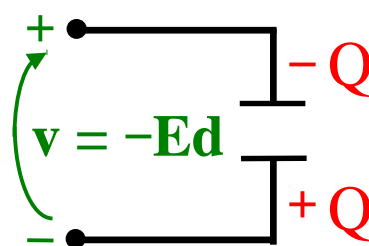
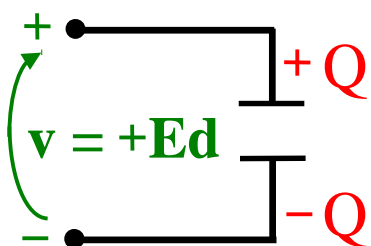
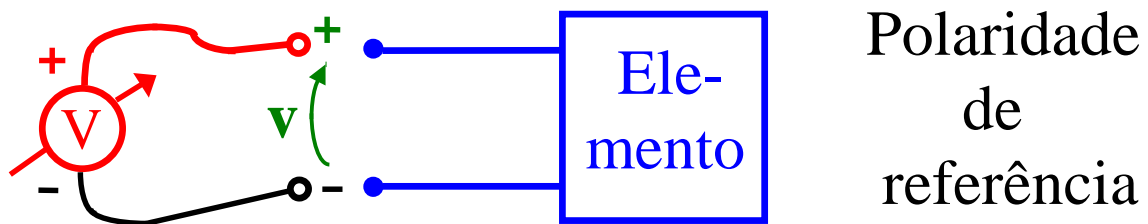
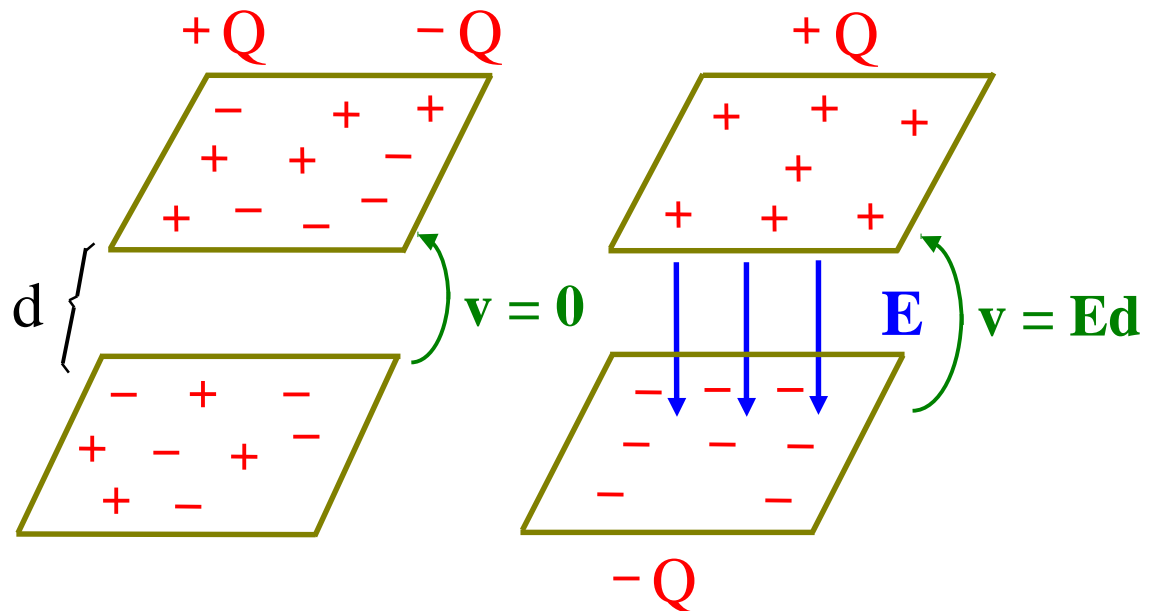
$$d w(t) = v(t) dq(t)$$

$d w(t) \rightarrow$ energia (trabalho) necessária
para separar cargas positivas
de cargas negativas (J)

$dq(t) \rightarrow$ quantidade de carga a ser
separada (C)

$v(t) \rightarrow$ tensão elétrica (V)

Tensão Elétrica



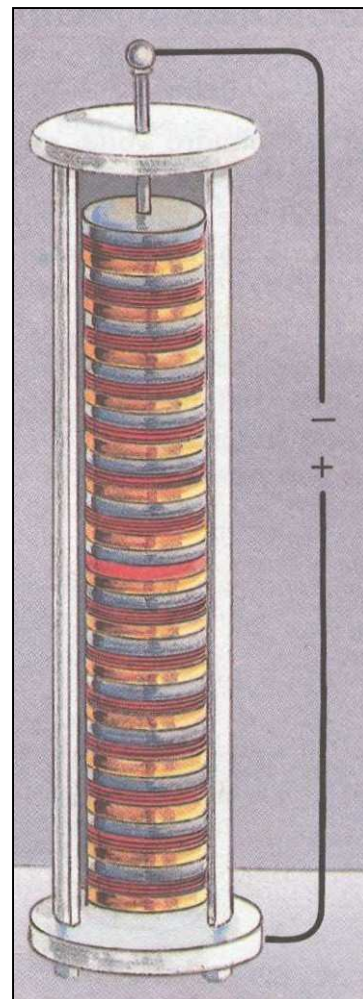
FONTES DE TENSÃO

- Ação Química Baterias, Pilhas
- Magnetismo Geradores
- Luz → Fotoeletricidade Célula Solar
- Calor → Termo-eletricidade
 Par termoelétrico
- Pressão Mecânica → Piezoeletricidade
 Cristal piezoelétrico
- Fricção

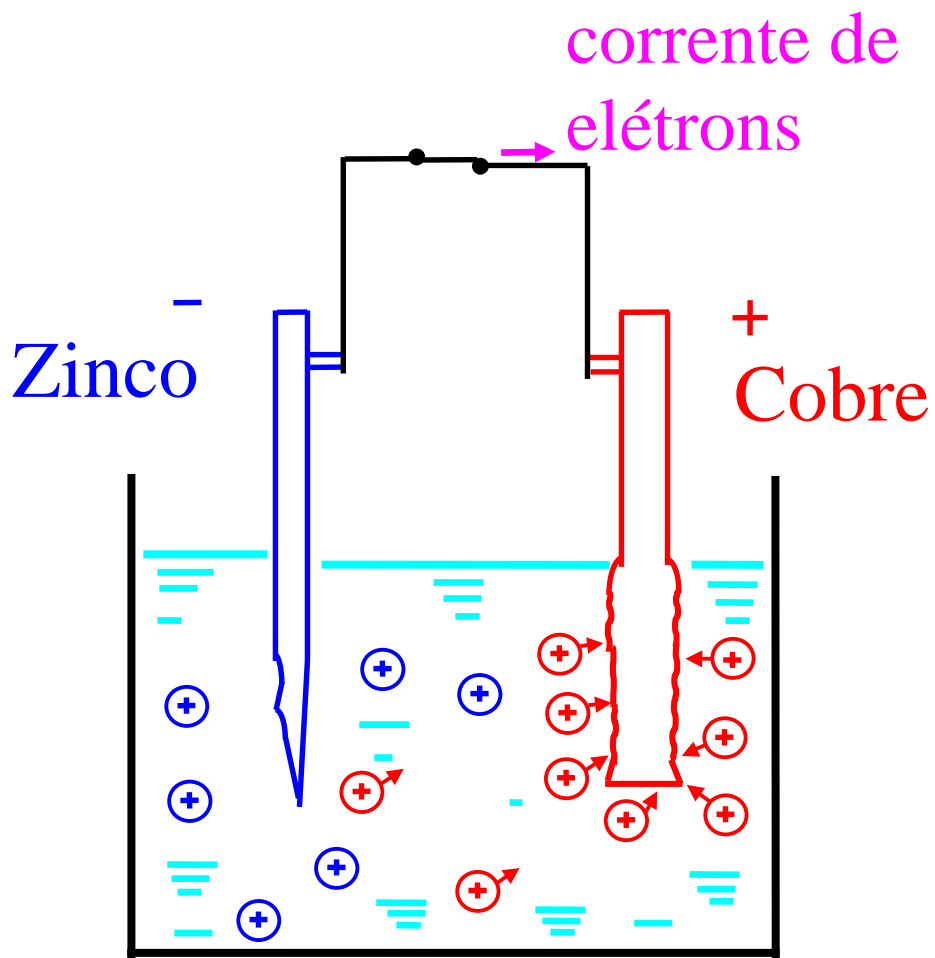
A pilha inventada por Alessandro Volta



**Volta apresenta a
Napoleão e a
cientistas
franceses sua grande
invenção (1799)**



PILHA VOLTAICA

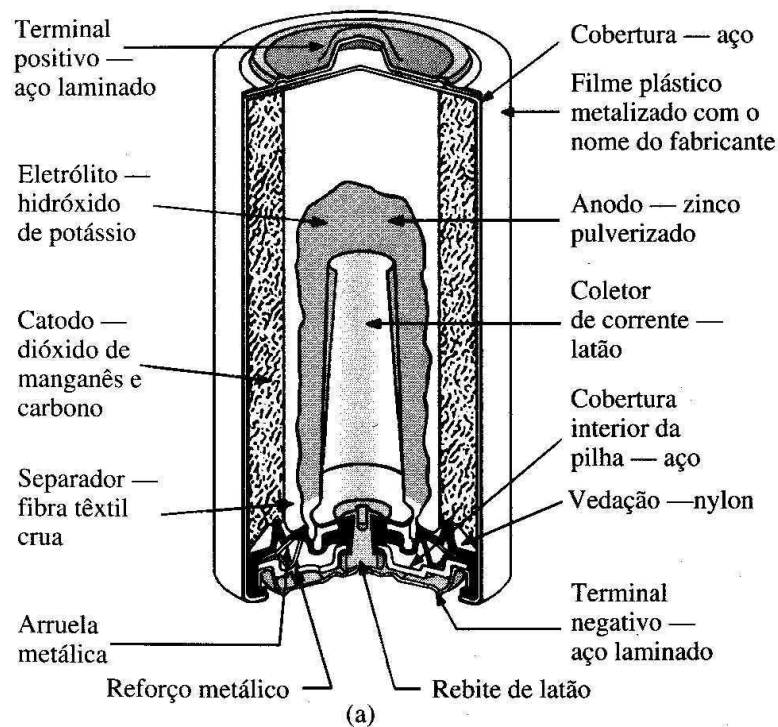


água + sulfato de cobre

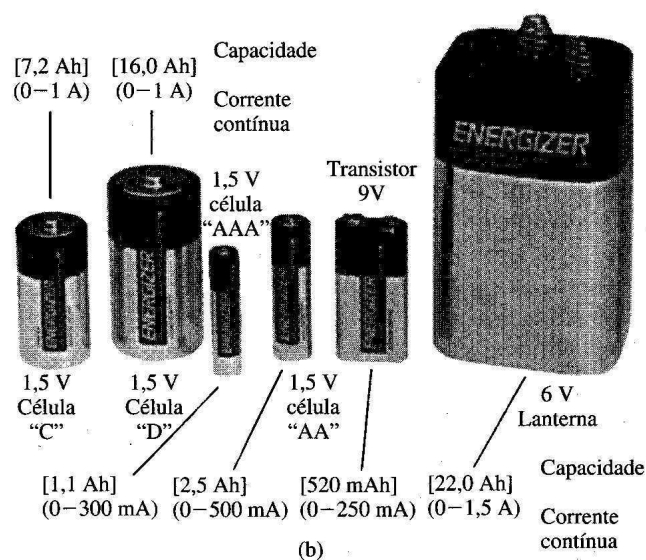
⊕ íons de cobre

⊕ íons de zinco

Pilha Secca Alcalina

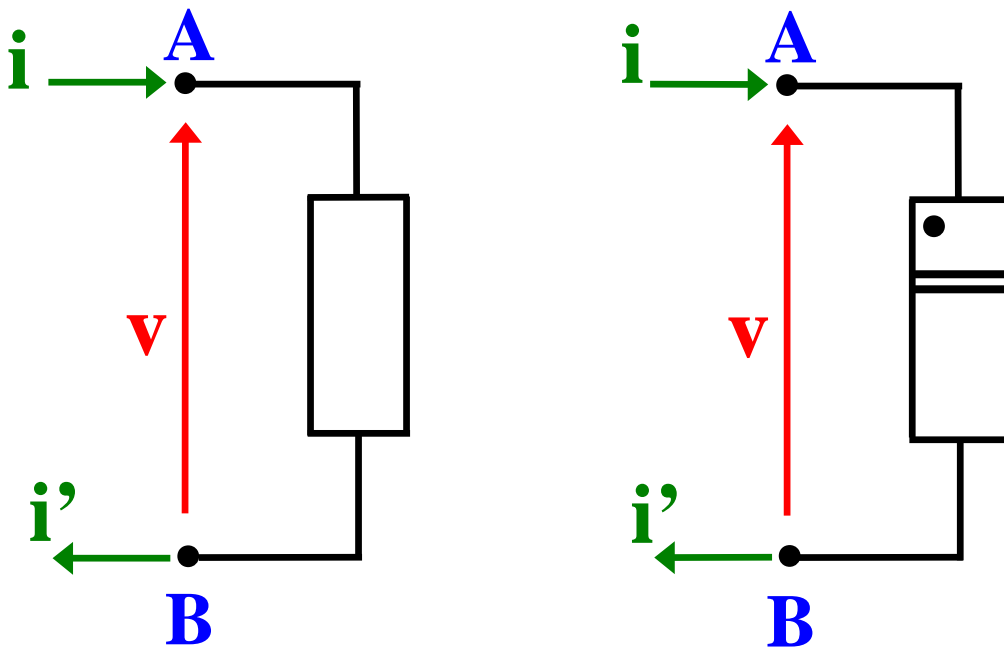


Células Primárias



BIPOLos ELÉTRICOS

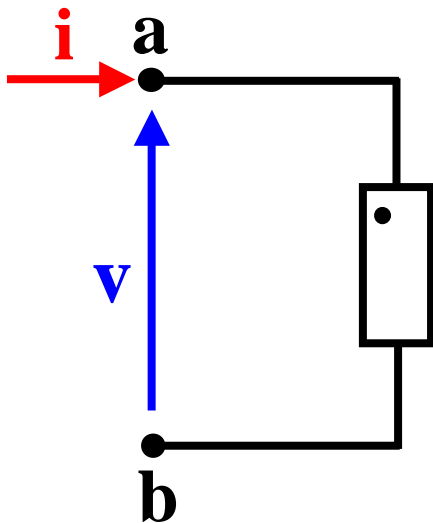
- SÍMBOLOS:



- PROPRIEDADES:

$$\begin{cases} i(t) = i'(t), & \forall t \\ v(t) = v_A(t) - v_B(t), & \forall t \end{cases}$$

VARIÁVEIS ELÉTRICAS NOS BIPOLOS



$$\mathbf{i} = \int_S \vec{\mathbf{J}} \times \vec{\mathbf{dS}}$$

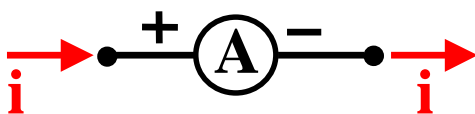
$$\mathbf{v} = \int_b^a \vec{\mathbf{E}} \times \vec{\mathbf{d\ell}}$$

$$\mathbf{i} = \frac{dq}{dt}$$

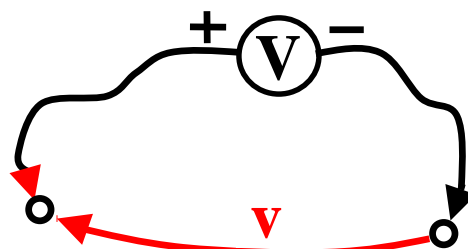
$$\mathbf{v} = \frac{dw}{dq}$$

(CAMPO POTENCIAL)

AMPERÍMETRO



VOLTÍMETRO



IMPORTANTE:

