

Matemática Financeira



Estácio



2015



Estácio



Editorial

Comitê Editorial

Durval Corrêa Meirelles
Juarez Jonas Thives Júnior
Ornella Pacífico
Jair do Canto Abreu Júnior
Andreia Marques Maciel

Autora do Original

Ornella Pacífico

© UniSEB © Editora Universidade Estácio de Sá

Todos os direitos desta edição reservados à UniSEB e Editora Universidade Estácio de Sá.

Proibida a reprodução total ou parcial desta obra, de qualquer forma ou meio eletrônico, e mecânico, fotográfico e gravação ou qualquer outro, sem a permissão expressa do UniSEB e Editora Universidade Estácio de Sá. A violação dos direitos autorais é punível como crime (Código Penal art. 184 e §§: Lei 6.895/80), com busca, apreensão e indenizações diversas (Lei 9.610/98 – Lei dos Direitos Autorais – arts. 122, 123, 124 e 126).

Sumário

Matemática Financeira

Capítulo 1: Juros Simples e

Juros Compostos 7

Objetivos da sua aprendizagem 7

Você se lembra? 7

Introdução 8

1.1 Matemática Financeira e o Valor do dinheiro no tempo 8

1.2 Inflação 13

1.3 Juros Simples 14

1.4 Juros Compostos 22

1.5 Taxas de Juros 26

1.6 Títulos de renda fixa 33

Atividades 36

Reflexão 38

Leituras recomendadas 38

Referências 38

No próximo capítulo 39

Capítulo 2: Desconto simples e desconto composto 41

Objetivos da sua aprendizagem 41

Você se lembra? 41

Introdução 42

2.1 Desconto simples 43

2.2 Desconto Composto 49

2.3 Fórmulas utilizadas 52

Atividades 52

Reflexão 55

Leitura Recomendada 55

Referências 56

No próximo capítulo 56

Capítulo 3: Série de Pagamentos/Recebimentos 57

Objetivos da sua aprendizagem 57

Você se lembra? 57

Introdução 58

3.1 Série uniforme de pagamentos postecipada 64

3.2 Série Uniforme de Pagamentos Antecipada 69

3.3 Plano de Poupança 71

Atividades	74
Reflexão	74
Leitura recomendada.....	75
Referências.....	75
No próximo capítulo	75
Capítulo 4: Sistemas de amortização de empréstimos e financiamentos	77
Objetivos da sua aprendizagem	77
Você se lembra?	77
Introdução	78
4.1 Sistema de amortização constante – Tabela SAC	78
4.2 Sistema de amortização francês – tabela price	82
4.3 Sistema de amortização americano – tabela saa	88
4.4 Sistema de Amortização Misto (SAM).....	90
4.5 Comparação entre os métodos SAC, SAF e SAM.....	93
Atividades	93
Leitura recomendada.....	94
Referências.....	94
No próximo capítulo	94
Capítulo 5: Análise de Investimentos –	
Taxa Interna de Retorno, Valor Presente Líquido e Payback	95
Objetivos da sua aprendizagem	95
Você se lembra?	95
Introdução	96
5.1 <i>Payback</i>	97
5.2 Valor presente líquido (VPL)	102
5.3 Taxa interna de retorno (tir)	106
Atividades	108
Reflexão	109
Leitura recomendada.....	109
Referências.....	110
Gabarito.....	111

Apresentação

Prezados(as) alunos(as)

A Matemática Financeira tem como objetivo principal o estudo do valor do dinheiro no tempo. Além disso, esta disciplina visa mostrar ao aluno as formas de utilização da matemática financeira em transações empresariais e pessoais. Toda empresa e pessoa necessitará, em algum momento, utilizar a matemática financeira para calcular taxas e valores no decorrer do tempo e tomar suas decisões econômicas. Podemos então, usá-la de maneira simples e correta.

Muitos alunos e alunas sentem medo da matemática. Mas, aqui a sensação pode ser diferente. Temos duas opções: ou vamos odiar a matemática financeira ou vamos aprender a gostar dela. Eu fico com a última opção.

E vocês? Vamos todos aprender a gostar da matemática e assim o aprendizado será prazeroso. Imagina que você descobrirá como os bancos cobram os juros. Irão saber se suas aplicações realmente são lucrativas economicamente. Aos comerciantes, entenderão como os bancos descontam seus títulos a receber etc. De forma interdisciplinar, a matemática calcula valores (\$) e taxas (%) no decorrer do tempo.

Assim, este material está dividido em cinco capítulos, além de um apêndice com um manual básico da calculadora HP-12C.

No primeiro capítulo são apresentados os regimes de capitalização simples e composta e também suas utilizações e forma de cálculo. Neste capítulo também são abordadas as taxas de juros referentes a cada regime de capitalização.

Se demorarmos em pagar uma dívida pagamos juros, já se anteciparmos o pagamento temos direito a um desconto. No capítulo dois são apresentadas as metodologias de desconto tanto no regime simples quanto no composto.

Já o terceiro capítulo aborda como devemos calcular as prestações de um financiamento, além dos planos de poupança. Neste caso são apresentadas as série uniforme de pagamentos.

O quarto capítulo traz os sistemas de amortização: Constante, Francês, Americano e Misto.

E por fim, no capítulo cinco são apresentadas as ferramentas para análise de viabilidade dos projetos de investimentos, o Valor Presente Líquido (VPL), a Taxa Interna de Retorno (TIR) e o payback.

Muitos exercícios além de serem resolvidos algebricamente também são resolvidos com auxílio da calculadora financeira HP-12C, nos casos em que são possíveis.

Vale lembrar que a matemática financeira pode ser cursada com o uso da HP-12C. Para quem já a tem, ótimo. Para quem não a tem, é possível encontrar vários emuladores gratuitos disponíveis na internet.

Juros Simples e Juros Compostos

Neste primeiro capítulo aprenderemos os conceitos iniciais relativos à Matemática Financeira. Será apresentado o conceito de valor do dinheiro no tempo os dois regimes de capitalização, o regime de juros simples e o de juros compostos. Também será demonstrado o comportamento das taxas de juros em cada regime de capitalização.

Objetivos da sua aprendizagem

- Entender o mecanismo do cálculo dos juros simples;
- Construir um diagrama de fluxo de caixa;
- Conhecer as taxas de juros empregadas no regime de capitalização simples.
- Conhecer a aplicação de juros compostos
- Calcular valores e taxas ao longo do tempo com juros compostos

Você se lembra?

De algum dinheiro que pediu emprestado? Ou de ter emprestado algum dinheiro para alguém?

Se sim, você teve que pagar algo em troca? Ou se emprestou dinheiro, cobrou algo de volta?

Isso são os juros, que aprenderemos agora como é calculado no regime de juros simples e no regime de juros compostos que é o utilizado pelo mercado.

Introdução

Segundo Kuhn e Bauer (1996, p. 19), o objetivo principal da Matemática Financeira é responder aos seguintes questionamentos:

- Quanto receberei por uma aplicação de determinado valor no final de n períodos?
- Quanto deverei depositar periodicamente para atingir uma poupança desejada?
- Quanto vale hoje um título vencível no futuro?
- Quanto deverei pagar mensalmente por um empréstimo?

As respostas para essas questões, assim como para diversas outras que também poderiam ser utilizadas como exemplo, são “valores datados, ou seja, uma receita ou desembolso acontecendo em determinada data. Dessa forma, empréstimos, financiamentos, descontos bancários, investimentos, transações comerciais a prazo, entre outros, são casos típicos de valores datados.

A importância desses valores e, conseqüentemente, da Matemática Financeira está intimamente ligada a um problema abordado no curso de Economia: a escassez dos recursos. As necessidades das pessoas são satisfeitas por bens e serviços cuja oferta é limitada. Considerando que o dinheiro (ou capital) é um recurso escasso e que a maioria das pessoas prefere consumir seus bens no presente e não no futuro, os indivíduos desejam uma recompensa por não consumir hoje (MATHIAS; GOMES, 1996).

É nesse contexto que os juros e as taxas de juros ganham relevância.

1.1 Matemática Financeira e o Valor do dinheiro no tempo

Se seu amigo lhe pedisse R\$ 1.000,00 emprestados para lhe pagar de volta o mesmo valor daqui a 1 ano, você aceitaria a proposta?

Provavelmente você pensaria em algumas questões:

- Será que eu consigo comprar as mesmas coisas com R\$ 1.000,00 daqui a 1 ano?
- Se eu permanecesse com o dinheiro, poderia aplicá-lo na poupança e assim ganharia juros durante todo este período!

Por estar se privando do seu dinheiro, nada mais justo que você receba algo em troca, ou seja, os juros!!

Assim, podemos observar que o dinheiro tem um custo associado ao tempo. Os juros podem ocorrer a partir de dois pontos de vista:

- **De quem paga:** é o custo do capital, ou seja, o custo por não ter dinheiro na hora para consumir ou quitar dívidas. Branco (2002) afirma que o juro caracteriza-se, em tese, pela reposição financeira das perdas sofridas com a desvalorização da moeda (a inflação), durante o tempo em que estes recursos estão emprestados.
- **De quem recebe:** é a remuneração do capital empregado.

O tempo é uma variável importante para a Matemática Financeira. Existem duas formas básicas para considerar a evolução dos juros durante o tempo: o regime de capitalização simples e o regime de capitalização composta.

Além dos juros, devemos conhecer outros termos importantes dentro da Matemática Financeira:

O juro é como uma compensação (aluguel) que se paga pelo uso de determinado valor em dinheiro. Combinado o prazo, valor e taxa, o tomador arcará com os custos do capital e o investidor receberá a remuneração da aplicação (valor emprestado).

- **Capital inicial (C) ou Valor Presente (VP) ou Present Value (PV):** é o recurso financeiro transacionado no início de uma determinada operação financeira, ou seja, é o valor do capital na data focal zero. A data focal zero é a data de início da operação financeira.
- **Juros (J):** como definido anteriormente, é o custo do capital. Os juros podem ser obtidos a partir de uma taxa de juros.
- **Taxa de juros (i):** simbolizado pela letra *i*, do inglês, *interest rate*, taxa de juros. A determinação da taxa de juro deve ser eficiente de forma a remunerar o risco envolvido na operação de empréstimo ou aplicação.