**AS FLECHAS DE REFERÊNCIA
DE TENSÃO E DE CORRENTE
SÃO -**

**- REGRAS PARA LIGAR
VOLTÍMETROS E AMPERÍ-
METROS AO CIRCUITO !**

Potência Elétrica

Potência instantânea :

$$p(t) = \frac{d w(t)}{dt} \quad (W)$$

Mas :

$$d w(t) = v(t) \cdot d q(t)$$

e

$$d q(t) = i(t) \cdot dt$$



$$p(t) = v(t) \cdot i(t)$$

TENSÃO ELÉTRICA ENTRE OS TERMINAIS DE UM BIPOLO

$$v(t) = \frac{dw(t)}{dq(t)} \quad (\text{VOLTS})$$

- É MEDIDA PELOS **VOLTÍMETROS**

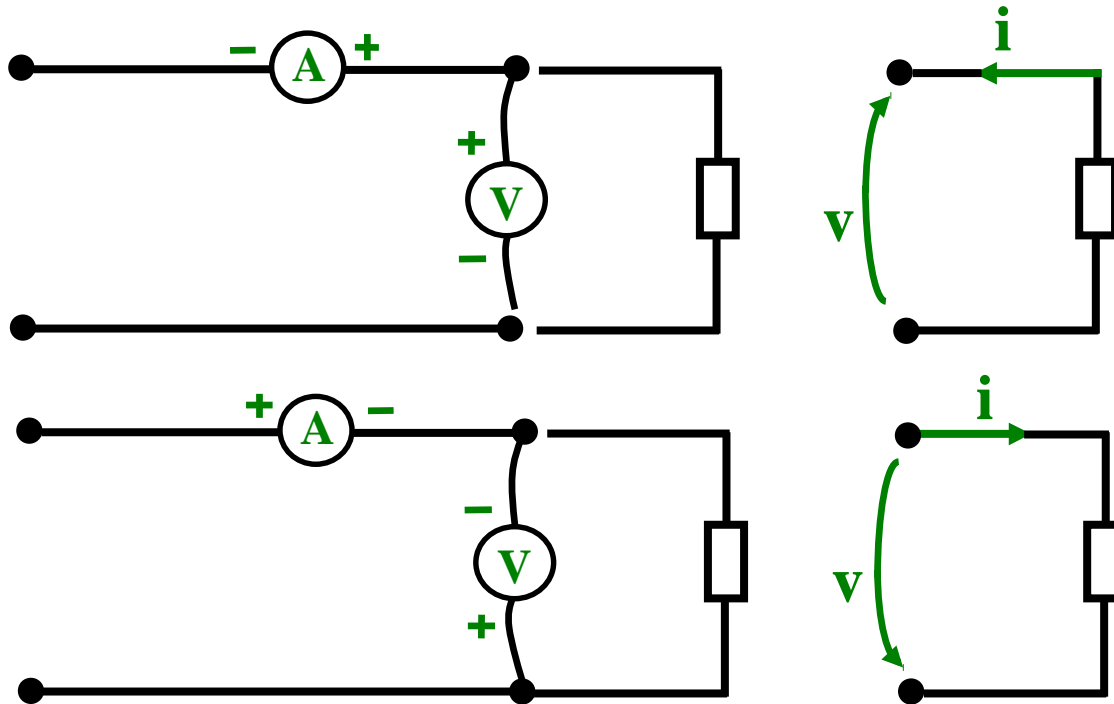
- **POTÊNCIA INSTANTÂNEA:**

$$p(t) = v(t) \cdot i(t) \quad (\text{WATTS})$$

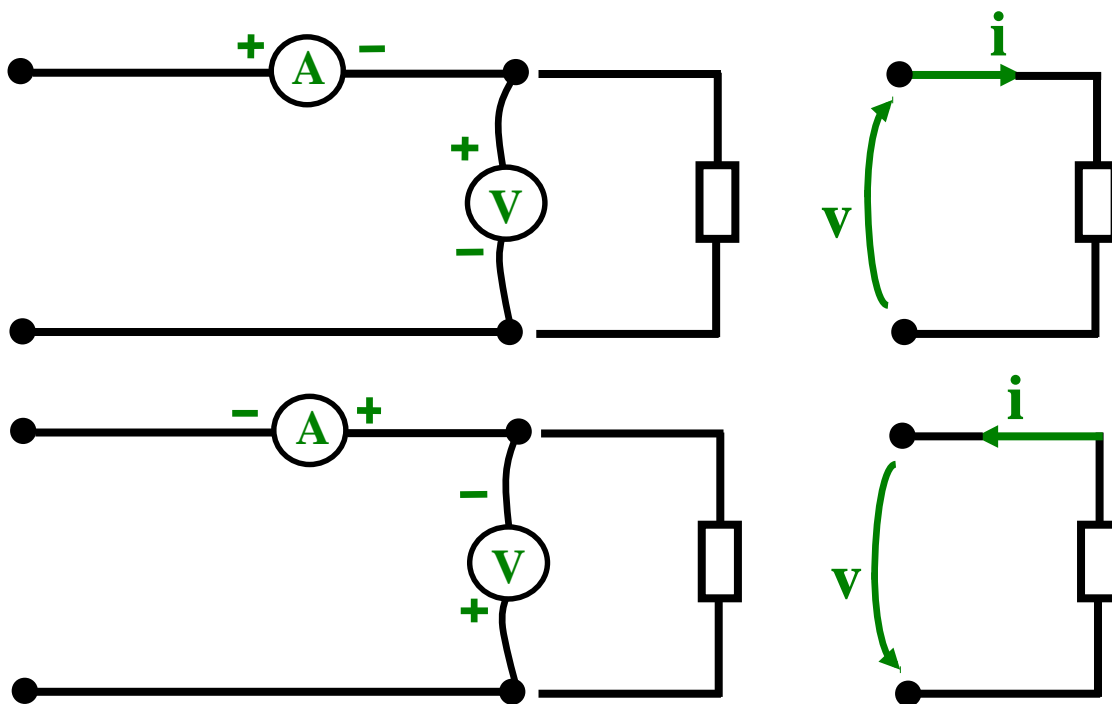
- PARA SABER SE A POTÊNCIA ESTÁ SENDO **RECEBIDA** OU **FORNECIDA** É PRECISO FIXAR **CONVENÇÕES !**

CONVENÇÕES

Gerador

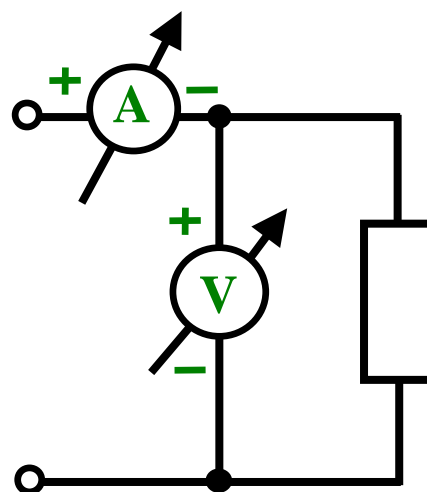
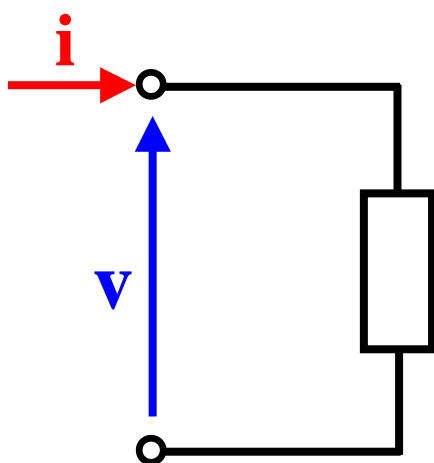


Receptor

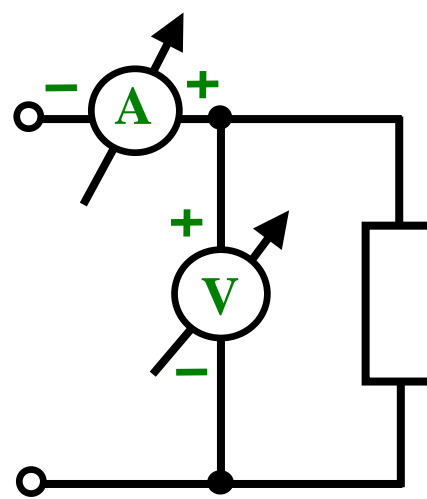
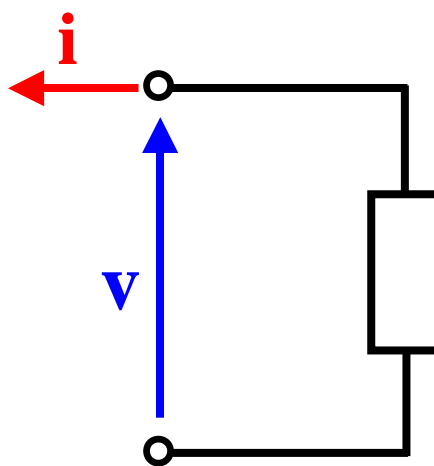


SENTIDOS DE REFERÊNCIA NOS BIPOLOS

Convenção do Receptor (SPICE)



Convenção do Gerador



POTÊNCIA ELÉTRICA NOS BIPOLOS

- CONVENÇÃO DO GERADOR:

$v.i > 0 \rightarrow$ BIPOLO FORNECE
POTÊNCIA

- CONVENÇÃO DO RECEPTOR:

$v.i > 0 \rightarrow$ BIPOLO RECEBE
POTÊNCIA

POTÊNCIA MÉDIA NUM INTERVALO :

$$P \triangleq \frac{1}{t_2 - t_1} \cdot \int_{t_1}^{t_2} p(t) \cdot dt \quad (\text{WATTS})$$

CONVENÇÃO DE NOTAÇÃO:

- LETRAS MINÚSCULAS PARA FUNÇÕES DO TEMPO.
 - LETRAS MAIÚSCULAS PARA GRANDEZAS INDEPENDENTES DO TEMPO.
-
- CASO DE v E i PERIÓDICOS COM PERÍODO T :

$$P = \frac{1}{T} \int_T v(t) \cdot i(t) \cdot dt$$

ENERGIA ELÉTRICA:

$$w(t, t_0) = \int_{t_0}^t p(\tau) \cdot d\tau =$$

$$= \int_{t_0}^t v(\tau) \cdot i(\tau) \cdot d\tau$$

(JOULES)

UNIDADE PRÁTICA DE ENERGIA:

- QUILOWATT – HORA (kWh)

$$1 \text{ kWh} = 3,6 \cdot 10^6 \text{ J}$$

- MEDIDOR DE ENERGIA:
CALCULA

$$\int_{t_0}^t p(\tau) \cdot d\tau$$

ALGUNS VALORES NUMÉRICOS

CARGA ELÉTRICA

- Carga em uma célula DRAM (quando o bit 1 é armazenado) 50 fcoulomb
- Carga em um capacitor de potência 5 mcoulomb
- Carga em um raio 3000 coulomb

CORRENTE ELÉTRICA

- Corrente de fuga em transistores de CIs fA
- Corrente de sinais em transistores de CIs μA -mA
- Limite de corrente suportada pelo corpo humano ~10mA
- Correntes de alimentação em CIs 100mA-10A
- LED 10mA-100mA
- Lâmpadas e eletrodomésticos pequenos 1A-10A
- Limite de Corrente residencial 20A
- Rede de distribuição residencial 100^{A}
- Rede de distribuição comercial ou industrial 1000A

ALGUNS VALORES NUMÉRICOS

TENSÃO ELÉTRICA

- Sinal em uma antena $1\mu\text{V}$
- Sinal em um microfone (fonte não-ruidosa) $1\mu\text{V}$
- Sinal de áudio (CD player) 100mV
- Tensão de alimentação de um CI $1,8\text{V}$ a 12V
- Bateria de carro 12V
- Rede de distribuição residencial 10kV
- Monitor a cores 10kV
- Sistema de transmissão de potência 100kV

POTÊNCIA

- Sinal em um microfone (fonte não-ruidosa) pW
- CIs μW a vários W
- Lâmpada residencial 100W
- Aquecedor elétrico 1kW
- Máximo consumo residencial 25kW
- Sistema de som em show de rock 50kW
- Central transmissora de rádio 100kW
- Sistema de iluminação de show de rock 250kW
- Usina de geração de energia elétrica 1GW

BIPOLos ELEMENTARES

{	PASSIVOS	{	RESISTORES
		{	CAPACITORES
			INDUTORES
{	ATIVOS	{	GERADORES DE TENSÃO
		{	GERADORES DE CORRENTE

**CLASSIFICAÇÃO QUANTO À
RELAÇÃO CORRENTE-TENSÃO:**

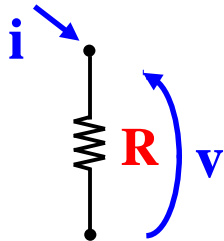
- LINEARES
- NÃO LINEARES

RESISTOR

$$v = r(i)$$

$$i = g(v)$$

1 – Linear Fixo → Ideal



$$v = R i$$

$$i = G v$$

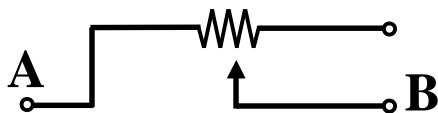
$$R \rightarrow \Omega$$

$$G \rightarrow S$$

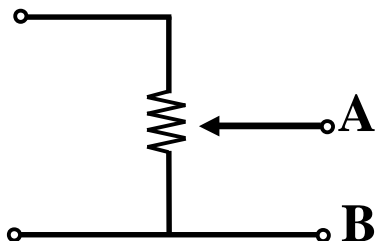
$$p = vi = Ri^2 = Gv^2 = \frac{v^2}{R} = \frac{i^2}{G}$$

2 – Linear Variável

$$v(t) = R(t) i(t)$$



reostato → controle de corrente



potenciômetro → controle de tensão

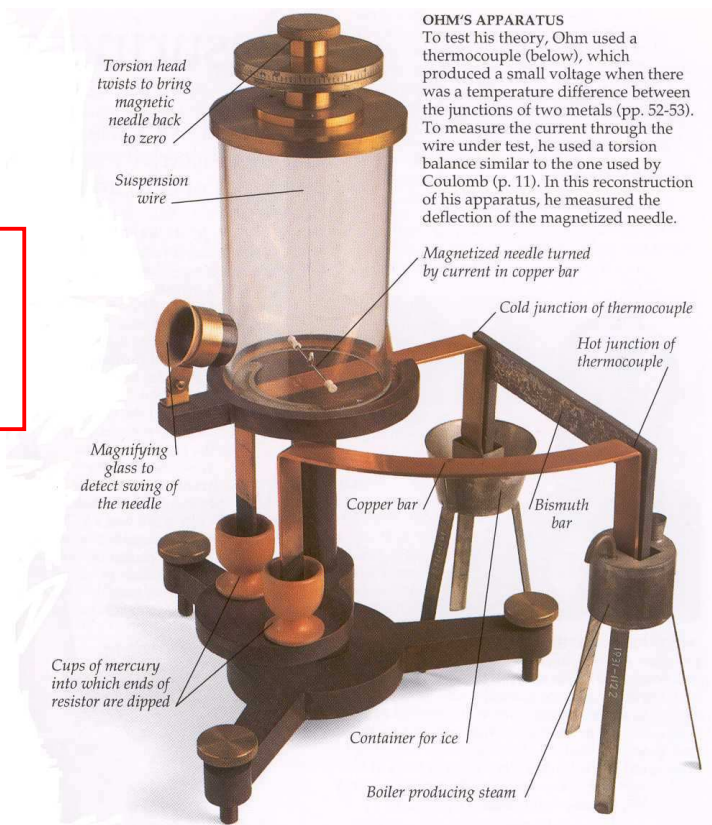
3 – Não-linear

George Simon Ohm



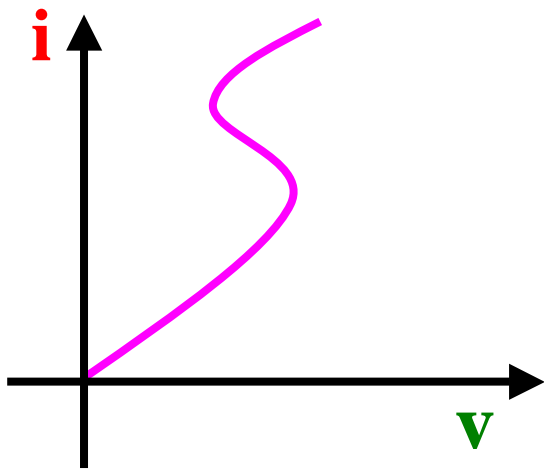
- Alemão (Erlangen, 1789; Colônia, 1854)
- Físico e Matemático
- Professor de Física, Univ. de Colônia
- 1827 Lei de Ohm (empírica) 22 anos para ser reconhecida
- Pesquisas nas áreas de física molecular, acústica e comunicação telegráfica

$$R = \rho \cdot \frac{\ell}{A}$$



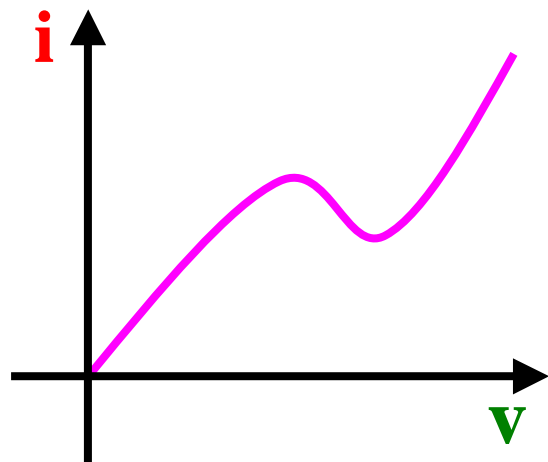
Aparato Experimental usado por Ohm

RESISTOR NÃO-LINEAR



$$v = r(i)$$

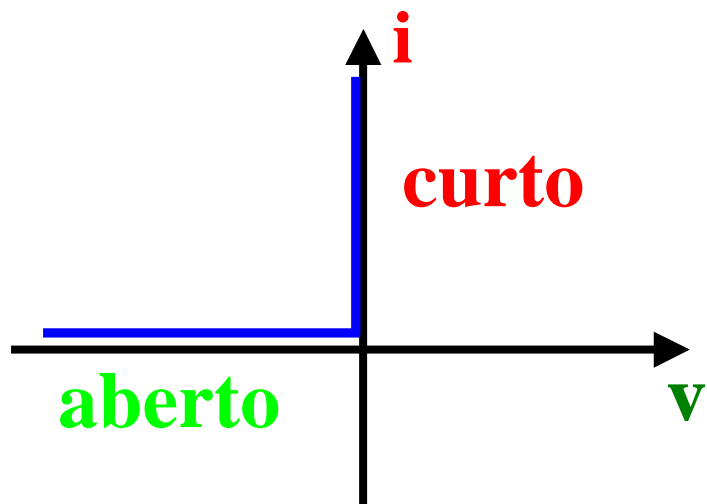
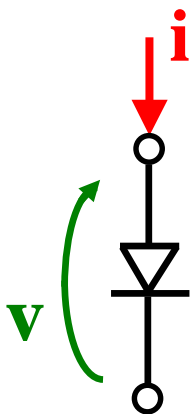
Controlado por
corrente



$$i = g(v)$$

Controlado por
tensão

Ex: Diodo ideal



Diodo real: $i = g(v) = I_s (e^{\lambda v} - 1)$

RESISTORES REAIS

1 – Carvão

Valor

Potência máxima 1/8 1/4 1/2
 1 2 watts

Tolerância 10 % 5 % 1%
 0,5 % 0,1 %

Corrente máxima:

$$I_{\max} = \sqrt{\frac{P_{\max}}{R}}$$

Resistência varia com

Tensão
Frequência
Umidade
Temperatura

2 – Fio

Potências mais elevadas

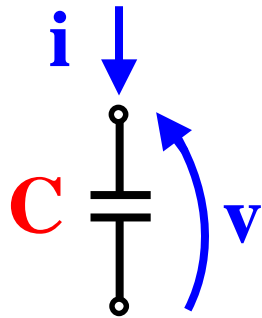
Modelo: 