A taxa pode ser representada em forma percentual ou unitária, e sempre mencionando a unidade de tempo considerada (ano, semestre, mês, etc.).

Exemplo 1.1:

$$i = \boxed{10 \% \text{ ao mês}} = 10 \% \text{ a.m} = 10/100 = \boxed{0,10}$$

Taxa percentual Taxa unitária

- **Montante (M) ou Valor Futuro (VF) ou Future Value (FV):** é a quantidade acumulada após um certo período de tempo, ou seja, é a soma do Capital (PV) mais o Juro (J).

Na calculadora HP-12C será usada a forma percentual, enquanto que nas operações algébricas serão usadas taxas unitárias.

$$FV = PV + J$$

Tempo ou período (n): corresponde à duração (em dias, semanas, meses, anos, etc) da operação financeira

1.1.1 Diagrama de Fluxo de Caixa

O diagrama de fluxo de caixa é uma representação gráfica da movimentação das entradas e saídas de dinheiro ao longo do tempo, como pode ser visto na figura 1.1.

No diagrama é demonstrado:

- O tempo, na escala horizontal, que podem ser meses, anos, semestres, etc.
- As entradas de dinheiro (recebimentos), que têm sinal positivo e são representadas por setas apontadas para cima.
- As saídas de dinheiro (pagamentos, que têm sinal negativo e são representadas por setas apontadas para baixo.

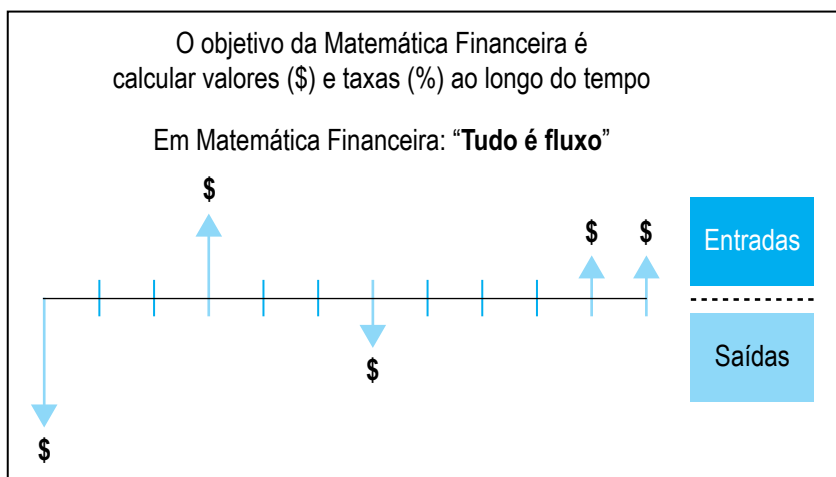


Figura 1.1 – Diagrama de fluxo de caixa

Receber uma quantia hoje ou no futuro não é evidentemente a mesma coisa. Postergar uma entrada de caixa (recebimento) por determinado tempo requer um sacrifício, que deve ser pago por meio de uma recompensa (juros). Dessa forma, os juros efetivamente induzem o adiamento do consumo, o que permite a formação de poupança e novos investimentos na economia.

O valor da taxa a ser cobrada em determinada operação financeira, segundo Assaf Neto (2003), será determinada pela soma de fatores de risco de cada tomador de empréstimo, ou seja:

- O risco envolvido na operação (empréstimo ou aplicação), representado genericamente pela incerteza com relação ao futuro.
- A perda do poder de compra de capital motivada pela inflação. A inflação é um fenômeno que corrói o capital, determinando um volume cada vez menor de compra com o mesmo valor em dinheiro.
- O capital emprestado/aplicado. Os juros devem gerar um lucro (ou ganho) ao proprietário do capital como forma de compensar a sua privação por determinado período de tempo. Este ganho é estabelecido basicamente em função das diversas outras oportunidades de investimento e definido por custo de oportunidade.

O quadro seguinte apresenta alguns exemplos de taxas de juros existentes no Brasil:

Taxa	Sigla	Descrição
Taxa Referen- cial de Juros	TR	<ul style="list-style-type: none">• Apurada e divulgada mensalmente pelo Banco Central.• Cálculo: regras próprias que levam em consideração as taxas prefixa- das de juros praticadas pelos maiores bancos na colocação de títulos de sua emissão.• Utilizada como um indexador em diversos contratos de financiamento e em aplicações financeiras (ex.: caderneta de poupança).• Importância: sinaliza para o mercado o comportamento das demais taxas de juros.
Taxa Financeira Básica	TBF	<ul style="list-style-type: none">• Apurada e divulgada periodicamente pelo Banco Central.• Cálculo: regras próprias que levam em consideração os rendimentos médios mensais oferecidos pelos CDBs de 30 dias.• Taxa futura de juros dos títulos de renda fixa do mercado financeiro nacional.• Importância: transmite aos agentes uma idéia sobre o comportamento dos juros previstos para os próximos 30 dias.
Taxa do Banco Central	TBC	<ul style="list-style-type: none">• Apurada e divulgada mensalmente pelo Banco Central.• Formada livremente nos mercados (resultado das forças de oferta e demanda de recursos).• Importância: referencia o nível mínimo dos juros nas operações de open market e para o mercado financeiro de uma maneira geral.
Taxa de Assistência do Banco Central	TBAN	<ul style="list-style-type: none">• Apurada e divulgada periodicamente pelo Banco Central.• Aplicada ao mercado aberto.• Cálculo: estabelecida pelo Comitê de Política Monetária (Copom).• Importância: percentual máximo a ser adotado como referência em ope- rações de compra e de venda de títulos públicos pelo Banco Central.
Taxa de Juros de Longo Prazo	TJLP	<ul style="list-style-type: none">• Apurada e divulgada trimestralmente pelo Banco Central.• Taxa de juros aplicada, preferencialmente, em operações de longo prazo.• Cálculo: regras próprias que levam em conta as taxas de juros dos títulos da dívida externa e interna do Brasil.• Importância: remunera, entre outros, os recursos do PIS/PASEP e do Fundo de Amparo do Trabalhador (FAT); principal fator de correção das linhas de financiamento geridas pelo BNDES.

Quadro 1.1 – Brasil: exemplos de taxas de juros

Fonte: Assaf Neto (2008).

As diferentes taxas de juros existentes na economia apresentam, ao longo do tempo, a mesma tendência de variação.

1.2 Inflação

O processo inflacionário é o aumento generalizado dos preços dos vários bens e serviços. Para Padoveze (2007) inflação representa aumentos nos preços que reduz o poder aquisitivo da moeda. Por isso, a finalidade da correção monetária é proteger os ativos dos efeitos negativos da inflação.

Conexão:
Olhe no seguinte site
<http://www.ipeadata.gov.br>
e verifique os índices de inflação.

Existem diversos índices de inflação. IPA e IGPM, ambos da FGV IPC da FIPE-USP. INPC e IPCA, ambos do IBGE. O oficial no Brasil é o IPCA.

Inflação acumulada

Se desejarmos encontrar a inflação acumulada de um determinado período não podemos simplesmente somar as taxas, mas sim somamos um a cada taxa e multiplicamos. Vejamos a fórmula:

$$I_{ac} = (1 + I_1) \times (1 + I_2) \dots - 1$$

Vejamos o exemplo:

Exemplo 1.1: Considere 5%, 3%, 2%, 5%, 4%, 7% respectivamente, as taxas de inflação para seis primeiros meses de um ano e um ativo de R\$1.000,00 no início desse mesmo ano. Pede-se:

- Qual o valor do bem corrigido no final dos seis meses?
- Qual a inflação acumulada no final dos seis meses?

Resolução:

a) valor corrigido do bem:

$$1^\circ \text{ mês: } R\$ 1.000,00 \times 1,05 = R\$ 1.050,00$$

$$2^\circ \text{ mês: } R\$ 1.050,00 \times 1,03 = R\$ 1.081,50$$

$$3^\circ \text{ mês: } R\$ 1.081,50 \times 1,02 = R\$ 1.103,13$$

$$4^\circ \text{ mês: } R\$ 1.103,13 \times 1,05 = R\$ 1.158,28$$

$$5^\circ \text{ mês: } R\$ 1.158,28 \times 1,04 = R\$ 1.204,61$$

$$6^\circ \text{ mês: } R\$ 1.204,61 \times 1,07 = R\$ 1.288,94$$

Incremento no valor do ativo no trimestre:

$$\frac{1.288,94}{1.000} - 1 = 1,28894 - 1 = 0,28894 \times 100 = 28,894\%$$

b) Taxa de inflação acumulada

$$(1,05 \times 1,03 \times 1,02 \times 1,05 \times 1,04 \times 1,07) - 1 = 0,28894 \times 100 = 28,894\%$$

Exemplo 1.2: Em um determinado trimestre são apresentadas as seguintes taxas mensais de variações de preços gerais da economia: 5,4%; - 1,2% (deflação); e 3,8% Determine a taxa de inflação acumulada do trimestre.

Resolução:

$$I \text{ (trim.)} = [(1 + 0,054) \times (1 - 0,012) \times (1 + 0,038)] - 1$$

$$I \text{ (trim.)} = [(1,054) \times (0,988) \times (1,038)] - 1$$

$$I \text{ (trim.)} = 0,08092 \times 100 = 8,092\% \text{ a.t.}$$

1.3 Juros Simples

O primeiro regime de capitalização que iremos aprender é o regime de capitalização simples, ou simplesmente, regime de juros simples.

Nos juros simples, o dinheiro cresce linearmente ou em progressão aritmética com o passar do tempo, pois os juros de cada período são sempre calculados sobre o valor inicial, não havendo incidência de juros sobre juros.

Para entendermos melhor, vamos ver o seguinte exemplo:

Exemplo 1.3 – Uma pessoa aplicou a quantia de R\$ 100 no Banco do Futuro, pelo prazo de 3 meses, com uma taxa de 10 % ao mês, no regime de juros simples. Determinar o saldo final acumulado nesta aplicação.