3 – Filme Metálico: Circuitos integrados

CAPACITOR

$$q(t) = C(v)$$

1- Linear , Fixo → Ideal



$$q = C v$$

$$i = C \frac{dv}{dt}$$

$$v = \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i dt + v(t_0)$$

$$p = \frac{1}{2} C \frac{dv^2}{dt}$$

$$W = \frac{1}{2} C (v^2 - \cancel{v^2(t_0)}) = \boxed{\frac{1}{2} \frac{q^2}{C}}$$

0

2 - Linear , Variável

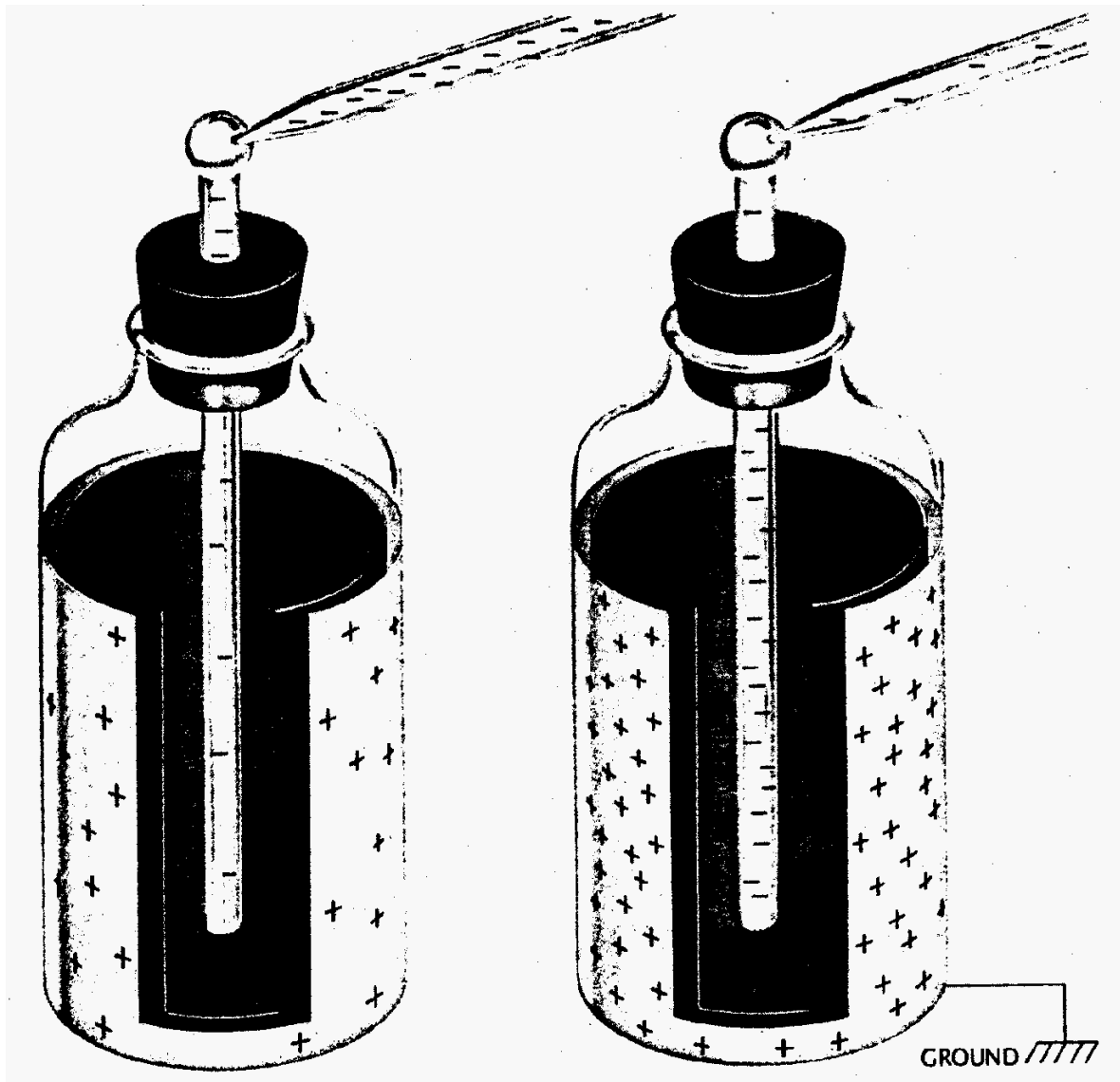
$$q(t) = C(t) v(t)$$

$$i(t) = C(t) \frac{dv(t)}{dt} + v(t) \frac{dC(t)}{dt}$$

3 - Não – linear

$$\text{Ex.: } q(t) = C(v) \cdot v(t)$$

Garrafa de Leyden



Universidade de Leyden (Holanda)

1746

$$C \uparrow \quad \begin{matrix} A \uparrow \\ d \downarrow \end{matrix}$$

$$C = \epsilon \frac{A}{d}$$

CAPACITORES REAIS

Valores: $\mu\text{F} \rightarrow \text{pF}$

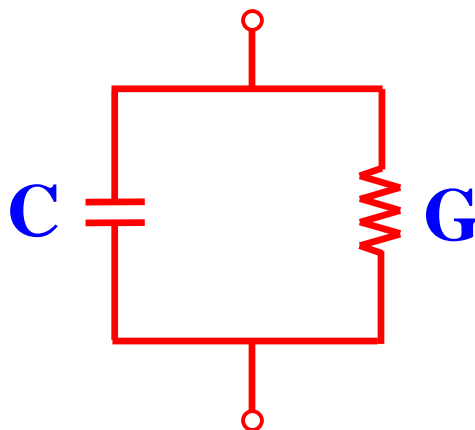
Especificações: **Ex.:** 100 nF / 500V

↑
tensão de ruptura
do dielétrico

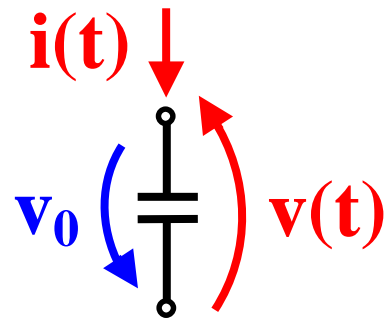
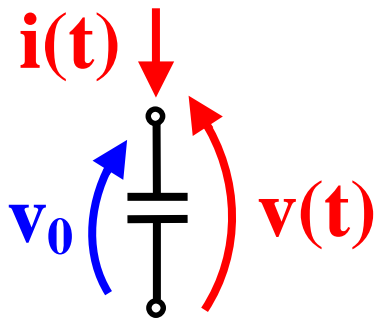
Tipos: de acordo com o dielétrico

- cerâmica
- mylar
- poliestireno
- eletrolítico
- tântalo

Modelo:



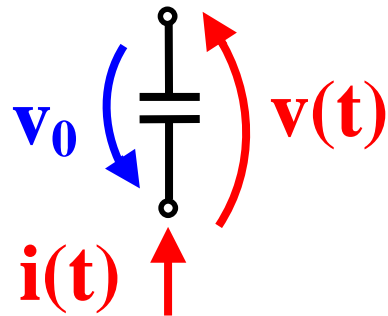
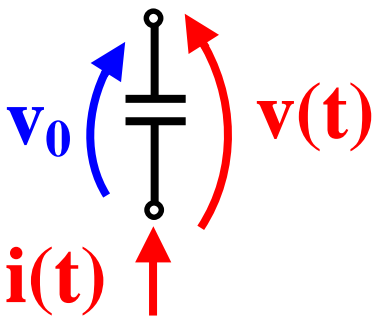
CAPACITOR E CONVENÇÕES



$$i = C \frac{dv}{dt}$$

$$v = \frac{1}{C} \int i dt + v_0$$

$$v = \frac{1}{C} \int i dt - v_0$$



$$i = -C \frac{dv}{dt}$$

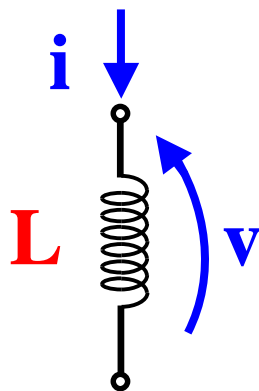
$$v = -\frac{1}{C} \int i dt + v_0$$

$$v = -\frac{1}{C} \int i dt - v_0$$

INDUTOR

$$\psi = L (i)$$

1 – Linear , Fixo \rightarrow Ideal



$$\psi = L \cdot i$$

$$v = \frac{d\psi}{dt} = L \frac{di}{dt}$$

$$i = \frac{1}{L} \int_{t_0}^t v dt + i(t_0)$$

$$p = \frac{1}{2} L \frac{di^2}{dt}$$

$$w = \frac{1}{2} Li^2 - \frac{1}{2} L i_0^2$$

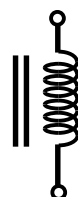
2 – Linear, Variável

$$\psi = L(t) i(t)$$

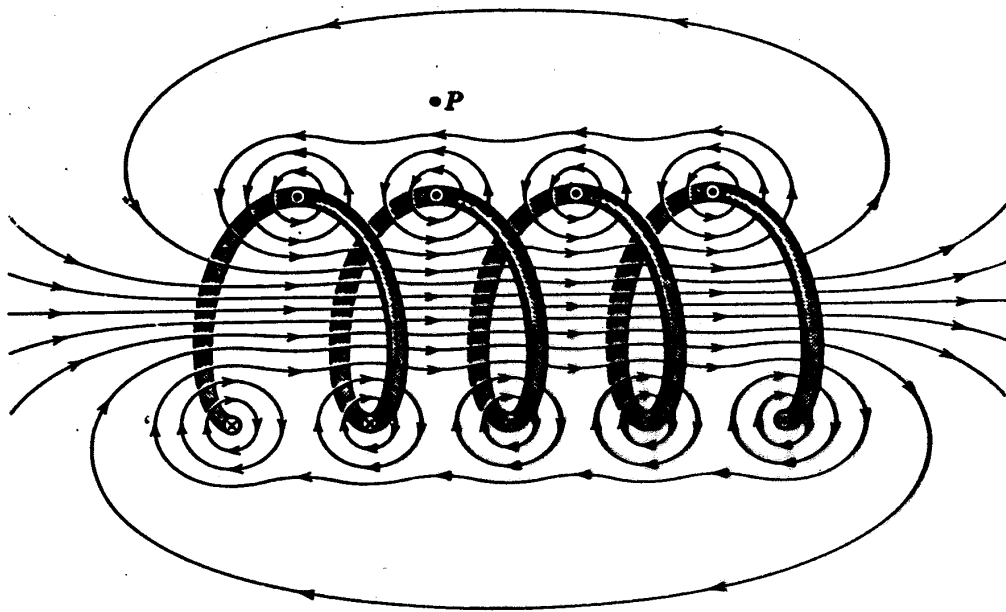
$$v = L(t) \frac{di(t)}{dt} + i(t) \frac{dL(t)}{dt}$$

3 – Não-linear

Ex.:

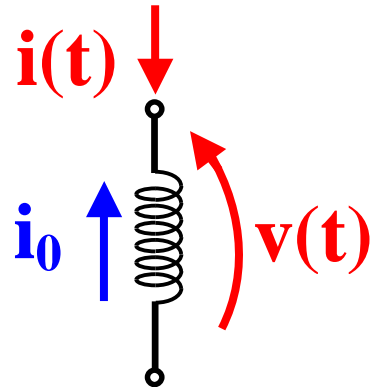
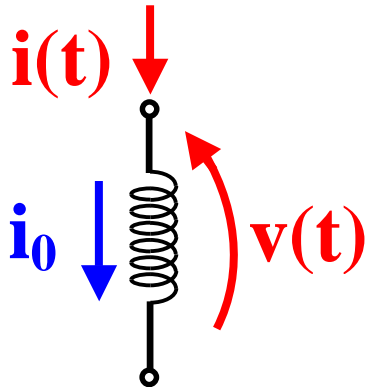


INDUTOR



Solenóide com espiras bem afastadas, mostrando as linhas de indução magnética e a sua concentração no interior da bobina.

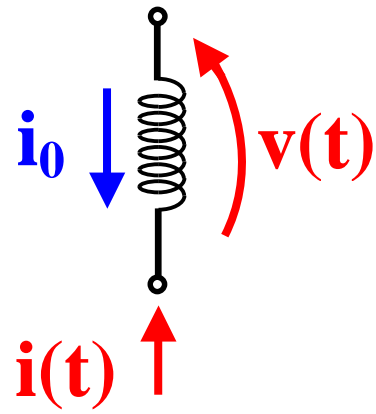
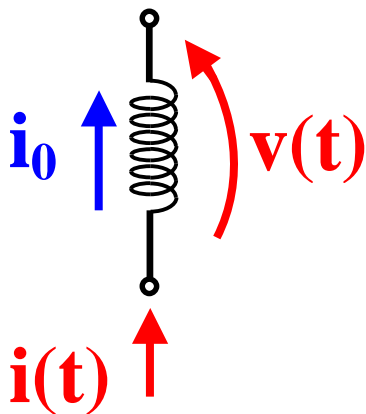
INDUTOR E CONVENÇÕES



$$v = L \frac{di}{dt}$$

$$i = \frac{1}{L} \int v dt + i_0$$

$$i = \frac{1}{L} \int v dt - i_0$$

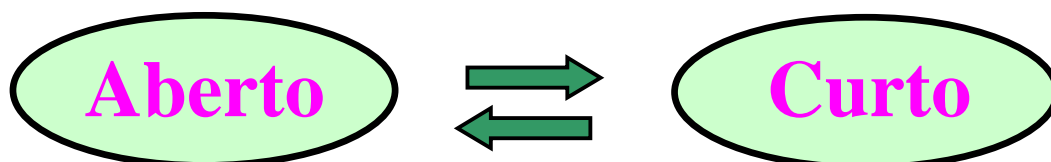
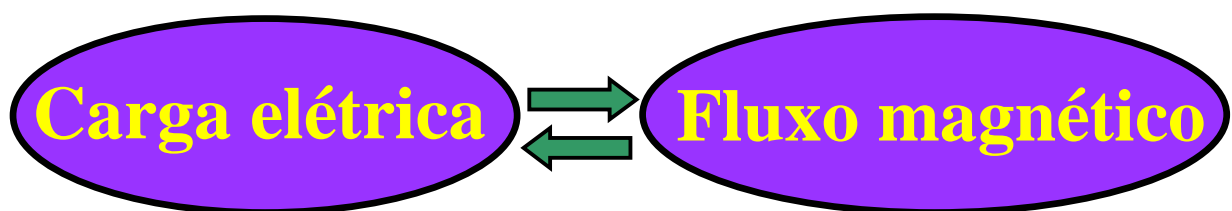
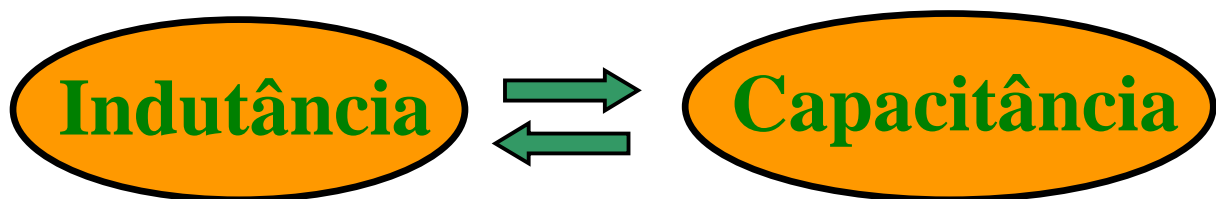
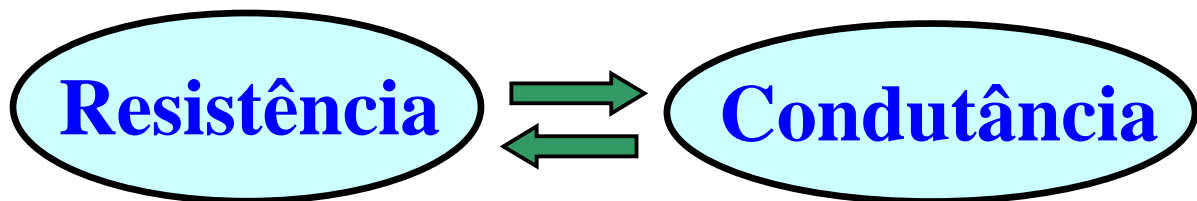
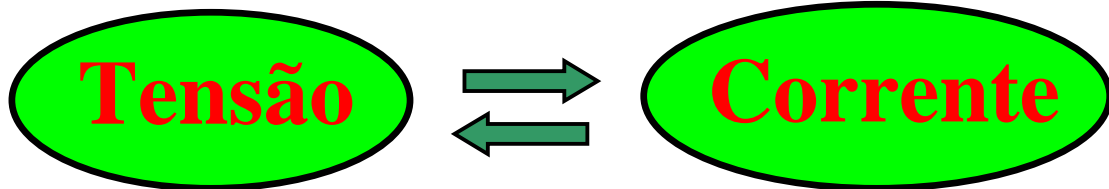