Resolução:

Mês	Cálculo dos Juros mensais	Juros mensais	Saldo final
1	\$ 100 × 10 % =	\$ 10	\$ 110
2	\$ 100 × 10 % =	\$ 10	\$ 120
3	\$ 100 × 10 % =	\$ 10	\$ 130

Tabela 1.1: Cálculo Juros Simples

Baseado neste exemplo, podemos chegar na fórmula dos juros simples:

$$J = PV \times i \times n$$

Sendo que:

J = juros

PV = valor presente

i = taxa de juros

n = número de períodos

Neste exemplo, os juros de cada mês foi R\$ 1,00, totalizando no final de três meses, R\$ 30,00. Assim, podemos concluir que a pessoa irá resgatar R\$ 130,00.

$$FV = 100 + 30 = 130$$

A partir do raciocínio que desenvolveremos a seguir, podemos criar outra fórmula para realizarmos o cálculo do montante.

Substituindo a fórmula básica dos juros na fórmula do montante colocando PV em evidência teremos:

$$FV = PV + (J) \quad \leftarrow \quad J = PV \times i \times n$$

substituindo

Fazendo a substituição chegaremos à seguinte expressão:

$$FV = PV + (PV \times i \times n)$$

Depois simplificando, chegaremos a fórmula do montante:

$$FV = PV \times (1 + i \times n)$$

Agora vamos calcular o valor futuro (FV) do exemplo 1.2 com esta nova fórmula:

Resolução:

$$FV = PV \times (1 + i \times n)$$

$$FV = 100 \times (1 + 0,10 \times 3)$$

$$FV = 100 \times (1 + 0,30)$$

$$FV = 100 \times (1,30)$$

$$FV = 130$$

Faremos mais alguns exemplos de aplicação dos juros simples.

Exemplo 1.4 – Determine o juros obtido a partir de um capital de R\$ 2.350,00 durante 8 meses com uma taxa de 3 % ao mês, no regime de juros simples.

Resolução:

$$PV = R\$ 2.350,00$$

$$i = 3 \% \text{ a.m.} = 3/100 = 0,03$$

$$n = 8 \text{ meses}$$

$$J = ?$$

$$J = PV \times i \times n$$

$$J = 2.350 \times 0,03 \times 8$$

$$J = 564$$

Na HP – 12C:

f Reg (para limpar)

2350 CHS PV

240 n

36 i

(f) INT

Visor => \$ 564

Resposta: O juro obtido é de R\$ 564,00.

É importante observar que a taxa (i) e o tempo (n) devem estar na mesma unidade de tempo. Neste exemplo, a taxa está em mês e o tempo também está na mesma unidade. Já para resolvermos exercícios de juros simples na HP – 12C, a taxa deve estar expressa em **ao ano** e o tempo em **dias**!! Para maiores detalhes, leia o apêndice sobre a calculadora HP-12C.

Exemplo 1.5 – Determinar o valor do montante acumulado em 1 ano, a partir de um principal de \$ 100.000 aplicado com uma taxa de 24 % ao ano, no regime de juros simples.

Resolução:

$$PV = \$ 100.000$$

$$i = 24 \% \text{ a.a.} = 24/100 = 0,24$$

$$n = 12 \text{ meses} = 1 \text{ ano}$$

$$FV = ?$$

$$FV = PV \times (1 + i \times n)$$

$$FV = 100.000 \times (1 + 0,24 \times 1)$$

$$FV = 100.000 \times (1 + 0,24)$$

$$FV = 124.000$$

Na HP – 12C:

f Reg (para limpar)

100.000 CHS PV

360 n

24 i

(f) INT

Visor => 24.000

100.000 (+)

Visor => 124.000

Resposta: O valor do montante acumulado é de R\$ 124.000,00.

1.3.1 Taxa proporcional e equivalente no regime de juros simples

Uma operação financeira envolve dois prazos: (I) o prazo a que refere à taxa de juro e (II) o prazo de capitalização (ocorrência) dos juros. Até o momento, foram apresentadas fórmulas e utilizados exemplos em que esses prazos coincidem. Mas na prática isso pode não acontecer. Em inúmeras operações financeiras um capital pode ser aplicado por 15 dias em uma operação com taxa de juro expressa em meses ou em anos.

Exemplo 1.6 – Calcular os montantes acumulados no final de 1 ano, a partir de um capital inicial de R\$ 100,00, no regime de juros simples, com as seguintes taxas de juros:

- a) 1 % ao mês
- b) 6 % ao semestre
- c) 12 % ao ano

Resolução:

a) $PV = \$ 100$
 $i = 1 \% \text{ a.m.} = 1/100 = 0,01$
 $n = 1 \text{ ano} = 12 \text{ meses}$
 $FV = ?$

$$FV = PV \times (1 + i \times n)$$

$$FV = PV \times (1 + 0,01 \times 12)$$

$$FV = 100 \times (1 + 0,12)$$

$$FV = 112$$

b) $PV = \$ 100$
 $i = 6 \% \text{ a.sem.} = 6/100 = 0,06$
 $n = 1 \text{ ano} = 2 \text{ semestres}$
 $FV = ?$

$$FV = PV \times (1 + i \times n)$$

$$FV = PV \times (1 + 0,06 \times 2)$$

$$FV = 100 \times (1 + 0,12)$$

$$FV = 112$$

c) $PV = \$ 100$
 $i = 12 \% \text{ a.a.} = 12/100 = 0,12$
 $n = 1 \text{ ano}$
 $FV = ?$

$$FV = PV \times (1 + i \times n)$$

$$FV = PV \times (1 + 0,12 \times 1)$$

$$FV = 100 \times (1 + 0,12)$$

$$FV = 112$$

Neste exemplo foi aplicado R\$ 100,00 durante o prazo de um ano e só mudamos a taxa de juros. Após realizados os cálculos, podemos observar que chegamos ao mesmo resultado. Assim podemos definir estas taxas como sendo equivalentes.

As taxas de juros simples se dizem equivalentes quando, aplicadas a um mesmo capital e pelo mesmo intervalo de tempo, produzem o mesmo juros. No regime de juros simples, as taxas proporcionais e taxas equivalentes são consideradas a mesma coisa, isto se deve à linearidade implícita à este regime (ASSAF NETO, 2008).

Por exemplo:

A taxa de juros simples anual proporcional de 1% a.m. é 12% a.a.

A taxa de juros simples mensal proporcional de 12% a.a. é 1% a.m.

A taxa de juros simples semestral proporcional de 1% a.m. é 6% a.s.

A taxa de juros simples semestral proporcional de 12% a.a. é 6% a.s.

E assim por diante...

A taxa equivalente seria a continuação do raciocínio da taxa proporcional (MATHIAS; GOMES, 1996).

Aplicar \$1.000 durante um ano a taxa de 1% a.m. gera o mesmo valor de juros aplicado a uma taxa de 12% a.a. ou 6% a.s.

Por exemplo, se temos uma taxa anual, dividimos por 12 para encontrar a respectiva taxa mensal. Assim, 12 % a.a. equivale a 1 % a.m. ($12\% \div 12$).

Se temos uma taxa semestral, multiplicamos por 2 para encontrar a equivalente anual. Deste modo, 6 % ao semestre, equivale a 12 % ao ano ($6\% \times 2$) → em 1 ano tem 2 semestres.

É muito comum em operações de curto prazo termos o prazo definido em número de dias. Nestes casos, o número de dias pode ser calculado de duas maneiras: tempo **exato** e tempo **comercial**:

- Para cálculo do tempo exato, utilizamos o calendário do ano civil (365 dias) → o juro apurado desta forma é chamado de juro exato.
- Para cálculo do juro comercial, admitimos o mês com 30 dias e o ano com 360 dias → o juro apurado desta forma é chamado de juro comercial.

Nos exercícios deste material, utilizaremos sempre o conceito de juro comercial.

Exemplo 1.7 – Calcular a taxa mensal proporcional a:

- c) 36% a.a.
- d) 10% a.b. (ao bimestre)
- e) 24% a.s. (ao semestre)
- f) 15% a.t. (ao trimestre)
- g) 9% a.q. (ao quadrimestre)

Resolução:

$$a) \frac{36\%}{12} = 3\%$$

$$b) \frac{10\%}{2} = 5\%$$

$$c) \frac{24\%}{6} = 4\%$$

$$d) \frac{15\%}{3} = 5\%$$

$$e) \frac{9\%}{4} = 2,25\%$$

Agora aplicaremos o conceito de taxa equivalente e proporcional aos conceitos de juros simples

Exemplo 1.8 – Qual é a taxa diária de juros simples ganha por uma aplicação de R\$ 1.300,00 que produz após um ano um montante de R\$ 1.750,00?

Resolução:

PV = \$ 1.300

i = ? diária

n = 1 ano = 360 dias

FV = \$ 1.750

$$FV = PV \times (1 + i \times n)$$

$$1.750 = 1.300 \times (1 + i \times 360)$$

$$1.750 = 1.300 + 468.000 \times i$$

$$1.750 - 1.300 = 468.000 \times i$$

$$450 = 468.000 \times i$$

$$i = \frac{450}{468.000}$$

$$i = 0,000962$$

Para transformarmos esta taxa em percentual é só multiplicarmos por 100.

$$i = 0,000962 \times 100 = 0,0962 \% \text{ ao dia}$$

Resposta: A taxa de juros ganha na aplicação é de 0,0962% ao dia.

Exemplo 1.9 – Um produto que a vista custa R\$ 300,00 pode ser comprado com uma entrada de R\$ 80,00 e mais um pagamento de R\$ 250,00 para daqui a 1 mês. Encontre a taxa de juros simples cobrada nesta operação.

Resolução:

Valor à vista = \$ 300 => como o comprador irá dar \$ 80 de entrada, financiará somente o restante => \$300 – \$80 = \$ 220 => este valor será o PV (valor inicial do financiamento)

FV= \$ 250 (valor final que a loja irá cobrar do cliente após 1 mês)

$n = 1$ mês

$i = ?$

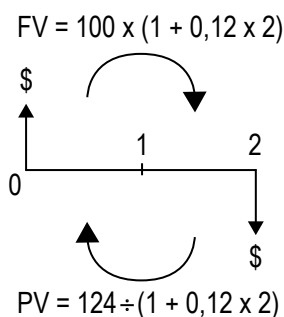
$$\begin{aligned} FV &= PV + (1 \times i \times n) \\ 250 &= 220 \times (1 + i \times 1) \\ 1250 &= 220 + 220 \times i \\ 250 - 220 &= 220 \times i \\ 30 &= 220 \times i \\ i &= \frac{30}{220} \\ i &= 0,136364 \\ i &= 0,136364 \times 100 = 13,64\% \text{ ao mês} \end{aligned}$$

Resposta: A taxa de juros cobrada na operação é 13,64% ao mês.

Equivalência de capitais

Temos um conceito importante dentro da Matemática Financeira. Quando dois ou mais capitais com datas de vencimento determinadas, dizem-se equivalentes quando, a certa taxa de juros, produzem resultados iguais numa data comum.

Como exemplo, R\$ 112, 00 vencíveis daqui a dois anos e \$ 100, hoje, são equivalentes a uma taxa de juros simples de 12 % ao ano, ou seja, R\$100, 00 na data de hoje equivale a R\$ 124, 00 daqui a dois anos se considerarmos a taxa de juros simples de 12 % ao ano.



Quando falamos em equivalência financeira em juros simples, é importante ressaltar que os prazos não podem ser fracionados sob a pena

de alterar os resultados. Neste exemplo que acabamos de resolver, não poderia ser calculado o montante (FV) ao final do primeiro ano e, depois calculado o montante do segundo ano. Resolvendo o exercício desta maneira acaba ocorrendo o famoso “juros sobre juros”, pratica não adotada no regime de juros simples.

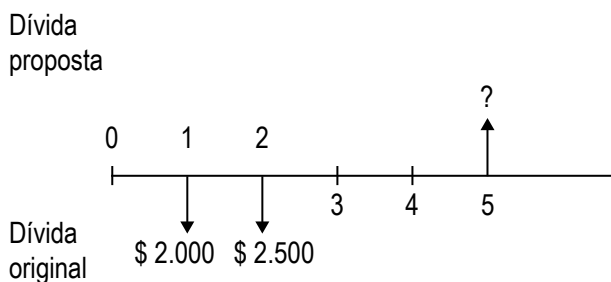
Dois capitais equivalentes, ao fracionar os seus prazos, deixam de produzir o mesmo resultado na mesma escolhida pelo critério de juros simples.

Exemplo 1.10 – Um comerciante possui uma dívida composta de 2 pagamentos no valor de R\$ 2.000,00 e R\$ 2.500,00, vencíveis em 30 e 60 dias, respectivamente. O comerciante deseja liquidar estes valores em um único pagamento daqui a 150 dias. Sabe-se que ainda que a taxa de juros simples de mercado é de 5 % ao mês, qual o valor que o comerciante irá pagar?

Resolução: O problema é melhor visualizado se elaborarmos um diagrama de fluxo de caixa, onde convencionou-se representar a dívida proposta na parte superior, e a dívida original na parte inferior. Também foram transformados os prazos de pagamentos para meses.

O diagrama representa a substituição de uma proposta, por outra equivalente. Então, iremos igualar os pagamentos na data escolhida pelo comerciante (data 5 \rightarrow 150 dias).

Para resolvermos o exercício, faremos duas contas, pois em Matemática Financeira não podemos somar valores em datas diferentes. À dívida de R\$ 2.000 acrescentaremos quatro meses de juros (da data 1 até chegar na data 5 se passarão 4 meses). E à dívida de R\$ 2.500,00 acrescentaremos três meses de juros (da data 2 até chegar na data 5 se passarão 3 meses).



Dívida do mês 1

$PV = \$ 2.000$

$n = 4 \text{ meses}$

$i = 5 \% \text{ a.m.} = 5/100 = 0,05$

Dívida do mês 2

$PV = \$ 2.500$

$n = 3 \text{ meses}$

$i = 5 \% \text{ a.m.} = 5/100 = 0,05$

$$FV = PV + (1 \times i \times n)$$
$$FV = [2.000 (1 + 0,05 \times 4)] + [2.500 \times (1 + 0,05 \times 3)]$$
$$FV = [2.000 (1 + 0,20)] + [2.500 \times (1 + 0,15)]$$
$$FV = [2.000 \times 1,20] + [2.500 \times 1,15]$$
$$FV = 2.400 + 2850$$
$$FV = 5.275$$

Resposta: O valor da dívida a ser paga pelo comerciante daqui a 150 dias é de R\$ 5.275,00.

1.4 Juros Compostos

No regime de capitalização composta, ou regime de juros compostos, o cálculo dos juros ocorre sempre de forma cumulativa, ou seja, os juros gerados em cada período são incorporados ao capital formando o montante (capital mais juros) do período. Este montante passará a render juros no período seguinte formando um novo montante.

Para visualizarmos como se dá a capitalização nos juros compostos, vamos utilizar os mesmos dados do exemplo que fizemos no item de juros simples só que agora faremos o cálculo a juros compostos:

Exemplo 1.11 – Uma pessoa aplicou a quantia de R\$ 100 no Banco do Futuro, pelo prazo de 3 meses, com uma taxa de 10 % ao mês, no regime de juros compostos. Determinar o saldo final acumulado nesta aplicação.

Demonstraremos a resolução do exercício passo a passo:

Mês	Cálculo dos Juros mensais	Valor do Montante
1	$\$ 100 \times (1+0,10) =$	\$ 110
2	$\$ 110 \times (1+0,10) =$	\$ 121
3	$\$ 121 \times (1+0,10) =$	\$ 133,10

Este cálculo também pode ser resolvido da seguinte maneira:

$$1.000 \times (1 + 0,10) \times (1 + 0,10) \times (1 + 0,10) = 133,10$$

Observe que o valor inicial de R\$ 100,00 foi multiplicado pelo fator três vezes, assim, podemos escrever a resolução da seguinte maneira:

$$100 \times (1 + 0,10)^3 = 133,10$$

Diferentemente dos juros simples, nos juros compostos o dinheiro cresce exponencialmente ou em progressão geométrica com o passar do tempo. Teremos então, a fórmula para os juros compostos como:

$$FV = PV \times (1 + i)^n$$

Onde:

J = juros

PV ou C = valor presente ou capital inicial

i = taxa de juros

n = número de períodos

FV ou M = valor futuro ou montante final

Veja a solução pela calculadora HP-12C:

A função [f] [FIN] apaga somente os registros das memórias financeiras e não apaga o visor.

A função [f] [REG] apaga todos os registros armazenados nas memórias da HP-12C e também o visor.

Calculadoras financeiras geralmente usadas, enfatizando aqui a HP 12C, fazem os cálculos de qualquer uma das quatro variáveis presentes na fórmula do montante. Apesar de ainda não termos falado sobre as outras fórmulas, é importante saber que o cálculo pode ser feito apenas inserindo, na calculadora, três das quatro variáveis dessa fórmula.

Importante: é sempre necessário respeitar a convenção de fluxo de caixa presente nas calculadoras financeiras, onde o **PV** e **FV** devem ser inseridos com sinais opostos, indicando as saídas e entradas de caixa. Lembre-se disso sempre!

Na HP a resolução ficará assim:

Na HP-12C:
f Reg (para limpar)
100 CHS PV
10 i
3n
FV
visor \Rightarrow 133,10

Exemplo 1.12 – Qual o valor do juro correspondente a um empréstimo de R\$ 78.000, pelo prazo de 7 meses, sabendo que a taxa cobrada é de 3 % ao mês.

Resolução: Primeiro calcularemos o valor futuro (FV) para depois encontrarmos os juros

$$PV = \$ 78.000$$

$$n = 7 \text{ meses}$$

$$i = 3 \% \text{ a.m.} = 3/100 = 0,03$$

$$FV = ?$$

$$J = ?$$

$$\begin{aligned} FV &= PV \times (1 + i)^n \\ FV &= 78.000 \times (1 + 0,03)^7 \\ FV &= 78.000 \times (1,03)^7 \\ FV &= 78.000 \times (1,229874) \\ FV &= 95.930,16 \\ J &= FV - PV \\ J &= 95.930,16 - 78000 \\ J &= 17.930,16 \end{aligned}$$

Na HP-12C:

f Reg (para limpar)
78.00 CHS PV
3 i
7 n
FV
visor \Rightarrow 95.930,16
78.000 [-]
visor \Rightarrow 17.930,16

Resposta: O valor dos juros pagos deste empréstimo é de **R\$ 17.930,16.**

Exemplo 1.13 – Calcular o valor do depósito que devemos fazer hoje para poder retirar R\$ 100.000,00 num prazo de 3 anos sabendo que a taxa de juros é de 15 % ao ano.

Resolução:

$$FV = \$ 100.000$$

$$n = 3 \text{ anos}$$

$$i = 15 \% \text{ a.a.} = 15/100 = 0,15$$

$$FV = ?$$

$$\begin{aligned} FV &= PV \times (1 + i)^n \\ 100.000 &= PV \times (1 + 0,15)^3 \\ 100.000 &= PV \times (1,15)^3 \\ 100.000 &= PV \times (1,520875) \\ FV &= \frac{100.000}{1,520875} \\ FV &= 65.751,62 \end{aligned}$$

Na HP-12C:

f Reg (para limpar)

100.000 CHS FV

15 i

3 n

PV

visor \Rightarrow 65.751,62

Resposta: O valor a ser depositado é R\$ 65.751,62.

Exemplo 1.14 – Fernanda gostaria de comprar uma casa no valor de R\$ 200.000,00. Por não ter este valor no ato da compra, propôs ao dono quitá-la por R\$ 212.304,00 só que daqui a 6 meses. Qual a taxa de juros embutida na proposta?