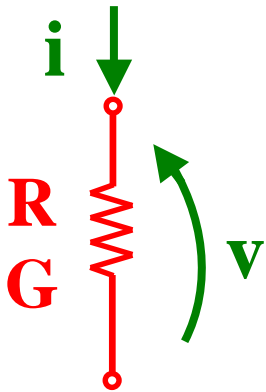
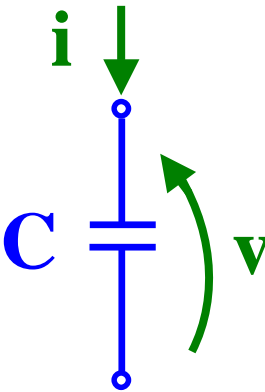
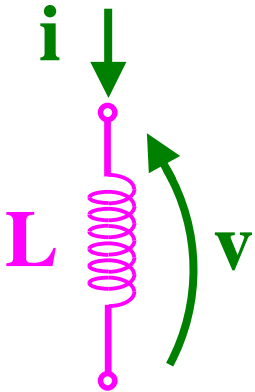
$$v = -L \frac{di}{dt}$$

$$i = \frac{-1}{L} \int v dt + i_0$$

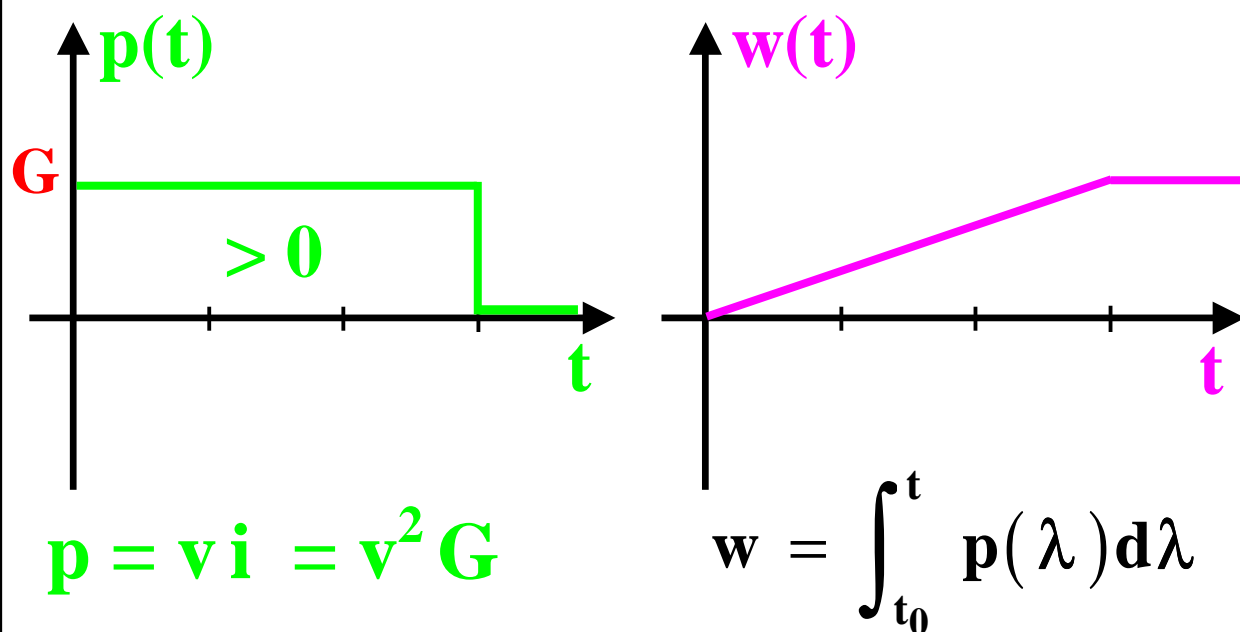
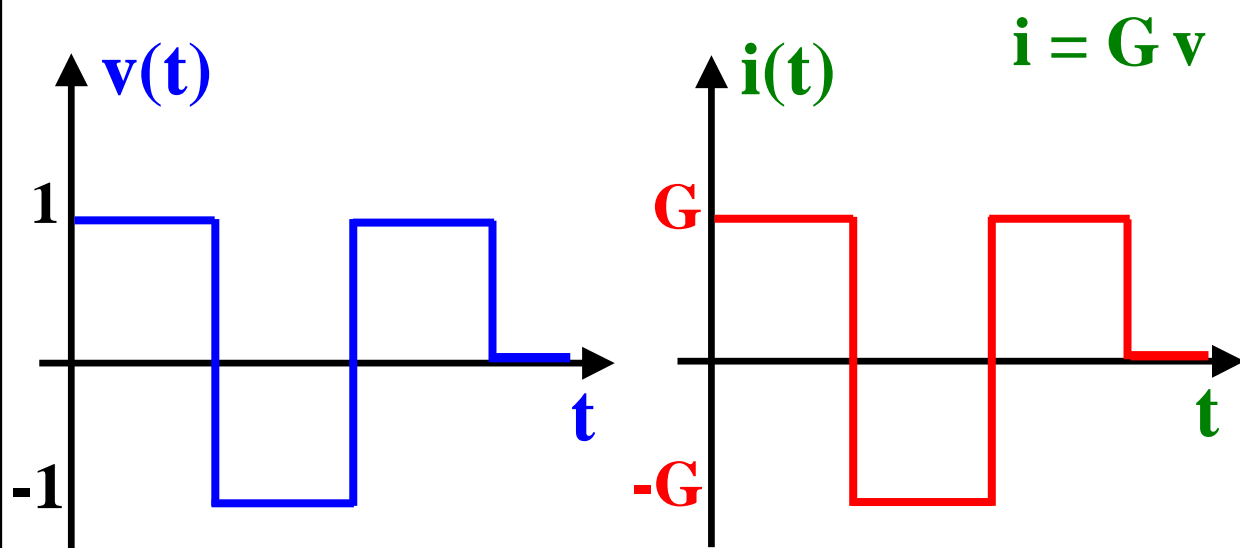
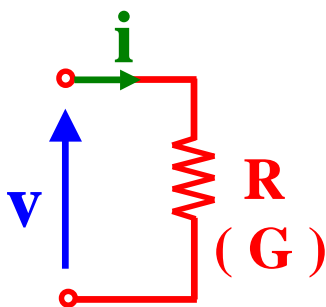
$$i = \frac{-1}{L} \int v dt - i_0$$

DUALIDADE

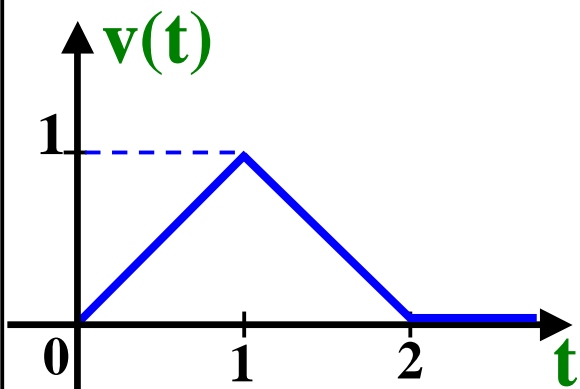
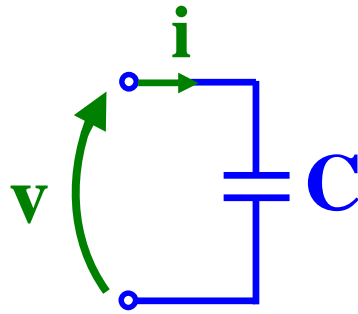


RESISTOR	CAPACITOR	INDUTOR
 $v = Ri$ $i = Gv$ $p = Ri^2$ Gv^2 v^2/R i^2/G	 $q = Cv$ $v = \frac{1}{C} \int i dt + v_0$ $i = C \frac{dv}{dt}$ $p = \frac{1}{2} C \frac{dv^2}{dt}$ $w = \frac{1}{2} Cv^2$	 $\psi = Li$ $v = L \frac{di}{dt}$ $i = \frac{1}{L} \int v dt + i_0$ $p = \frac{1}{2} L \frac{di^2}{dt}$ $w = \frac{1}{2} Li^2$

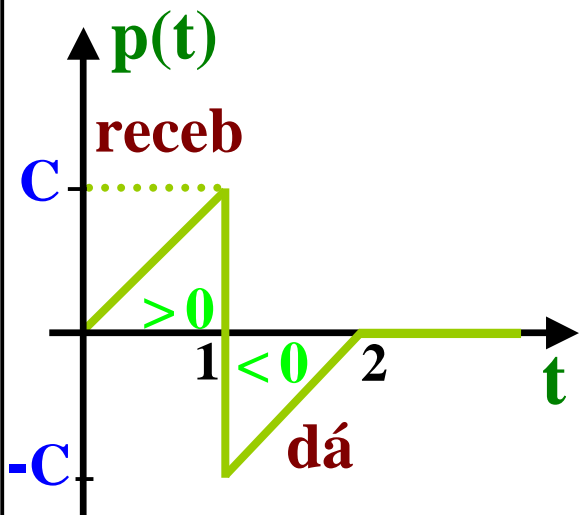
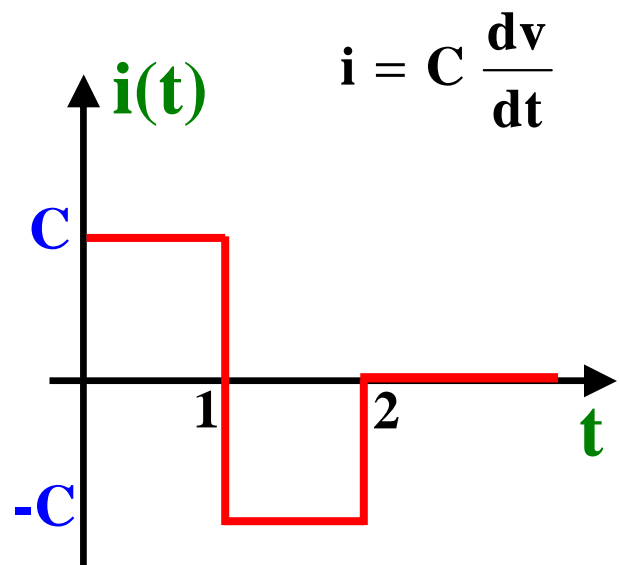
FORMAS DE ONDA EM RESISTOR



FORMAS DE ONDA EM UM CAPACITOR



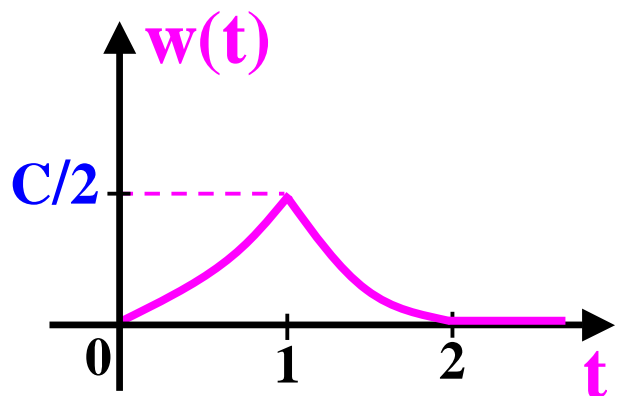
$$v(t) = \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i(\lambda) d\lambda + v(t_0)$$



$$p = v i$$

$$v(t_0) = 0$$

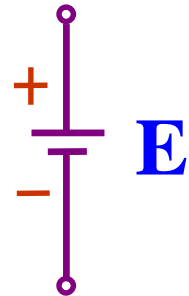
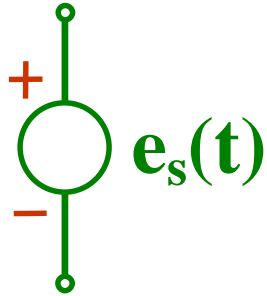
$$t_0 = 0$$



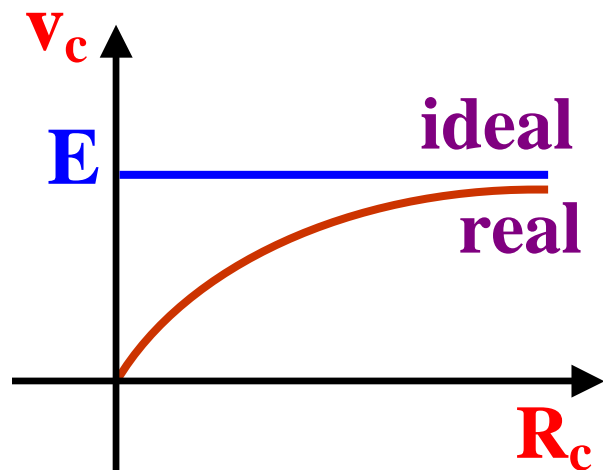
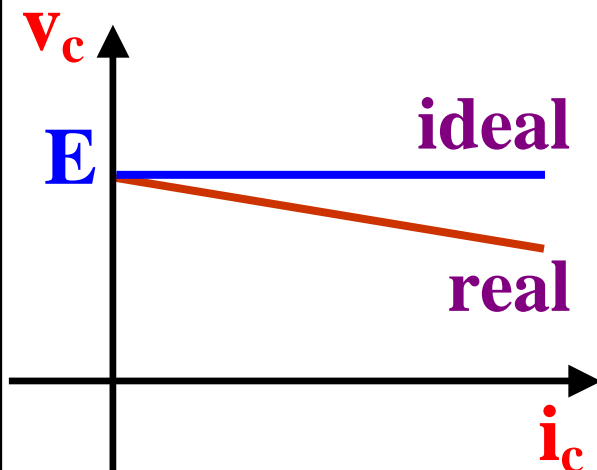
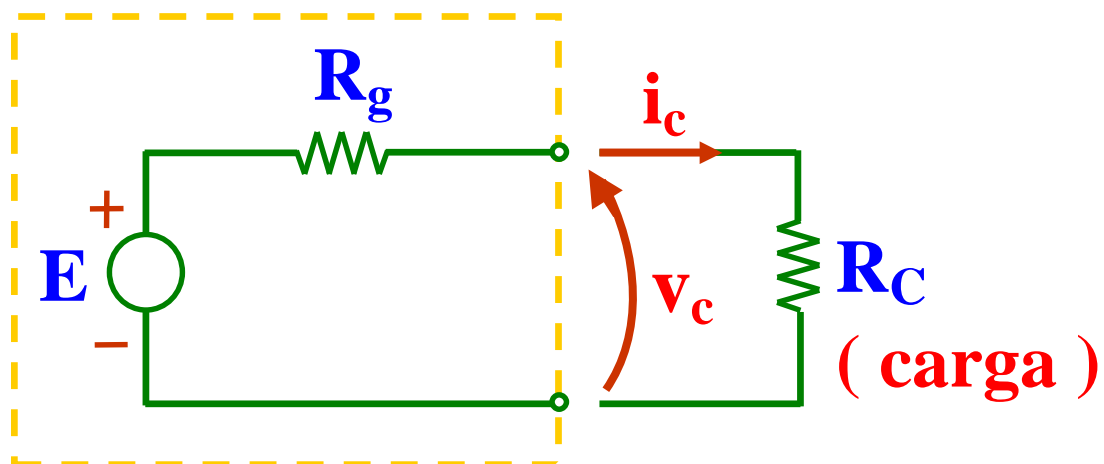
$$w = \frac{1}{2} C v^2$$