Resolução:

$$PV = \$ 200.000$$

$$FV = \$ 212.304$$

$$n = 6 \text{ meses}$$

$$n = 6 \text{ meses}$$

$$i = ?$$

Na HP-12C:

f Reg (para limpar)

212.304 CHS PV

200.000 FV

6 n

i

visor \Rightarrow 1

$$FV = PV \times (1 + i)^n$$

$$212.304 = 200.000 \times (1 + i)^6$$

$$\frac{212.304}{200.000} = (1 + i)^6$$

$$1,061520 = (1 + i)^6$$

$$\sqrt[6]{1,061520} = \sqrt[6]{(1 + i)^6}$$

$$1,01 = 1 + i$$

$$i = 1,01 - 1$$

$$i = 0,01$$

para transformarmos este valor em %,
é só multiplicarmos por 1000

$$i = 0,01 \times 100 = 1\% \text{ ao mês}$$

Resposta: A taxa de juros embutida na proposta é de 1 % ao mês.

Exemplo 1.15 – Uma aplicação de R\$ 27.000 efetuada em determinada data produz, à taxa composta de juros de 3,4 % ao mês, um montante de R\$ 34.119,88 em certa data futura. Calcular o prazo da operação.

Resolução:

$$PV = \$ 27.000$$

$$FV = \$ 34.119,88$$

$$i = 3,4 \% \text{ a.m.} = 3,4/100 = 0,034$$

$$n = ?$$

Na HP-12C
f Reg (para limpar)
27.000 CHS PV
34.119,88 FV
3,4 i
n
visor => 7

$$FV = PV \times (1 + i)^n$$

$$34.119,88 = 27.000 \times (1 + 0,034)^n$$

$$34.119,88 = 27.000 \times (1,034)^n$$

$$\frac{34.119}{27.000} = (1,034)^n$$

$$1,263699 = 1,034^n$$

$$\log 1,263699 = \log 1,034^n$$

$$0,101644 = 0,014521 \times n$$

$$n = \frac{0,101644}{0,014521}$$

$$n = 7$$

Resposta: O prazo da operação é de 7 meses.

A calculadora HP-12C pode arredondar o tempo. Isso sempre ocorre quando o valor encontrado for fracionado. A HP-12C irá arredondar o valor para o inteiro superior.

1.5 Taxas de Juros

1.5.1 Taxa equivalente no regime de juros compostos

As taxas de juros se dizem equivalentes quando, aplicadas a um mesmo capital e pelo mesmo intervalo de tempo, produzem os mesmos juros.

No regime de juros simples vimos que 1 % ao mês é proporcional a 12 % ao ano. Isto quer dizer que, se aplicarmos um capital durante 12 meses a uma taxa de 1 % ao mês, é equivalente a aplicarmos o mesmo capital, durante o mesmo período só que a 12% ao ano, ou seja, no final obteremos o mesmo montante.

Já em juros compostos não podemos fazer este tipo de transformação, pois os juros são calculados de forma exponencial. Veja o exemplo a seguir:

Exemplo 1.16 - Calcular os montantes acumulados no final de 1 ano, a partir de um capital inicial de R\$ 100,00, no regime de juros compostos, com as seguintes taxas de juros:

- 1 % ao mês
- 12,6825 % ao ano

Resolução

a)

$$PV = \$ 100$$

$$i = 1 \% \text{ a.m.} = 1/100 = 0,01$$

$$n = 1 \text{ ano} = 12 \text{ meses}$$

$$FV = ?$$

$$\begin{aligned} FV &= PV \times (1 + i)^n \\ FV &= 100 \times (1 + 0,01)^{12} \\ FV &= 100 \times (1,01)^{12} \\ FV &= 100 \times (1,126825) \\ FV &= 112,6862 \end{aligned}$$

Na HP-12C:

f Fin (para limpar)
100 CHS PV
1 i
12 n
FV
visor \Rightarrow 112,6825

Resolução

b)

$$PV = \$ 100$$

$$i = 12,6825 \% \text{ a.a.} = 12,6825/100 = 0,126825$$

$$n = 1 \text{ ano}$$

$$FV = ?$$

$$\begin{aligned} FV &= PV \times (1 + i)^n \\ FV &= 100 \times (1 + 0,126825)^1 \\ FV &= 100 \times (1,126825)^1 \\ FV &= 100 \times (1,126825) \\ FV &= 112,6825 \end{aligned}$$

Na HP-12C:

f Fin (para limpar)
100 CHS PV
12,6825 i
1 n
FV
visor \Rightarrow 112,6825

O montante acumulado na alternativa a e na alternativa b é R\$ 112,68, ou seja, o mesmo capital (R\$ 100,00) aplicado durante um mesmo período (12 meses e 1 ano), mas as taxas de juros em unidades de tempo diferentes (1 % ao mês e 12,6825% ao ano) produziram o mesmo montante. Isto ocorreu porque as taxas são equivalentes.

Mas como fazer essa transformação? Como encontrar a taxa equivalente anual de uma taxa mensal no regime de juros compostos?

Consideraremos as duas situações do exemplo anterior:

- Taxa mensal = 1% ao mês

$$FV = PV \times (1 + i_m)^{12}$$

b) Taxa anual = ?

$$FV = PV \times (1+i_a)^1$$

Para que as taxas sejam equivalentes, é preciso que os montantes (FV) dos dois casos sejam iguais. Como o PV também é o mesmo, podemos eliminá-lo.

Igualando as equações chegamos a expressão abaixo:

$$(1 + i_a)^1 = (1 + i_m)^{12}$$

Agora calcularemos a taxa anual (i_a) equivalente a uma taxa mensal (i_m) de 1% ao mês

$$(1 + i_a)^1 = (1 + 1m)^{12}$$

$$1 + i_a = (1 + 0,01)^{12}$$

$$i_a = (1,01)^{12} - 1$$

$$i_a = 1,126825 - 1$$

$$i_a = 0,126825 \times 100 = 12,6825\% \text{ ao ano}$$

Também podemos utilizar uma fórmula genérica:

$$i_q = \left[(1 + i)^{\frac{\text{quero}}{\text{tenho}}} \right] - 1$$

Sendo que:

i_q = taxa equivalente a i

quero = período da taxa que eu quero

tenho = período da taxa que eu tenho

Exemplo 1.17 – Qual a taxa equivalente composta anual de uma taxa de 1 % ao mês?

Resolução:

Período da taxa que eu **tenho** = 1 mês

Período da taxa que eu **quero** = 1 ano = 12 meses

$$\begin{aligned}
 i_q &= \left[(1 + 0,01)^{12} \right] - 1 \\
 i_q &= \left[(1,01)^{12} \right] - 1 \\
 i_q &= 1,126825 - 1 \\
 i_q &= 0,126825 \\
 i_q &= 0,126825 \times 100 = 12,6825\% \text{ ao ano}
 \end{aligned}$$

1.5.2 Taxa efetiva

Taxa efetiva (i_{ef}) informa sobre a real remuneração (ou custo) da operação durante todo o período. Por Exemplo, R\$ 1.000,00 aplicados a uma taxa de juros de 1% ao ano (regime composto), depois de 10 anos, geraram um montante igual a R\$ 1.104,62. Qual foi a remuneração real (taxa efetiva) obtida nessa operação financeira? Essa questão pode ser respondida de duas maneiras:

- pode ser calculado quanto o capital inicial aumentou durante o período em que ficou aplicado na operação:

$$\frac{FV - PV}{PV} = \frac{1.104,62 - 1.000}{1.000} = 0,1046$$

Portanto, $i_{ef} = 10,46\%$.

- pode-se encontrar a taxa de juro por década que, sendo aplicados os R\$ 1.000,00 (PV), gera R\$ 1.104,62 (FV) em 1 década (n):

$$FV = PV \times (1 + i)^n$$

$$1.104,62 = 1.000 \times (1 + i)^1$$

$$\frac{1.104,62}{1.000} = (1 + i)^1$$

$$1,10462 = (1 + i)$$

$$i = 1,10462 - 1$$

$$i = 0,1046$$

Portanto, $i_{ef} = 10,46\%$.

Esse Exemplo deixa claro que a taxa efetiva resulta do processo de formação dos juros pelo regime de juros compostos ao longo dos períodos de capitalização. Genericamente, uma taxa efetiva pode ser calculada por meio da fórmula a seguir: $i_{ef} = (1 + i)^n - 1$

1.5.3 Taxa nominal ou “de mentirinha”

Uma taxa nominal bastante conhecida no mercado é a taxa de juros da caderneta poupança, que rende 6% ao ano, capitalizada mensalmente. A expressão capitalizada mensalmente indica tratar-se de uma taxa nominal (BRUNI; FAMÁ, 2007).

Conexão:

Para saber mais sobre a taxa de juros da caderneta de poupança, acesse: <http://www4.bcb.gov.br/pec/poupanca/poupanca.asp>

Também são exemplos de taxas nominais:

- 18% ao ano, capitalizados mensalmente
- 12% ao ano, capitalizados semestralmente
- 3,6% ao ano, capitalizados diariamente.

Mas e a “taxa de mentirinha” que inicia este tópico?

A taxa nominal, apesar de bastante utilizada no mercado, não indica uma taxa efetiva. Toda taxa nominal traz uma taxa efetiva implícita e é sempre calculada de forma proporcional, no regime de juros simples (PUCCINI, 2004).

Encontraremos então, as taxas que incidirão em cada operação, utilizando os mesmos exemplos anteriores:

- 18% ao ano, capitalizados mensalmente:

$$\frac{18\% \text{ a.a}}{12 \text{ meses}} = 1,5\% \text{ a.m}$$

- 12% ao ano, capitalizados semestralmente:

$$\frac{24\% \text{ ao ano}}{2 \text{ semestres}} = 12\% \text{ a.s}$$

- 3,6% ao ano, capitalizados diariamente:

$$\frac{3,6\% \text{ a.a}}{360 \text{ dias}} = 0,01 \text{ ao dia}$$

Nas operações financeiras, as taxas aplicadas serão as que acabamos de encontrar, mas se quisermos calcular a taxa que efetivamente foi cobrada, seguiremos os conceitos de juros compostos. Vejamos o exemplo a seguir:

Exemplo 1.18: Qual a taxa efetiva anual, no sistema de juros compostos, equivalente a uma taxa nominal de 18% ao ano, capitalizada mensalmente?