$W > 0$ passivo
(convenção receptor)

GERADORES DE TENSÃO

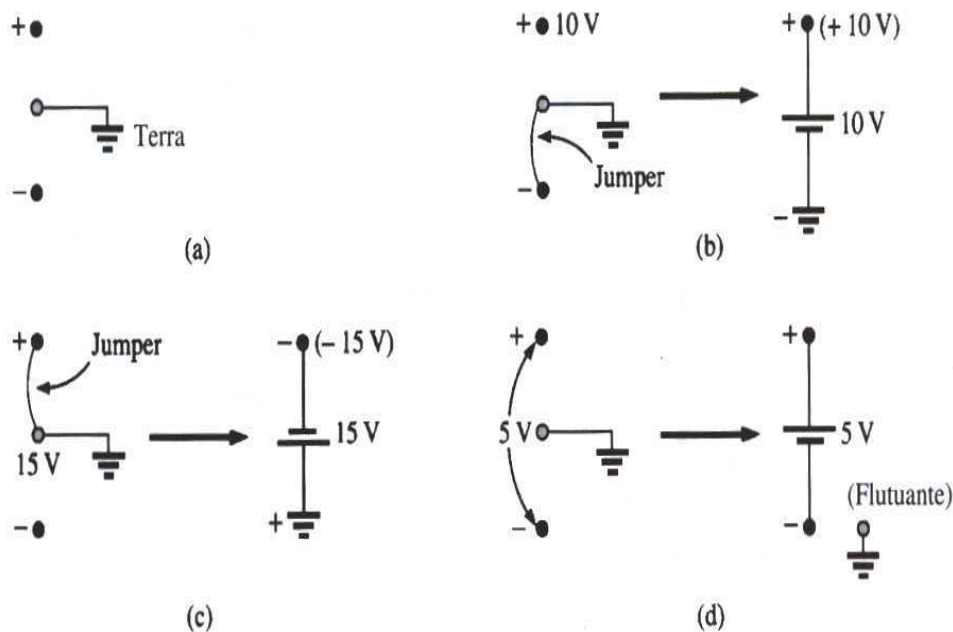


Gerador Real:



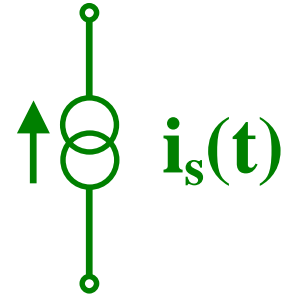
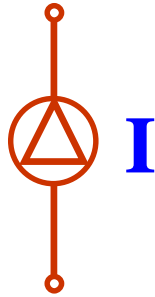
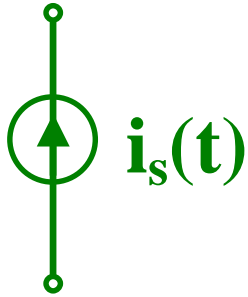
FONTES DE ALIMENTAÇÃO AC/DC

Tensão AC → Retificação e Filtragem
→ Tensão DC

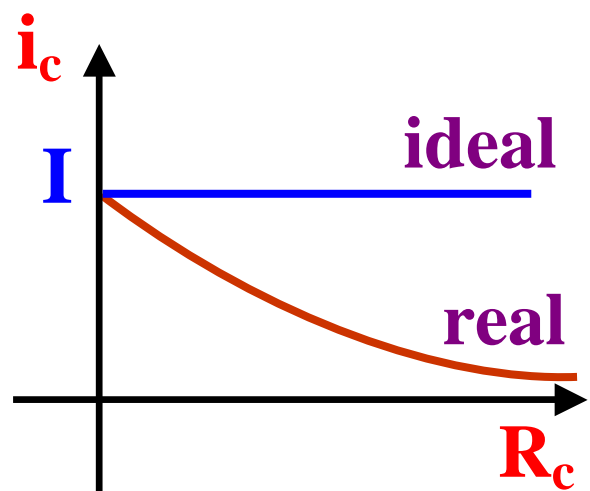
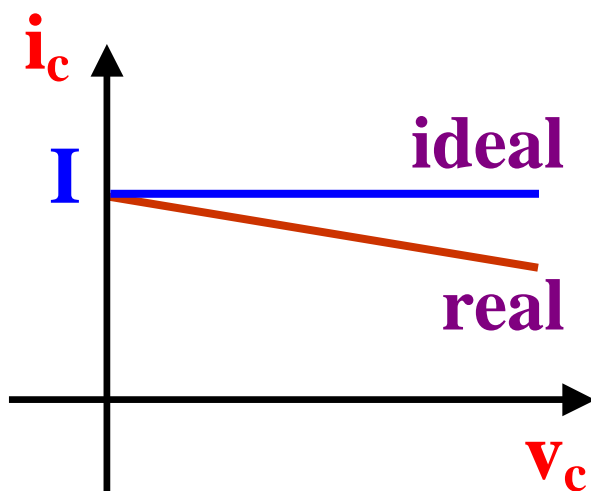
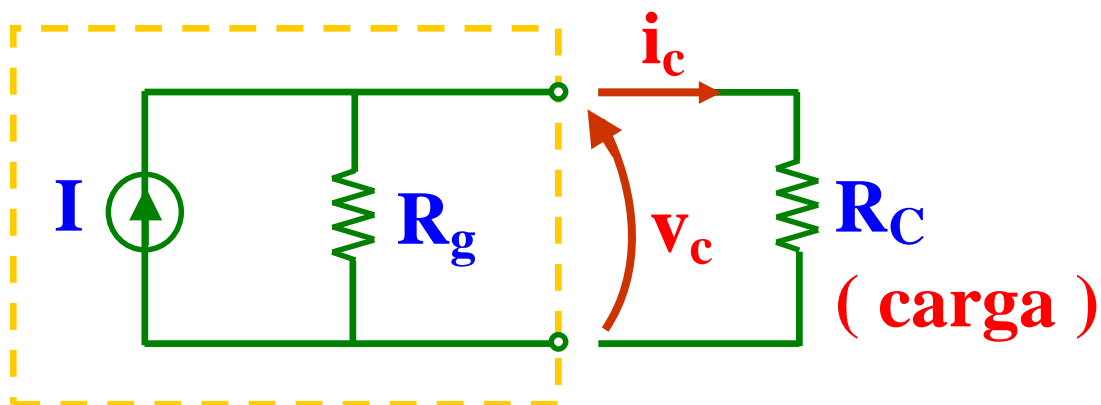


- a) Terminais disponíveis
- b) Tensão positiva em relação ao terra
- c) Tensão negativa em relação ao terra
- d) Tensão flutuante

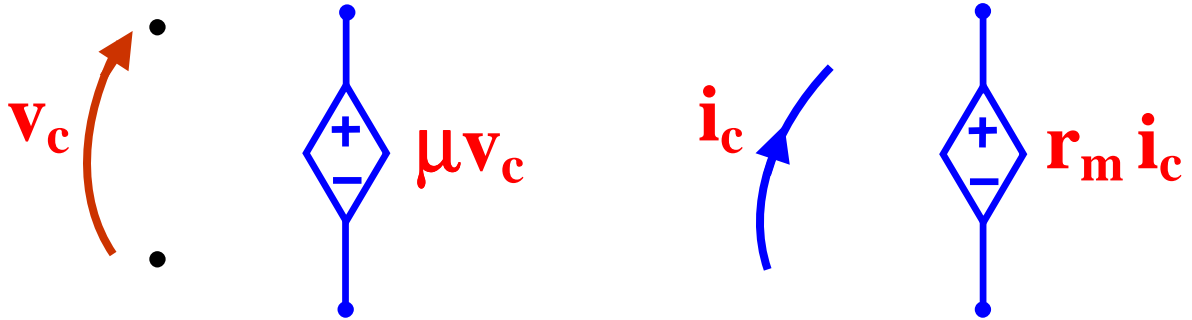
Geradores de Corrente



Gerador Real



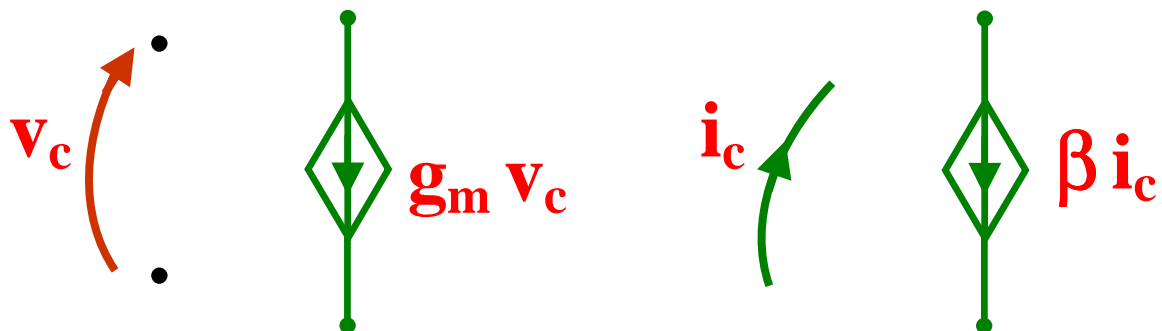
Geradores Vinculados



μ - ganho de tensão

r_m - transresistência

Geradores de Tensão



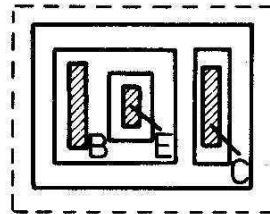
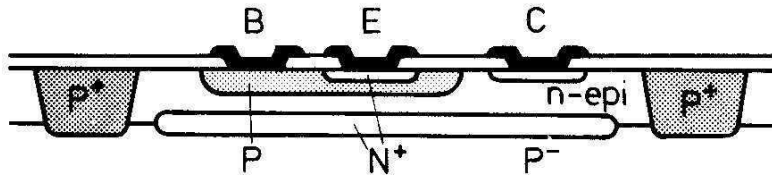
g_m - transcondutância

β - ganho de corrente

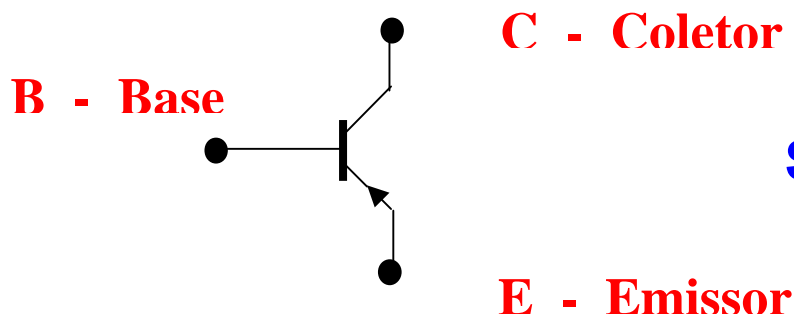
Geradores de Corrente

Aplicação dos geradores vinculados

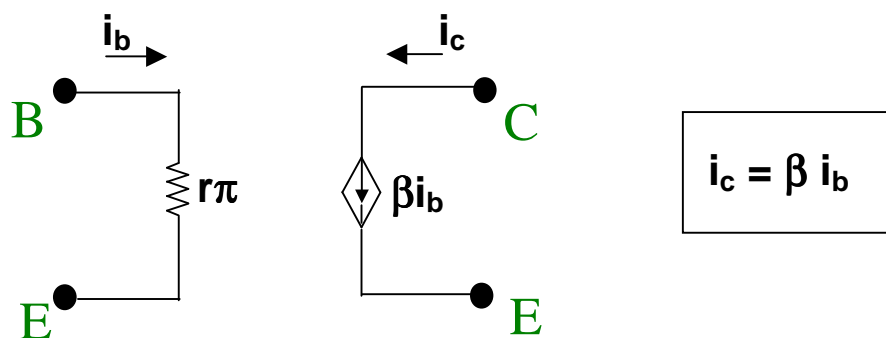
Transistor Bipolar



Estrutura Física

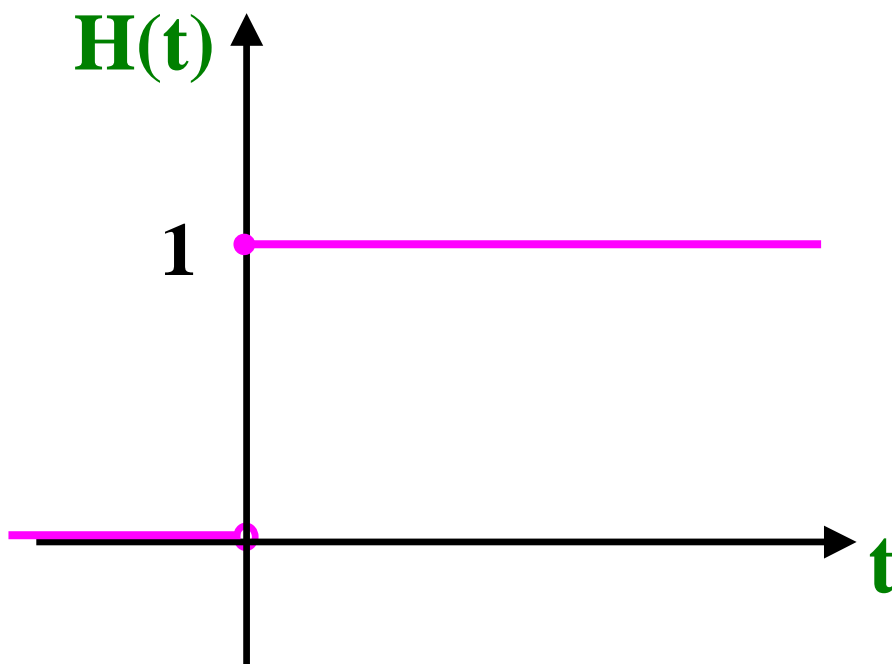


Símbolo



Modelo em circuitos

Função Degrau Unitário ou Função de Heaviside



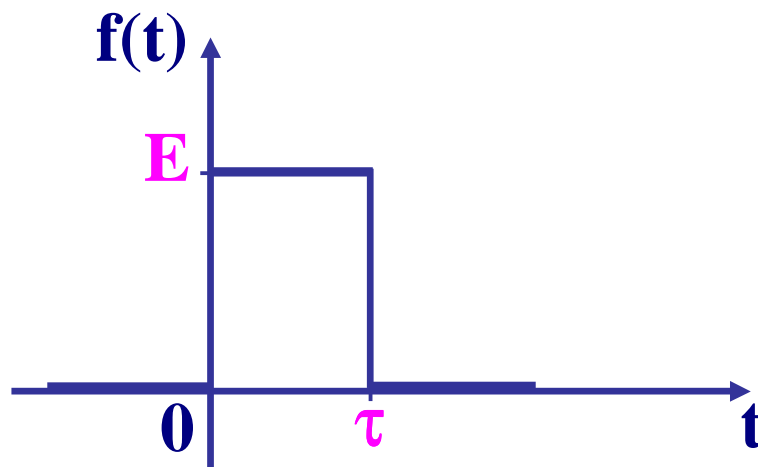
$$H(t) = u_1(t) = \mathbf{1}(t)$$

$$= \begin{cases} \mathbf{0} & \text{para } t < \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \text{para } t \geq \mathbf{0} \end{cases}$$

Funções Obtidas da Função Degrau

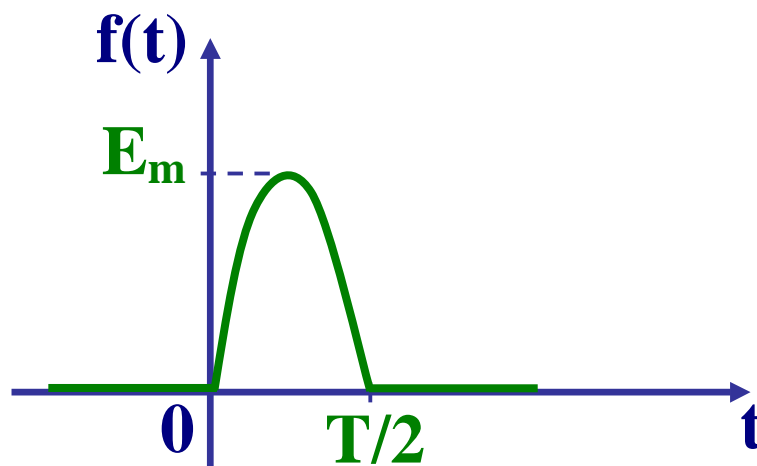
Pulso retangular de duração τ

$$f(t) = E [H(t) - H(t - \tau)]$$

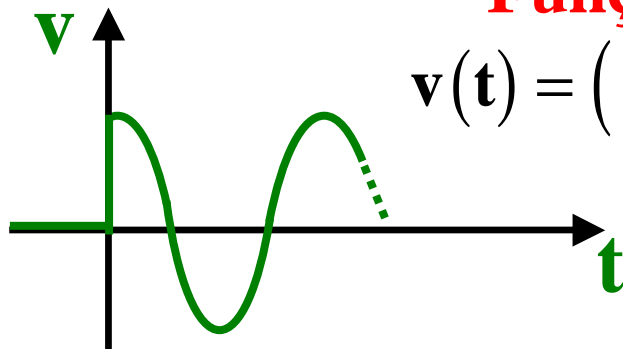


Pulso senoidal

$$f(t) = E_m \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot \left[H(t) - H\left(t - \frac{T}{2}\right) \right]$$

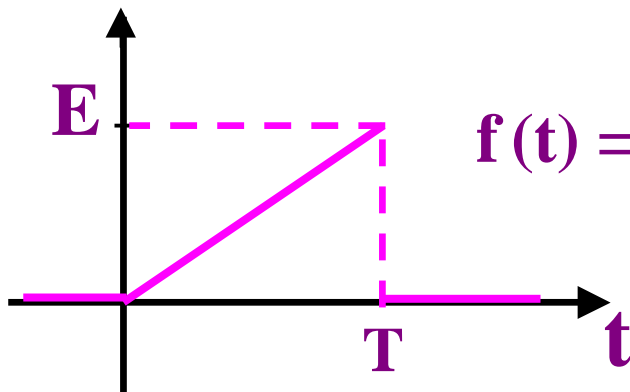


Função co-senoidal



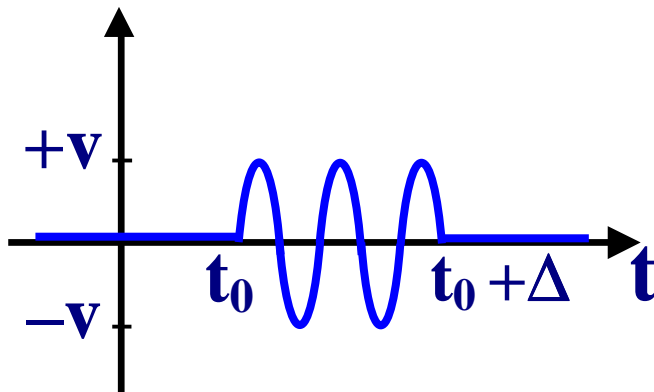
$$v(t) = \left(115\sqrt{2} \cos 377t \right) H(t)$$

Função rampa



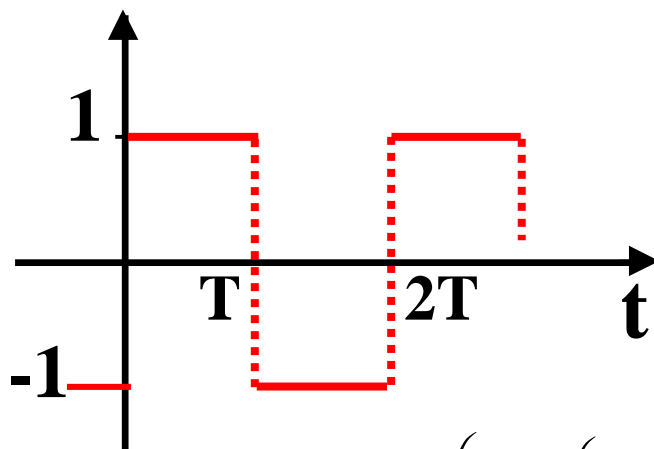
$$f(t) = t [H(t) - H(t - T)]$$

Pulso de radar



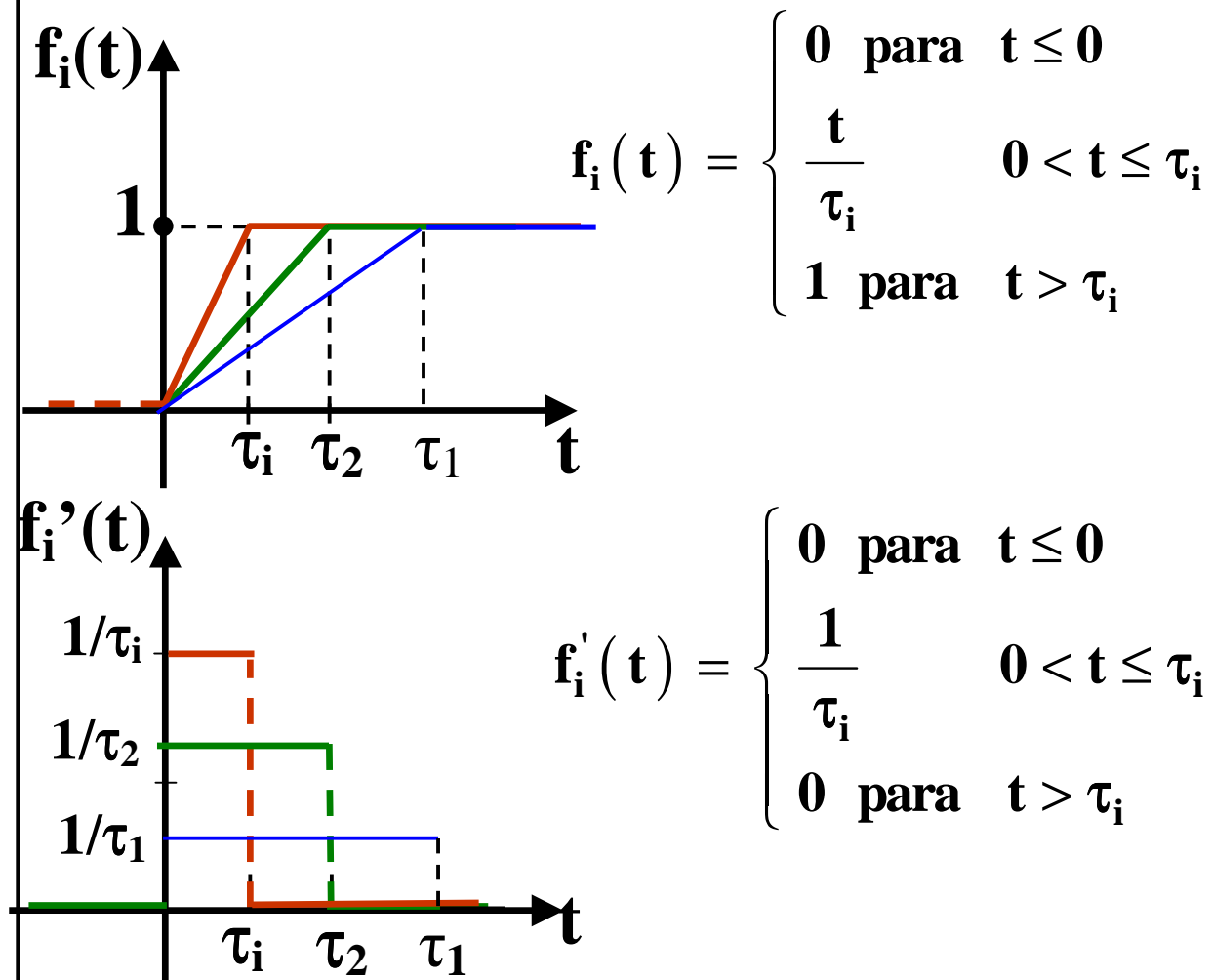
$$v(t) = V [H(t - t_0) - H(t - t_0 - \Delta)] \sin \omega(t - t_0)$$

Onda quadrada



$$f(t) = H\left(\sin\left(\frac{\pi t}{T}\right)\right) - H\left(-\sin\left(\frac{\pi t}{T}\right)\right)$$

Função impulsiva, Função delta ou Função de Dirac



Função de Dirac:

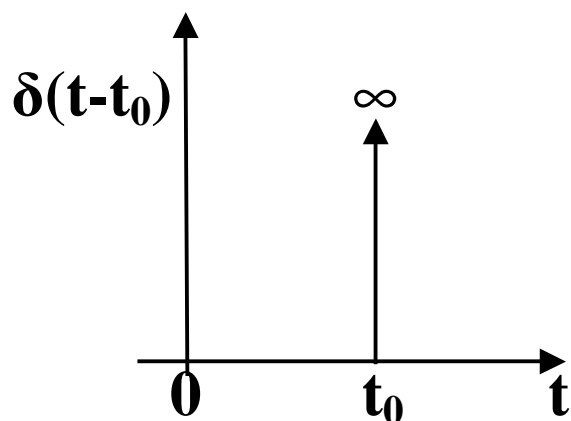
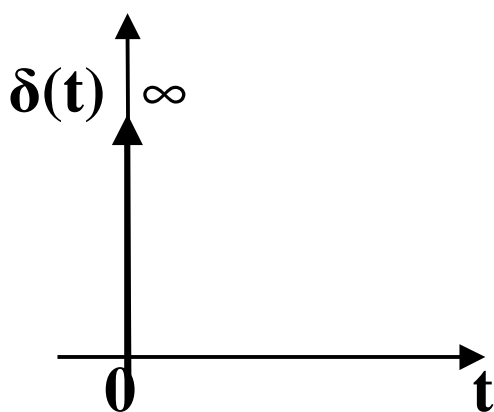
$$\delta(t) = \lim_{\tau_i \rightarrow 0} f_i'(t)$$

A função de Dirac é, de fato, uma *função generalizada*.

PROPRIEDADES DA FUNÇÃO IMPULSIVA

- $\delta(t) = 0, \quad \forall t \neq 0$
- $\delta(t-t_0) = 0, \quad \forall t \neq t_0$

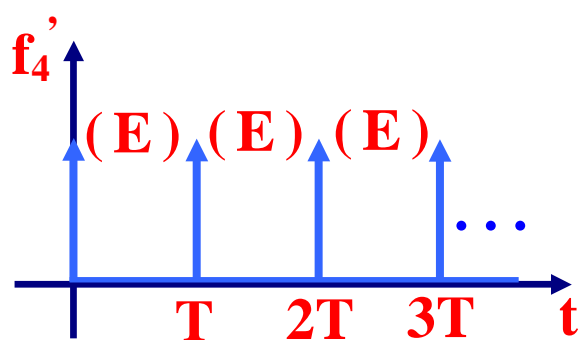
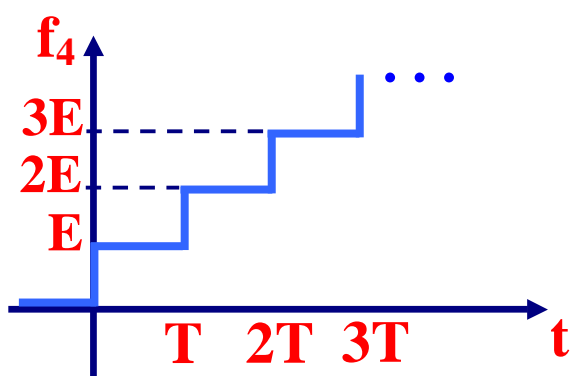
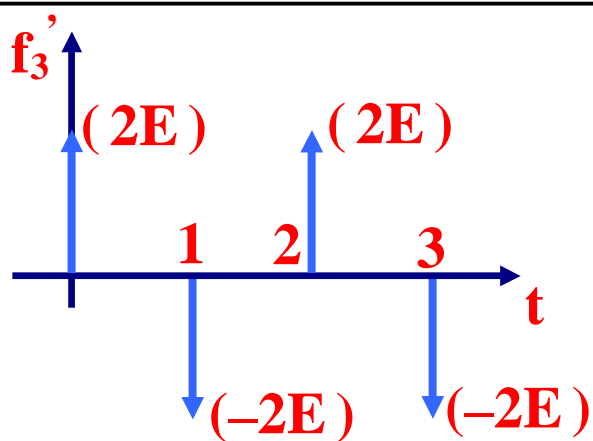
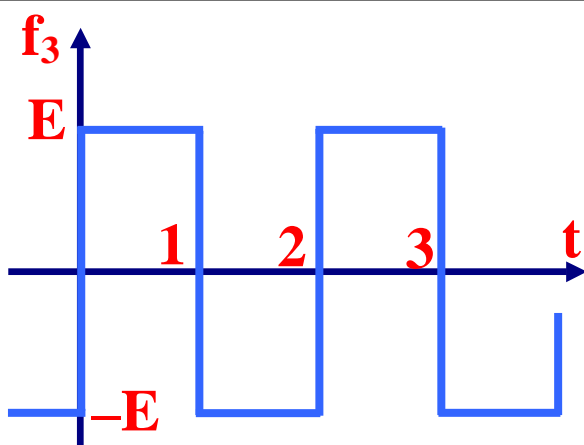
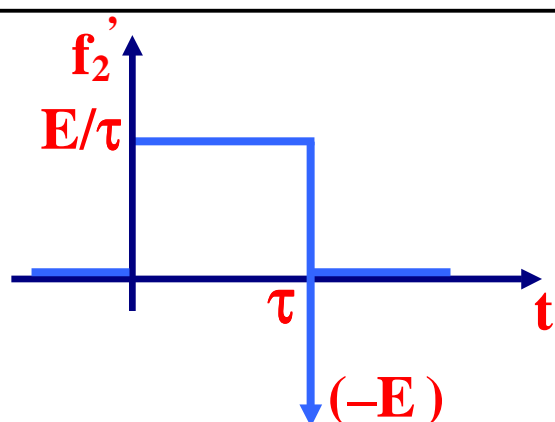
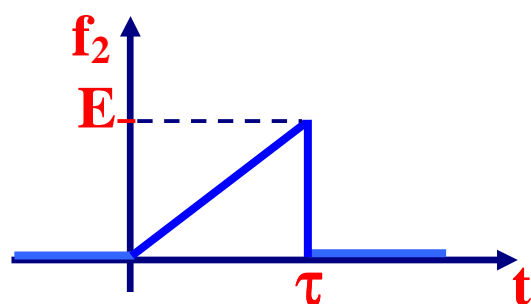
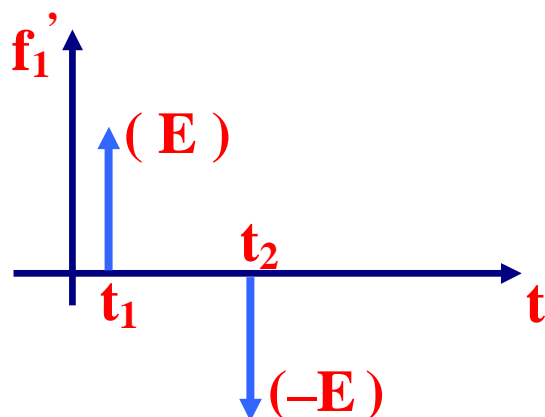
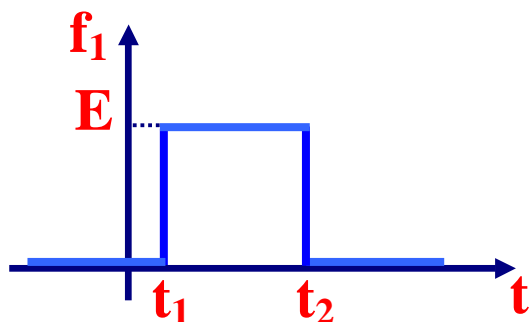
Representações gráficas da função impulsiva:



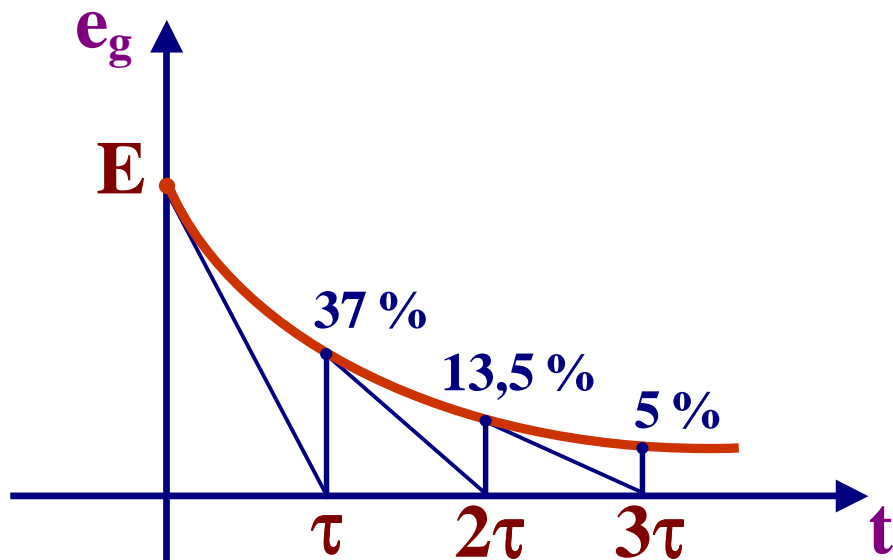
- $\int_{-t_1}^t \delta(\tau) d\tau = 1, \quad \forall t, t_1 > 0$
- $\frac{dH(t)}{dt} = \delta(t)$
- $\int_{-\infty}^{\infty} f(t-T) \cdot \delta(t) dt = f(T)$

(para $f(\cdot)$ contínua em T)

Exemplos com Função Impulsiva



Excitação Exponencial



$$e_g(t) = E e^{s t} \quad E, s \text{ reais}$$

$$s = -\sigma \quad E > 0, \sigma > 0$$

$$e_g(t) = E e^{-\sigma t} = E e^{-t/\tau}$$

$\sigma \rightarrow$ frequência neperiana (Np/s)