1 ano = 12 meses

$$i = 18\% \text{ ao ano capitalizado mensalmente} = \frac{18}{12} = 1,5\% \text{ ao mês}$$

quanto tenho = ao mês = 1 mês

quanto quero = ao ano = 12 meses

$$i = (1 + i)^{\frac{\text{quanto quero}}{\text{quanto tenho}}} - 1$$

$$i = (1 + 0,015)^{\frac{12}{1}} - 1$$

$$i = (1,015)^{12} - 1$$

$$i = 1,1956 - 1$$

$$i = 0,1956 \times 100 = 19,56\% \text{ ao ano}$$

Podemos concluir com este exemplo, que se a taxa estipulada em um contrato fosse de 18% ao ano, capitalizada mensalmente ela efetivamente corresponde a uma taxa de 19,56% ao ano, ou seja, a primeira taxa, é uma taxa “de mentirinha”!!

Tente fazer encontrar taxa efetiva anual, no sistema de juros compostos, equivalente a uma taxa nominal de 120% ao ano, capitalizada mensalmente.

Faça este cálculo e veja que resultado encontrará. Você irá se surpreender!!!

1.5.4 Taxa nominal e taxa real

A **taxa nominal** de juros é aquela adotada normalmente nas operações correntes de mercado, incluindo os efeitos inflacionários previstos para o prazo da operação. Já a taxa real é a taxa que reflete realmente os juros que foram pagos ou recebidos (ASSAF NETO, 2008).

Assim, podemos encontrar a taxa real através da seguinte fórmula:

$$\text{Taxa real} = \frac{1+i}{1+I} - 1$$

Sendo que:

i = taxa nominal

I = taxa real

Se você aplica e ganha 5% a.a. e a inflação foi de 5,9% a.a., isso significa que a redução no poder aquisitivo da moeda foi maior que a rentabilidade de sua aplicação.

E se ganhar 7% a.a., com inflação de 10% ?

Vejamos os exemplos:

Exemplo 1.19: A remuneração de R\$ 100,00 em determinado título atingiu 12,8% num período e a inflação foi de 9,2%. Qual foi o ganho nominal? Qual foi a taxa e o ganho real?

$$\text{Ganho nominal} = \text{R\$ } 100 \times 12,80\% = \text{R\$ } 12,80$$

$$\text{Taxa real} = \frac{1+i}{1+I} - 1$$

$$\text{Taxa real} = \frac{1+0,128}{1+0,092} - 1$$

$$\text{Taxa real} = \frac{1,128}{1,092} - 1$$

$$\text{Taxa real} = 1,0329 - 1$$

$$\text{Taxa real} = 0,0329 - 1$$

$$\text{Taxa real} = 0,329 \times 100$$

$$\text{Taxa real} = 3,29\%$$

$$\text{Ganho real} = \text{R\$ } 100 \times 3,29\% = \text{R\$ } 3,29$$

Exemplo 1.20: Uma pessoa aplicou R\$ 400.000,00 num título por 3 meses à taxa nominal de 6,5% ao trimestre e inflação de 4% ao trimestre. Qual foi a taxa real trimestral e mensal?

$$\text{Taxa real} = \frac{1+i}{1+I} - 1$$

$$\text{Taxa real} = \frac{1+0,065}{1+0,04} - 1$$

$$\text{Taxa real} = \frac{1,065}{1,04} - 1$$

$$\text{Taxa real} = 1,024038 - 1$$

$$\text{Taxa real} = 0,02438 \times 100$$

$$\text{Taxa real} = 2,40\%$$

Taxa equivalente mensal

$$iq = (1+i)^{\frac{\text{quero}}{\text{tenho}}} - 1$$

$$iq = (1,024)^{\frac{1}{3}} - 1$$

$$iq = 1,0079 - 1$$

$$iq = 0,0079 \times 100 = 0,79\% \text{ ao mês}$$

1.6 Títulos de renda fixa

Os títulos de renda fixa têm os rendimentos fixados desde o momento inicial da operação. Esses títulos são emitidos normalmente por instituições financeiras, sociedades por ações, governos e negociados com os poupadores em geral.

Os títulos de renda fixa mais negociados no mercado financeiro são os certificados e os recibos de depósitos bancários (CDB e RDB), os debêntures e as letras de câmbio. Os certificados/recibos de depósitos bancários são emitidos por instituições financeiras com o objetivo de captar recursos para suas operações de empréstimos. O CDB pode ser negociado no mercado via endosso e o RDB é intransferível (ASSAF NETO, 2008).

Conexão:

No site do Banco Central, você encontra as respostas para as perguntas mais frequentes acerca de aplicações financeiras: http://www.bcb.gov.br/pre/bc_atende/port/aplica.asp

Os títulos de renda fixa podem ser resumidos com o seguinte quadro:

Títulos de renda fixa			
Pré-fixados		Pós-fixados	
rendimento final	rendimento periódico	rendimento final	rendimento periódico

Nos pré-fixados, há somente as taxas de juros nominais, enquanto no pós-fixado existem taxas de juros definidas mais uma parte variável que acompanha algum índice de inflação

Os símbolos que serão utilizados para trabalharmos com as operações de títulos de renda fixa terão algumas novidades além do que já foi apresentado neste material. Assim, tem-se que:

- PV = valor da aplicação (capital)
- FV = valor de resgate (montante)
- i_b = taxa nominal bruta (antes do IL)
- i_L = taxa líquida (após dedução do IR)
- IR = valor do imposto de renda

Agora veremos um exemplos de negociação de título de renda fixa:

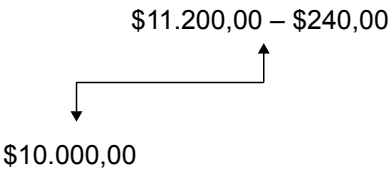
Exemplo 1.21 – Um título é emitido pelo valor de \$10.000,00 e resgatado por \$11.200,00 ao final de um semestre. Determine a taxa de rentabilidade mensal líquida desse título, admitindo:

- a) alíquota de 20% de IR pago por ocasião do resgate;
- b) alíquota de 9% de IR na fonte pago no momento da aplicação

Resolução:

- a) Valor bruto do resgate = \$11.200 (FV)
- (-) Valor de aplicação = (\$10.000) (PV)
- (=) Rendimento bruto = \$1.200
- IR: $20\% \times \$1.200$ = (\$240)
- (=) Rendimento líquido = \$960

Como o IR é pago no momento de resgate, temos o seguinte fluxo de caixa:



$$iL = \frac{FV - IR}{PV \text{ nominal}} - 1$$

$$iL = \frac{\$10.960}{\$10.000} - 1$$

$$iL = 0,096 \text{ a.s.}$$

Encontrando a taxa equivalente mensal:

$$i_q = \left[(1 + 0,096)^{\frac{1}{6}} \right] - 1$$

$$i_q = \left[(1,096)^{0,166667} \right] - 1$$

$$i_q = 1,0154 - 1$$

$$i_q = 0,0154 \times 100 = 1,54\% \text{ aomês}$$

<u>Solução na HP-12 C</u>		
<u>Teclas</u>	<u>Visor</u>	<u>Significado</u>
f FIN f REG	0,00	Limpa registradores
1,096 ENTER	1,10	Taxa efetiva
6 $\frac{1}{x}$ y^x	1,02	Fator de atualização
1 <->	0,02	Taxa unitária
100 <x>	1,54	Taxa percentual

b) Valor bruto do resgate = \$11.200

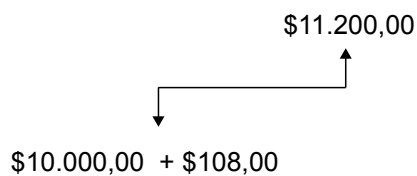
(-) Valor de aplicação = (\$10.000)

(=) Rendimento bruto = \$1.200

IR: $9\% \times \$1.200 = (\$108)$

(=) Rendimento líquido = \$1.092

Como o IR é pago no momento de resgate, o total aplicado no título se eleva de R\$ 10.000 para R\$ 10.108. Assim, temos o seguinte fluxo de caixa:



$$i_L = \frac{FV}{PV + IR} - 1$$

$$i_L = \frac{11.200}{10.000 + 108} - 1$$

$$i_L = 0,108$$

$$i_L = 10,8\% \text{ ao semestre}$$

Encontrando a taxa equivalente mensal:

$$i_q = \left[(1 + 0,1080)^{\frac{1}{6}} \right] - 1$$

$$i_q = \left[(1,1080)^{0,166667} \right] - 1$$

$$i_q = 1,0172 - 1$$

$$i_q = 0,0172 \times 100 = 1,72\% \text{ ao mês}$$

<u>Solução na HP-12 C</u>		
<u>Teclas</u>	<u>Visor</u>	<u>Significado</u>
f FIN f REG	0,00	Limpa registradores
1,108 ENTER	1,11	Taxa efetiva
6 $\frac{1}{x}$ y^x	1,02	Fator de atualização
1 <->	0,02	Taxa unitária
100 <x>	1,72	Taxa percentual

Atividades

01. Determinar o número de meses necessários para um capital dobrar de valor, a uma taxa de 2,5% ao mês, no regime de juros simples.
02. Qual é a taxa mensal de juros simples ganha por uma aplicação de R\$ 12.000,00 que produz, após um ano, um montante de R\$ 17.750,00?
03. Uma loja de eletrodomésticos tem a seguinte condição para a compra de uma máquina de lavar:
 - Preço à vista = R\$ 2.000,00
 - Condições a prazo = 20% de entrada e R\$ 1.750,00 em 30 dias.Qual a taxa de juros simples mensal embutida na venda a prazo?

- 04.** Quero comprar uma bicicleta com um cheque pré-datado para 45 dias no valor de R\$ 430,00. Sabendo que a loja cobra uma taxa de juros simples de 5,5% ao mês, calcule o preço da bicicleta caso ela fosse adquirida à vista.
- 05.** Um imposto no valor de R\$ 245,00 está sendo pago com 2 meses de atraso. Se a prefeitura cobrar juros simples de 40,80% ao ano, sobre este valor, qual será o valor que a pessoa deverá pagar de juros?
- 06.** Um capital inicial no valor de R\$ 34.000,00 gerou um montante igual a R\$ 57.300,00 após três anos. Calcule a taxa mensal da operação no regime de juros compostos.
- 07.** Qual o número de meses necessários para que uma aplicação de R\$ 6.000,00 produza juros no valor de R\$ 1.800,00 se a taxa de juros compostos for de 4,5% ao mês?
- 08.** Uma empresa solicita um empréstimo de R\$ 75.000,00 a juros compostos, à taxa composta de 30% ao ano. Qual o valor a ser pago após 3 anos?
- 09.** Um banco lança um título pagando 4% a.m. Se uma pessoa necessitar de R\$ 38.000,00 daqui a 5 anos, quanto ela deverá aplicar neste título?
- 10.** Quanto Juliana obterá de juro, ao final de 2 anos, numa aplicação que rende 7,4% ao mês de juros compostos, efetuando hoje um depósito de R\$ 6.000,00?
- 11.** Um cliente do Banco do Futuro contraiu um empréstimo no valor de R\$ 8.350,00 para ser pago daqui a 8 meses, mediante uma taxa de juros compostos igual a 88% ao ano. Quanto ele irá pagar no vencimento?
- 12.** Encontre as taxas equivalentes compostas:
- a) 18% ao ano para ao semestre;
 - b) 5% ao mês para ao trimestre;
 - c) 36% ao ano para ao mês;
 - d) 7% ao mês para ao semestre.

Reflexão

Neste capítulo estudamos o regime de capitalização juros simples e o regime de capitalização composta. Observou-se que, nesse regime, o juro incide somente sobre o capital inicial da operação financeira (aplicação ou empréstimo), ou seja, não incide sobre o saldo dos juros acumulados. Apesar da facilidade dos cálculos, ele não é bastante difundido na prática. Nas operações financeiras (empréstimos, aplicações, financiamentos etc.), o mais comum é a utilização do regime de juros compostos.

No regime de capitalização composta, ao contrário dos juros simples, o capital inicial e os juros acumulados são capitalizados. Trata-se da forma de capitalização mais adotada em operações financeiras. Deve-se destacar que os conceitos analisados até o momento e o instrumental matemático desenvolvido podem ser considerados como a base para todo o estudo de Matemática Financeira – conforme ficará claro nos próximos capítulos.

Leituras recomendadas

PASCHOARELLI, R. V. **A regra do jogo**: descubra o que não querem que você saiba no jogo do dinheiro. São Paulo: Saraiva, 2006.

FOLHA ON LINE. Entenda a diferença entre os principais índices de inflação. 05 Dezembro 2008. Disponível em: <http://www1.folha.uol.com.br/folha/dinheiro/ult91u465204.shtml>. Acesso em: 03/04/2010.

Referências

ASSAF NETO, A. **Finanças corporativas e valor**. São Paulo: Atlas, 2003.

ASSAF NETO, Alexandre. **Matemática financeira e suas aplicações**. 10 ed. São Paulo: Atlas, 2008.

BRANCO A.C.C. **Matemática Financeira Aplicada**: método algébrico, HP-12C, Microsoft Excel®. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2002.

KUHNEN, O. L.; BAUER, U. R. **Matemática financeira aplicada e análises de investimentos**. 2ª ed. São Paulo, Atlas, 1996.

LAPPONI, J. C. **Matemática financeira**. 1ª ed. Rio de Janeiro, Campus, 2006.

MATHIAS, W. F.; GOMES, J. M. **Matemática financeira**. 2ª ed. São Paulo, Atlas, 1996.

No próximo capítulo

Se pedirmos um dinheiro emprestado prometendo pagar futuramente, deveremos pagar o valor mais os juros acrescidos. Utilizando o raciocínio inverso, se anteciparmos o pagamento de uma dívida, teremos direito a um desconto. O desconto será o tema da próxima unidade. Aprenderemos que, para cada regime de capitalização, teremos os descontos equivalentes, o desconto simples e o desconto composto.

Minhas anotações:

This image shows a single page of white paper with horizontal blue or grey ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page, leaving small gaps between them. There are no margins, text, or other markings on the paper.

Capítulo 2

Desconto Simples e Desconto Composto

Neste segundo capítulo aprenderemos como calcular o desconto referente a antecipação de uma dívida ou liquidação de um título.

Objetivos da sua aprendizagem

Após este capítulo, esperamos que você seja capaz de:

- conhecer como e onde são utilizados os descontos.

Você se lembra?

De ter pagado uma dívida antecipadamente?



Introdução

Desconto “é o abatimento concedido sobre um título de crédito em virtude de seu resgate antecipado” (KUHNEN; BAUER, 1996, p. 47). Trata-se de uma prática bastante adotada e difundida em diversas operações comerciais e bancárias. Um indivíduo, na compra de um bem de consumo (TV, DVD, geladeira, fogão etc.), pode deparar-se com duas opções: pagamento à vista ou parcelado com desconto. Um outro caso é a antecipação de vendas a prazo que as empresas realizam por meio de operações de desconto de duplicatas em bancos comerciais – “o banco proporá uma determinada taxa de desconto sobre o valor das duplicatas” (LAPPONI, 2006, p. 118).

Suponha, por exemplo, que a empresa T tome um empréstimo, a uma taxa de juro i , para ser pago (N) dentro de 5 meses. Passados 3 meses, a empresa resolve pagar sua dívida de forma antecipada. O banco oferece, então, um desconto (D) para que essa antecipação ocorra. Dessa forma, a empresa paga ao banco um valor descontado (valor atual). Essa operação de desconto pode ser ilustrada em um diagrama do fluxo de capitais (DFC) – apresentado na figura abaixo. Por meio dessa figura, fica claro que:

Desconto = valor da nominal duplicata – valor atual

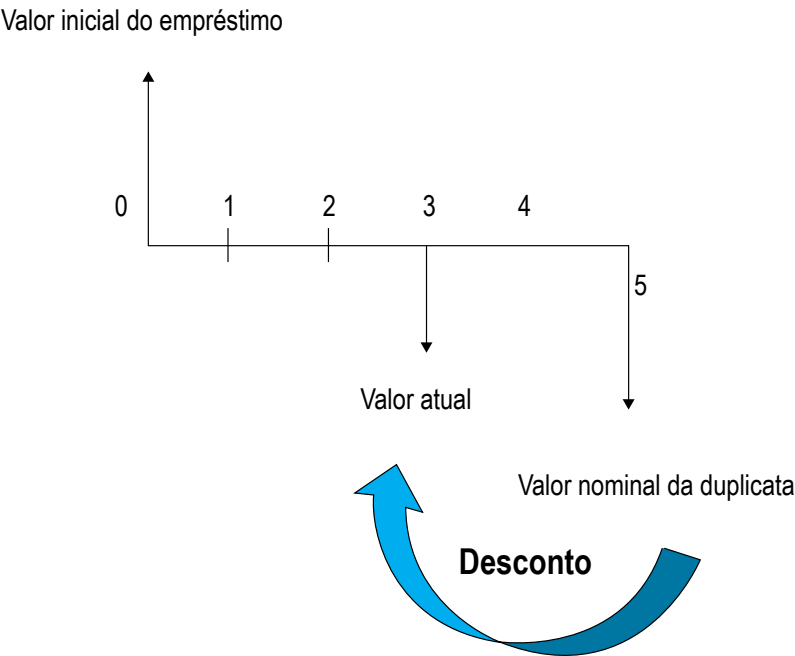


Figura 2.1 – DFC da empresa T (operação de desconto)

Conforme destaca Assaf Neto (2008), as operações de desconto podem ser realizadas tanto como no regime de juros simples como no de juros compostos. “O uso do desconto simples é amplamente adotado em operações de curto prazo, restringindo-se o desconto composto para as operações de longo prazo” (p. 79). Neste capítulo, o **desconto simples** e o **desconto composto** serão analisados detalhadamente.

2.1 Desconto simples

O desconto simples é baseado nos conceitos e no ferramental matemático desenvolvido no estudo do regime de capitalização conhecido como juros simples. Na prática, há dois tipos de desconto simples:

- desconto racional (ou “por dentro”);
- desconto bancário (ou comercial ou “por fora”).

2.1.1 Desconto ou comercial ou bancário ou “por fora”

Método bastante utilizado no mercado, principalmente em operações de crédito bancário e comercial a curto prazo, é o chamado desconto comercial ou bancário ou “por fora”.

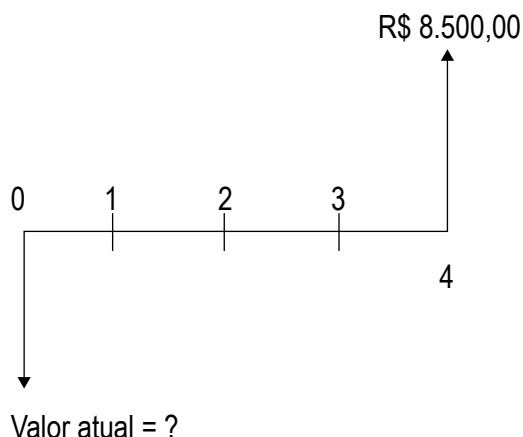
Este tipo de operação é muito utilizado por empresas que necessitam de capital de giro e possuem em sua carteira duplicatas originadas por suas vendas a prazo cujo valor só será recebido na data do vencimento. Este recebimento pode ser antecipado mediante esta modalidade de crédito em que o banco adianta para a empresa o dinheiro de suas vendas a prazo (MATHIAS, 2007).

Neste método de desconto, as relações básicas de juros simples também são utilizadas. Vejamos o exemplo:

Exemplo 2.1 - Suponha que uma empresa tenha emitido um título, com valor nominal (de face) de R\$ 8.500,00, vencível em 10 dezembro e descontado em 10 agosto à taxa de 2,5% a.m.. Qual será o valor do desconto e o valor atual do título se for adotado desconto comercial simple ou “por fora”?

Resolução:

Observe o diagrama, o título será antecipado (descontado) em 4 meses e em cada mês será concedido um desconto de 2,5%.