$\tau = \frac{1}{\sigma} \rightarrow$ constante de tempo (s)

Para $t = \tau \rightarrow e_g = E/e$

EXCITAÇÃO CO-SENOIDAL

- Derivada e Integral → Senóides
Circuito em Regime Permanente Senoidal

- Dispositivos Reais →
geram excitação senoidal

- Soma de senóides de mesma frequência = senóide
- **Análise de Fourier** → \forall função periódica = soma de senóides harmônicas, da forma

$$f_k(t) = A_{km} \cos(k\omega_0 t + \theta_k) \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

A_{km} = amplitude ou valor máximo ou valor de pico (real e > 0) da k-ésima harmônica

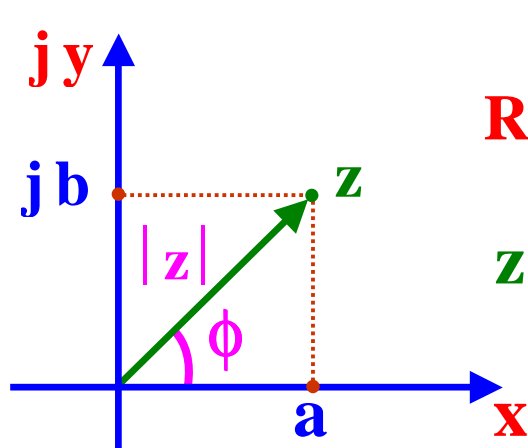
ω_0 = frequência angular fundamental (real, rd/s)

θ_k = defasagem (real, ° ou rd)

f_k = frequência da k-ésima harmônica (real, Hz ou ciclos/s)

T = período (real, s) = $1 / f_0$, $\omega_0 = 2\pi / T$

NÚMEROS COMPLEXOS



$$z = a + jb$$

Retangular ou Cartesiana

$$z = |z| e^{j\phi} = |z| \angle \phi$$

Polar

Fórmula de Euler : $e^{j\phi} = \cos \phi + j \sin \phi$

Séries de Mac Laurin:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

$$e^{jx} = \cos x + j \sin x = 1 + jx + \frac{(jx)^2}{2!} + \frac{(jx)^3}{3!} + \dots$$

$$z = |z| \cos \phi + j |z| \sin \phi = |z| (\cos \phi + j \sin \phi) = |z| e^{j\phi}$$

Identidade de Euler

$$e^{j\theta} = \cos\theta + j \operatorname{sen}\theta$$

Seja $B = \cos\theta + j \operatorname{sen}\theta$

$$\begin{aligned}\frac{dB}{d\theta} &= -\operatorname{sen}\theta + j \cos\theta \\ &= j (\cos\theta + j \operatorname{sen}\theta)\end{aligned}$$

$$\frac{dB}{d\theta} = jB$$

ou

$$\frac{dB}{B} = j d\theta$$

Integrando :

$$\ln B = j\theta + C \leftarrow \text{constante}$$

$$\text{Para } \theta = 0 \rightarrow B = 1 \rightarrow \ln B = 0$$

$$\Rightarrow C = 0 \Rightarrow B = e^{j\theta}$$

$$\Rightarrow e^{j\theta} = \cos\theta + j \operatorname{sen}\theta$$

Números Complexos

Fórmulas de Euler :

$$e^{j\phi} = \cos \phi + j \sin \phi$$

$$e^{-j\phi} = \cos \phi - j \sin \phi$$

Forma Cartesiana: $z = a + jb$

Forma Polar : $z = |z| e^{j\phi}$

$$\begin{cases} a = |z| \cos \phi \\ b = |z| \sin \phi \end{cases}$$

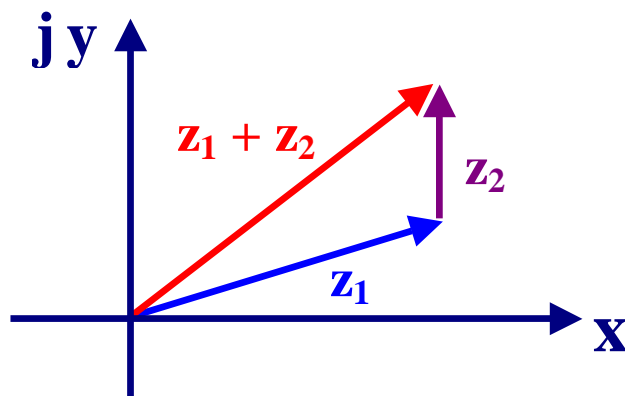
$$\begin{cases} |z| = \sqrt{a^2 + b^2} \\ \phi = \arctg b/a \end{cases}$$

Operações com Complexos

1 – Soma e Subtração → Forma Retangular ou Cartesiana

$$z_1 = a_1 + j b_1 \quad z_2 = a_2 + j b_2$$

$$z_1 \pm z_2 = (a_1 \pm a_2) + j (b_1 \pm b_2)$$



2 – Multiplicação e Divisão → Forma Polar

$$z_1 = c_1 e^{j\phi_1} \quad z_2 = c_2 e^{j\phi_2}$$

$$z_1 z_2 = c_1 c_2 e^{j(\phi_1 + \phi_2)}$$

$$z_1 / z_2 = \frac{c_1}{c_2} e^{j(\phi_1 - \phi_2)}$$

Números Complexos

Propriedades :

$$z = a + j b = |z| e^{j\phi}$$

$$z^* = a - j b = |z| e^{-j\phi}$$

$$z + z^* = 2a = 2 \operatorname{Re}(z)$$

$$|e^{j\phi}| = 1$$

$$e^{\pm j\pi} = 1 \angle \pm \pi = -1$$

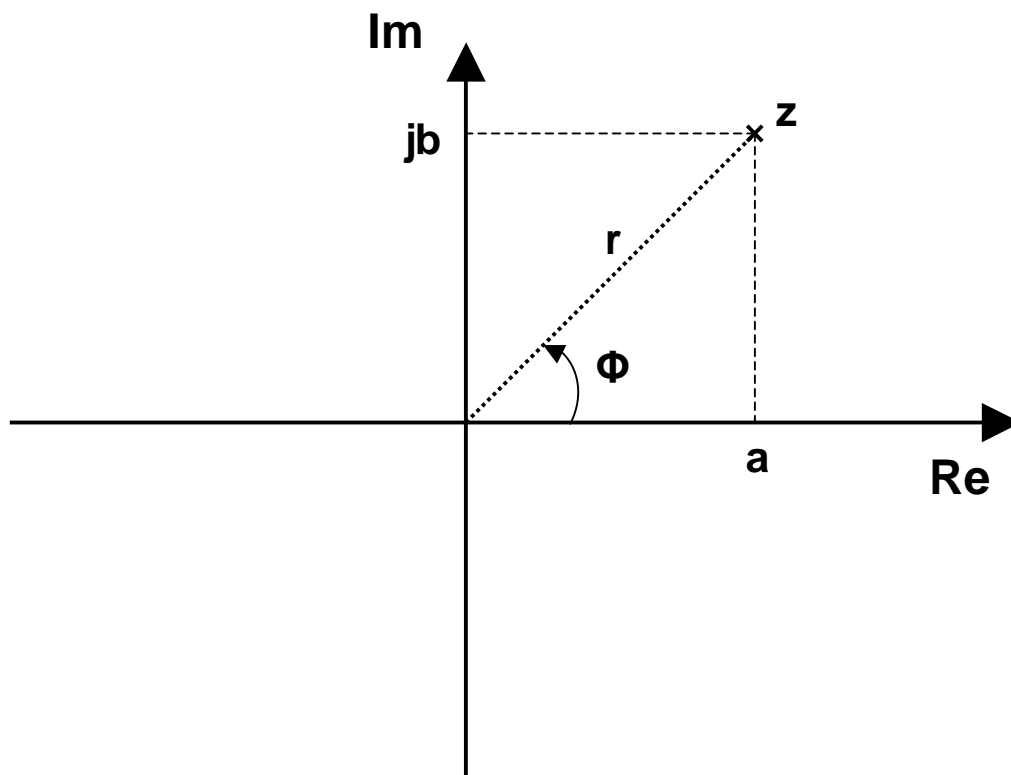
$$e^{\pm j\pi/2} = 1 \angle \pm \pi/2 = \pm j 1$$

Fórmulas de Moivre :

$$\cos \omega t = \frac{1}{2} \left(e^{j\omega t} + e^{-j\omega t} \right)$$

$$\operatorname{sen} \omega t = \frac{1}{2j} \left(e^{j\omega t} - e^{-j\omega t} \right)$$

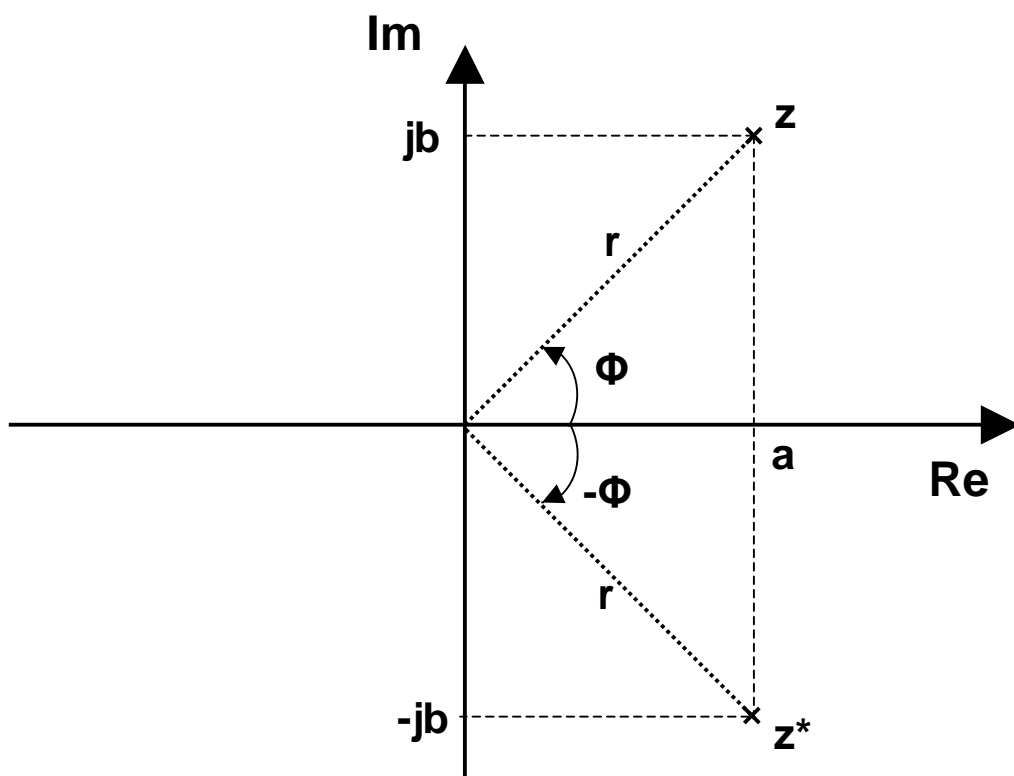
Plano Complexo



Coordenadas Retangulares: a, b

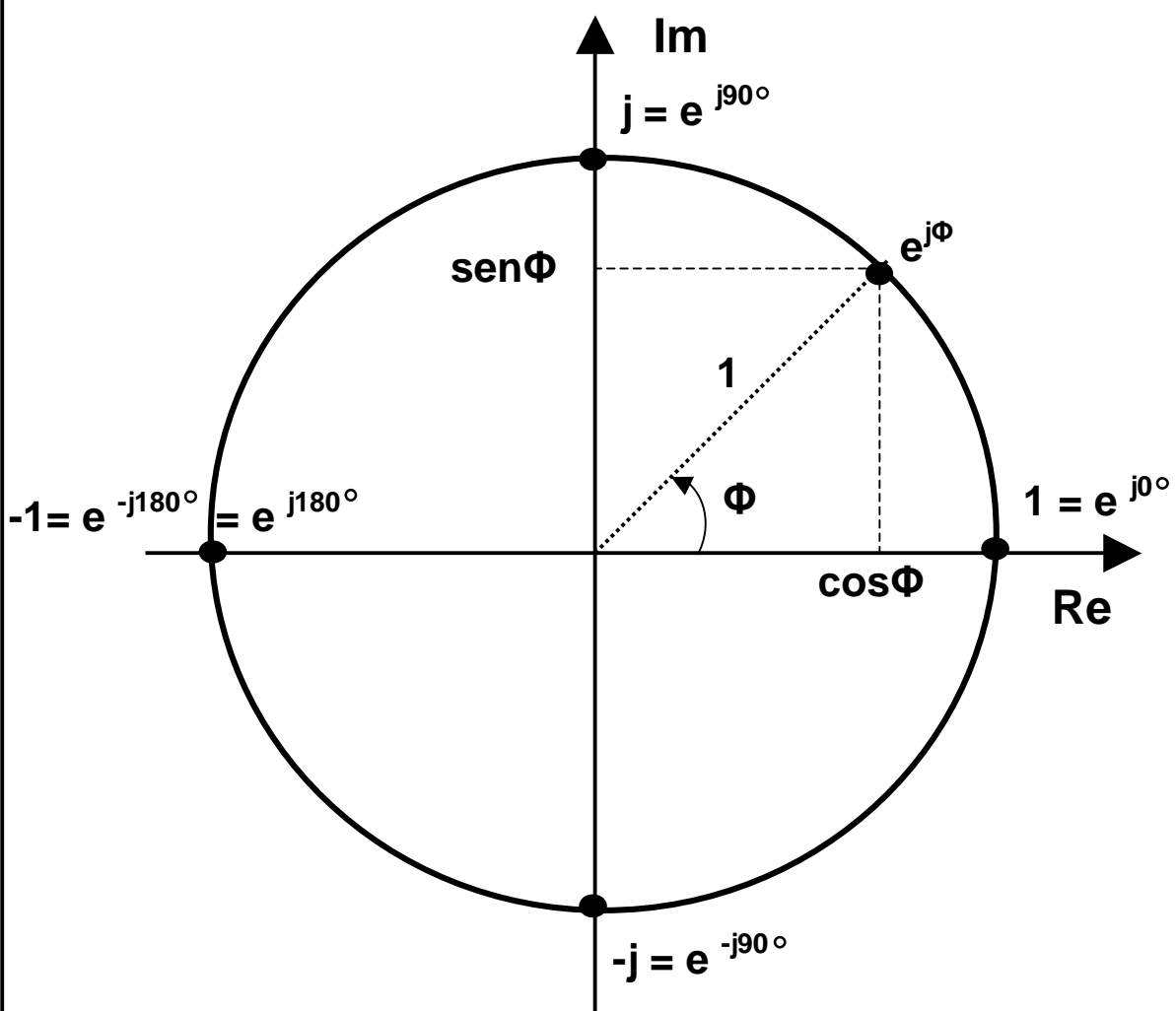
Coordenadas Polares: r, Φ

Plano Complexo



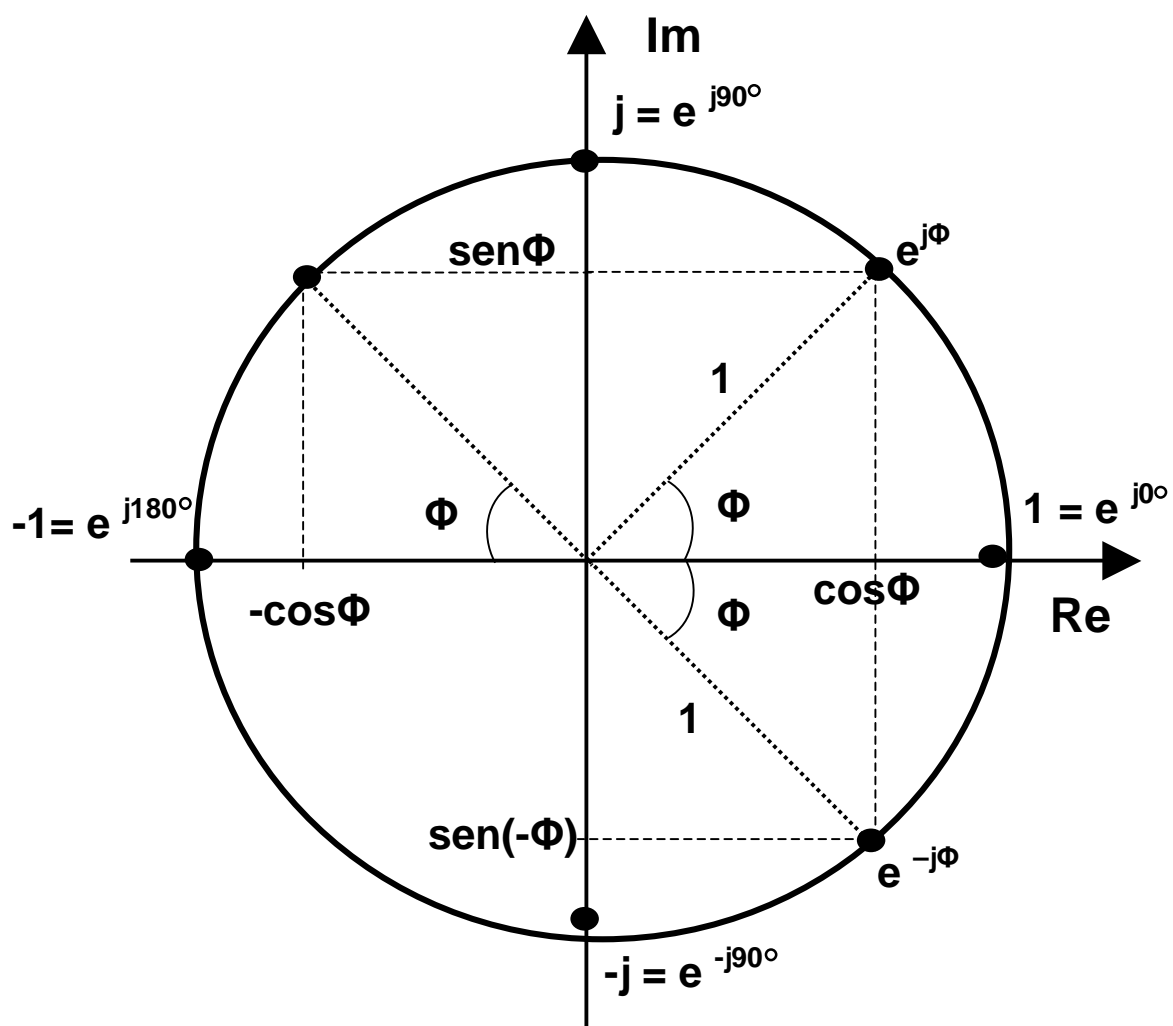
Conjugados

Plano Complexo



Círculo Unitário

Plano Complexo



Círculo Unitário

FASORES

$$A_m \cos (\omega t + \theta) =$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} (\hat{A}_m e^{j\omega t} + \hat{A}_m^* e^{-j\omega t}) \\ \text{Re} [\hat{A}_m e^{j\omega t}] \end{array} \right.$$

Valor instantâneo do sinal →

Domínio do tempo →

$$s(t) = A_m \cos (\omega t + \theta)$$

Fasor associado a sinal senoidal:

$$\hat{S} = A_m e^{j\theta} = A_m \angle \theta$$

CO-SENÓIDES E FASORES

Função co-senoidal no domínio do tempo:

$$y(t) = Y_m \cos(\omega t + \theta)$$

$$Y_m > 0, \omega > 0$$

Fasor que a representa:

- Expressar a função como **parte real do complexo**:

$$\Re[Y_m e^{j(\omega t + \theta)}] = \Re[Y_m e^{j\theta} \cdot e^{j\omega t}]$$

- O **fasor** representativo dessa **função** será definido por:

$$\hat{Y} = Y_m e^{j\theta}$$

$$Y_m = |\hat{Y}|, \theta = \arg \hat{Y}$$

- Notação de **Kennely**:

$$\hat{Y} = Y_m \angle \theta$$

- ❖ ângulo θ pode ser fornecido em graus ou radianos
- ❖ frequência ω deve ser dada à parte
- ❖ o módulo e o ângulo do fasor são, respectivamente, a amplitude e fase da função co-senoidal

CO-SENÓIDES E FASORES

Função co-senoidal representada por fasor:

Dados um **fasor** e sua frequência, determinar a correspondente **função do tempo**:

- Escrever o **fasor** na forma exponencial:

$$\hat{Y} = Y_m e^{j\theta}$$

- Adicionar a informação de **frequência**:

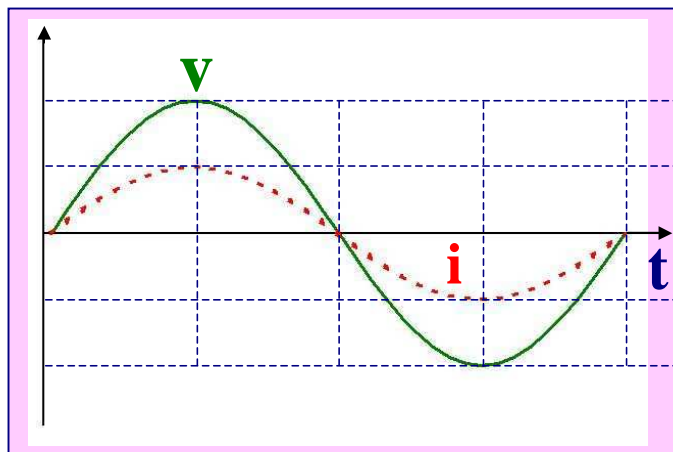
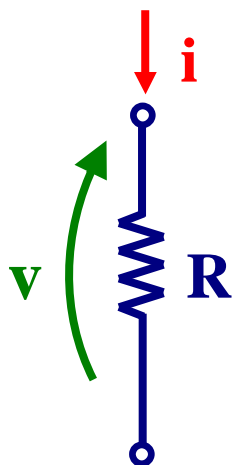
$$\hat{Y} e^{j\omega t} = Y_m e^{j(\omega t + \theta)}$$

- Tomar a parte real desta expressão:

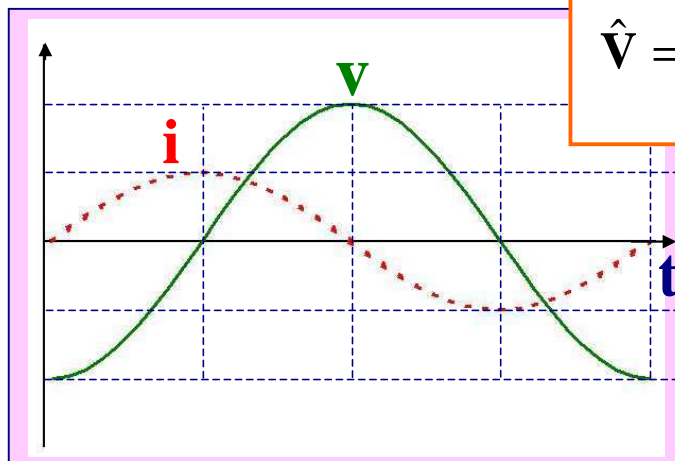
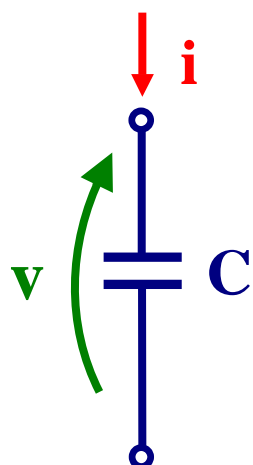
$$y(t) = \Re[Y_m e^{j(\omega t + \theta)}] = Y_m \cos(\omega t + \theta)$$

O módulo e o ângulo do **fasor** são, respectivamente, a amplitude e a defasagem da **função $y(t)$**

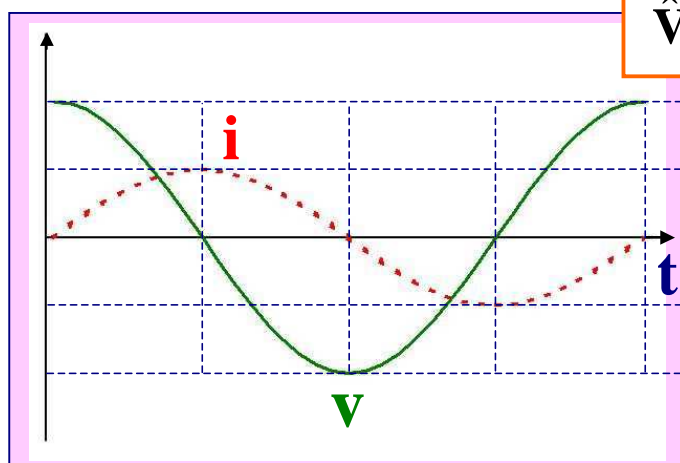
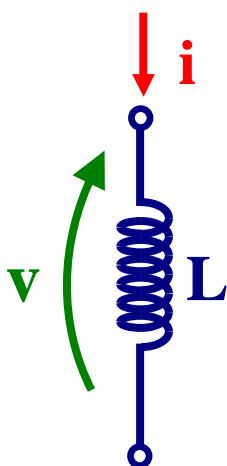
Relações v - i senoidais nos bipolos ideais



$$\hat{V} = R\hat{I}$$



$$\hat{V} = \frac{1}{j\omega C} \hat{I}$$

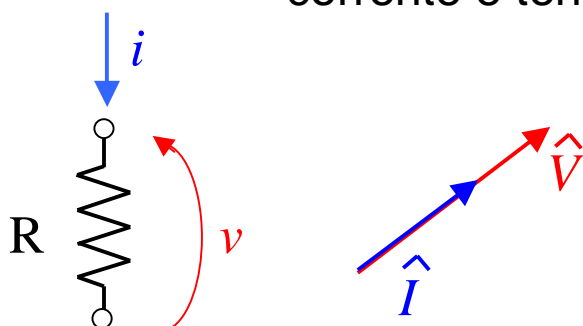


$$\hat{V} = j\omega L \hat{I}$$

DIAGRAMAS FASORIAIS NOS ELEMENTOS BÁSICOS DE CIRCUITOS

Resistências

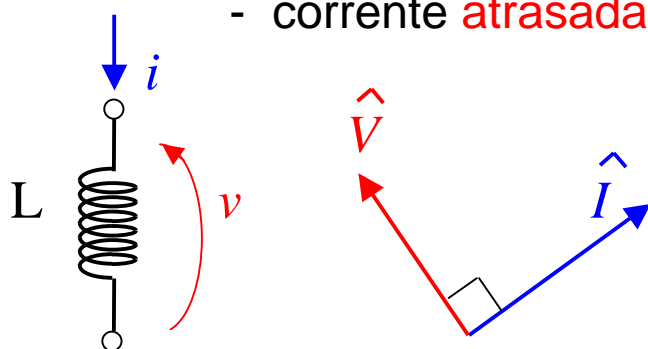
- corrente e tensão **em fase**



$$\hat{V} = R \hat{I}$$

Indutâncias

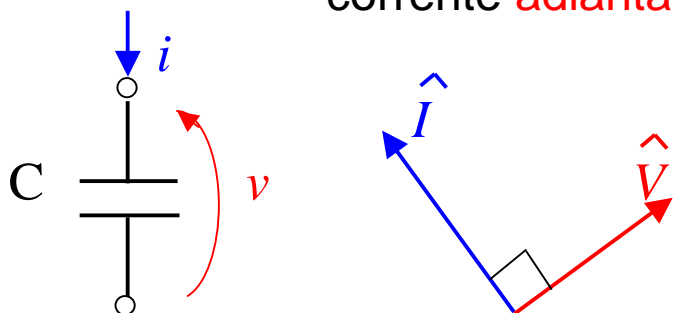
- corrente **atrasada** de $\pi/2$



$$\hat{V} = j \omega L \hat{I}$$

Capacitâncias

- corrente **adiantada** de $\pi/2$



$$\hat{V} = -j \hat{I} / (\omega C)$$

Relações Fasoriais \hat{V} - \hat{I}

Resistor

$$\hat{V} = R\hat{I}$$

$$\hat{I} = G\hat{V}$$

Capacitor

$$\hat{V} = -j\frac{1}{\omega C}\hat{I}$$

$$\hat{I} = j\omega C\hat{V}$$

Indutor

$$\hat{V} = j\omega L\hat{I}$$

$$\hat{I} = -j\frac{1}{\omega L}\hat{V}$$

Impedância: $Z = \hat{V} / \hat{I}$

Admitância: $Y = \hat{I} / \hat{V}$

Resistor

$$Z = R$$

$$Y = G$$

Capacitor

$$Z = \frac{1}{j\omega C}$$

$$Y = j\omega C$$

Indutor

$$Z = j\omega L$$

$$Y = \frac{1}{j\omega L}$$

Excitação Co-senoidal

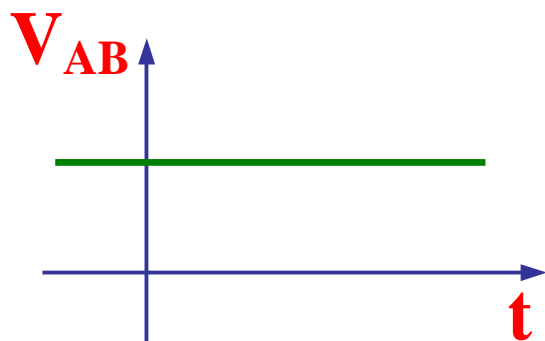
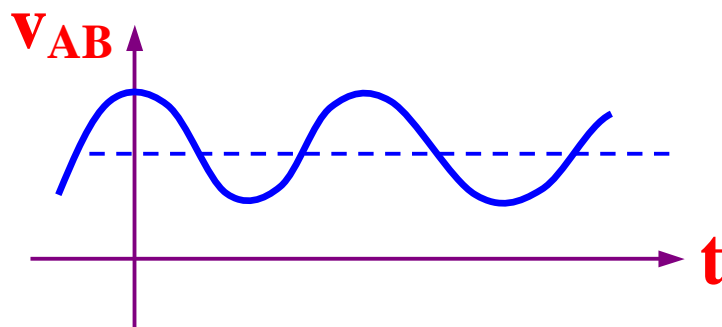
$$f(t) = A_m \sin(\omega t + \phi) = A_m \cos(\omega t + \phi - 90^\circ)$$

$$\sin a = \cos(a - 90^\circ) \quad *$$

$$\sin a = \cos(90^\circ - a)$$

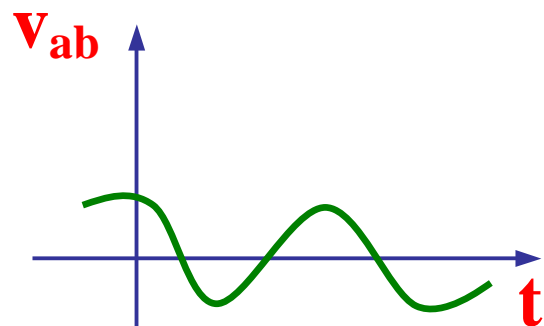
$$a = \omega t + \phi$$

Co-senóide + DC \rightarrow



Componente Contínua
DC

+



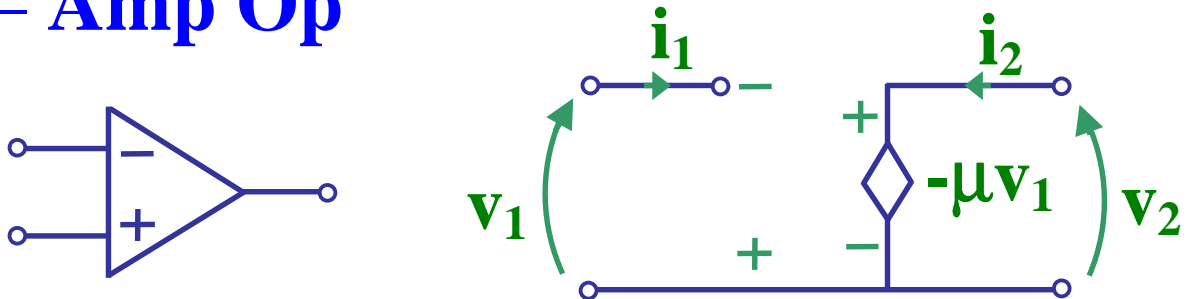
Componente incremental
AC (alternativa)

Valor Médio

$$V_{AB} = \frac{1}{T} \int_0^T v_{AB} dt$$

QUADRIPOLOS

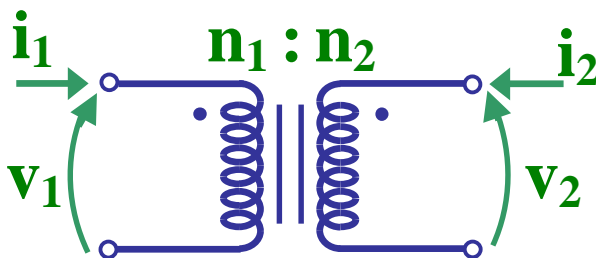
– Amp Op



$$\begin{cases} v_2 = -\mu v_1 \\ i_1 = 0 \end{cases}$$

$\mu \rightarrow$ ganho de tensão

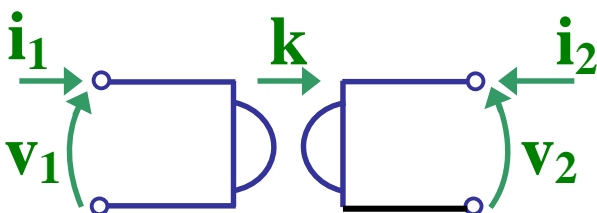
– Trafo ideal



$$\begin{cases} v_2 = \frac{n_2}{n_1} v_1 \\ i_2 = -\frac{n_1}{n_2} i_1 \end{cases}$$

$n_1 / n_2 =$ relação de transformação

– Girador ideal



$$\begin{cases} v_1 = k i_2 \\ v_2 = -k i_1 \end{cases}$$