Taxa de desconto (i_D) = 2,5 % ao mês

Em 4 meses será descontado = $2,5\% \times 4 = 10\%$

Desconto = $8.500 \times 10\% = 850$

Valor atual = $8.500 - 850 = 7.650$

Neste método de desconto a taxa incide sobre o valor nominal (N) do título, assim o valor do desconto é maior neste tipo de operação. O valor do desconto pode ser calculado multiplicando a taxa desconto pelo valor nominal do título e pelo prazo de antecipação.

$$D = N \times i_D \times n$$

Já o valor atual foi calculado aplicando a seguinte fórmula:

$$A = N - D$$

Sendo que:

N = valor nominal → valor futuro, valor de resgate, valor de face do título, montante

D = desconto comercial ou “por fora”

A = valor atual, valor líquido, valor descontado, valor presente
→ é o valor que foi negociado antes do vencimento após ter recebido o desconto

i_D = taxa de desconto comercial

n = período, prazo de antecipação, tempo

Neste exemplo 2.1, é possível observar que foram descontados 10 % do valor nominal da duplicada, ou seja, do valor inteiro da duplicata (100% ou 1), foi retirada a décima parte. Seguindo este raciocínio, podemos que o valor atual é a nonagésima parte do valor nominal (90%). Vejamos na fórmula:

$A = N \times (1 - i_d \times n)$ $A = 8.500 \times (1 - 0,025 \times 4)$ $A = 8.500 \times (1 - 0,10)$ $A = 8.500 \times (0,90)$ $A = 7.650$	\leftarrow	Da parte inteira foi concedido um desconto de 10%, restando a nonagésima parte (90%)
---	--------------	--

Deste exemplo, poderemos usar a seguinte fórmula:

$$A = N \times (1 - i_D \times n)$$

Exemplo 2.2 – Determinar a taxa mensal de desconto comercial simples de uma nota promissória negociada 90 dias antes da data de seu vencimento, sendo seu valor nominal igual a R\$ 27.000,00 e seu valor líquido na data do desconto de R\$ 24.107,14.

Resolução:

$$N = \$ 27.000$$

$$n = 90 \text{ dias} = 3 \text{ meses}$$

$$A = \$ 24.107,14$$

$$i_D = ?$$

$$\text{Desconto} = 27.000 - 24.107,14 = 2.892,86$$

$D = N \times i_D \times n$ $2.892,86 = 27.000 \times i_D \times 3$ $2.892,86 = 81.000 \times i_D$ $i_D = \frac{2.892,86}{81.000}$ $i_D = 0,0357$ $i_D = 0,0357 \times 100 = 3,57\% \text{ a.m.}$

Resposta: A taxa de desconto comercial simples é de 3,57 % ao mês.

Exemplo 2.3 – O Banco do Futuro descontou uma nota promissória por R\$ 15.000,00. O banco opera com desconto comercial simples e a taxa de desconto é de 27,60 % ao ano. Sabendo que o prazo de vencimento da nota promissória é de 5 meses, calcule o valor nominal.

Resolução:

$$A = \$ 15.000,00$$

$$i_D = 27,60 \% \text{ a.a.} = 27,60/12 = 2,3/100 = 0,023$$

$$n = 5 \text{ meses}$$

$$N = ?$$

$$\begin{aligned} A &= N \times (1 - i_D \times n) \\ 15.000 &= N \times (1 - 0,023 \times 5) \\ 15.000 &= N \times (1 - 0,115) \\ 15.000 &= N \times 0,885 \\ N &= \frac{15.000}{0,885} \\ N &= 16.949,15 \end{aligned}$$

Resposta: O valor nominal da nota promissória é de R\$ 16.945,15.

O desconto comercial simples é um método diferente do desconto racional simples e, poderemos ver estas diferenças nos exemplos a seguir.

2.1.2 Desconto racional (ou “por dentro”)

No método conhecido como desconto racional (ou “por dentro”), os conceitos e as relações básicas de juros simples são utilizados para calcular o desconto a partir do capital inicial. Ou seja, utiliza-se o mesmo procedimento, mas ao invés de calcular o juro (J), é calculado o desconto racional (Dr) que, ao contrário do desconto comercial, o desconto incide sobre o valor inicial e não sobre o montante.

Dessa forma, utilizaremos a mesma fórmula para o cálculo dos juros simples ($FV = PV \times (1 + i \times n)$) agora usando a nomenclatura usada em exercícios de desconto:

$$N = A \times (1 + i \times n)$$

Sendo que:

N = valor nominal \rightarrow valor futuro (FV), valor de resgate, valor de face do título, montante

Dr = desconto racional ou “por dentro”

A = valor atual, valor líquido, valor descontado, valor presente (PV) \rightarrow é o valor que foi negociado antes do vencimento após ter recebido o desconto

i = taxa de desconto racional

n = período, prazo de antecipação, tempo

Resolveremos o mesmo exemplo 2.1 seguindo os conceitos do desconto racional simples.

Exemplo 2.4 – Suponha que uma empresa tenha emitido um título, com valor nominal (de face) de R\$ 8.500,00, vencível em 10 dezembro e descontado em 10 agosto à taxa de 2,5% a.m.. Qual será o valor do desconto e o valor atual do título se for adotado o desconto racional simples?

Resolução:

$$N = 8.500$$

$$n = 4 \text{ meses}$$

$$i = 2,5\% \text{ ao mês}$$

$$A = ?$$

$$Dr = ?$$

$$N = A \times (1 + i \times n)$$

$$8.500 = A \times (1 + 0,025 \times 4)$$

$$8.500 = A \times (1 + 0,10)$$

$$8.500 = A \times (1,10)$$

$$A = \frac{8.500}{1,10}$$

$$A = 7.727,27$$

$$Dr = N - A$$

$$Dr = 8.500 - 7.727,27$$

$$Dr = 772,73$$

Observe que no desconto comercial simples (exemplo 2.1) o valor do desconto é maior e o valor líquido é menor, isto ocorre porque o desconto é aplicado sobre o valor nominal e não sobre o valor atual como acontece nas operações de desconto racional (exemplo 2.4).

Para quem vai liberar os recursos financeiros, como por exemplo, um banco, a melhor opção é o Desconto Comercial ou “por fora”. Já para quem vai receber a liberação deste recurso através de uma operação de desconto, a melhor opção seria o método de cálculo do Desconto Racional.

Vejamos mais alguns exemplos:

Exemplo 2.5 – Determinar a taxa mensal de desconto racional simples de uma nota promissória negociada 90 dias antes da data de seu vencimento, sendo seu valor nominal igual a R\$ 27.000,00 e seu valor líquido na data do desconto de R\$ 24.107,14.

Resolução:

$$N = \$ 27.000$$

$$n = 90 \text{ dias} = 3 \text{ meses}$$

$$A = \$ 24.107,14$$

$$i = ?$$

$$N = A \times (1 + i \times n)$$

$$27.000 = 24.107,14 \times (1 + i \times 3)$$

$$27.000 = 24.107,14 + 72.321,42 \times i$$

$$27.000 - 24.107,14 = 72.321,42 \times i$$

$$2.892,86 = 72.321,42 \times i$$

$$2.892,86 = 72.321,42 \times i$$

$$i = \frac{2.892,86}{72.321,42}$$

$$i = 0,04$$

$$i = 0,04 \times 100 = 4\% \text{ ao mês}$$

Resposta: A taxa de desconto racional simples é de 4 % ao mês

Exemplo 2.6 – O Banco do Futuro descontou uma nota promissória por R\$ 15.000,00. O banco opera com desconto racional simples e a taxa de desconto é de 27,60 % ao ano. Sabendo que o prazo de vencimento da nota promissória é de 5 meses, calcule o valor nominal.

Resolução: Observe que neste exemplo o valor da nota promissória já é líquido, ou seja, já sofreu um desconto. Deveremos agora calcular o valor nominal:

$$A = \$ 15.000,00$$

$$i = 27,60 \% \text{ a.a.} = 27,60/12 = 2,3/100 = 0,023$$

$$n = 5 \text{ meses}$$

$$N = ?$$

$$\begin{aligned} N &= A \times (1 + i \times n) \\ N &= 15.000 \times (1 + 0,023 \times 5) \\ N &= 15.000 \times (1 + 0,115) \\ N &= 15.000 \times (1,115) \\ N &= 16.725 \end{aligned}$$

Resposta: O valor nominal da nota promissória é de R\$ 16.725,00.

Vale lembrar que a operação de desconto pode utilizar juros compostos. Complementado os estudos, vejamos agora o desconto composto.

2.2 Desconto Composto

O **desconto composto** “é o abatimento concedido sobre um título por seu resgate antecipado, ou a venda de um título antes de seu vencimento, observando os critérios da capitalização composta” (KUHNEN; BAUER, 1996, p. 91). É utilizado principalmente em operações de longo prazo. Deve-se destacar também que, assim como no regime simples, há dois tipos de desconto composto:

- Desconto Racional ou “por dentro”;
- Desconto Comercial ou “por fora”.

Vejamos a seguir cada um dos métodos:

2.2.1 Desconto Racional ou “por dentro”

O desconto composto racional segue as mesmas relações do regime de juros compostos. Portanto, este método também pode ser resolvido pelas funções financeiras do MS Excel e pela calculadora HP-12C. Já o desconto comercial composto na prática não é muito utilizado.

Vamos começar com as fórmulas:

$$FV = PV \times (1 + i)^n$$

Sendo que:

- FV = valor futuro, valor da duplicata, valor de resgate, valor de face, valor nominal;
- PV = valor presente, valor líquido, valor atual, valor já descontado;
- Dr = desconto racional.

Já o valor do desconto, como vimos anteriormente, é a diferença entre o valor nominal da duplicata e seu valor líquido na data do desconto:

$$Dr = Fv - PV$$

Observe o Exemplo:

Exemplo 2.7 – Uma duplicata de R\$ 24.500,00, com 75 dias a decorrer até o seu vencimento, foi descontada pelo método do desconto composto racional em um banco à taxa de 3,5% ao mês. Calcular o valor líquido creditado na conta do cliente.

Resolução:

- FV= \$ 24.500
- i= 3,5 % a.m. = 3,5/100 = 0,035
- n= 75 dias = 2,5 meses
- PV= ?

$$FV = PV \times (1 + i)^n$$
$$24.500 = PV \times (1 + 0,035)^{2,5}$$
$$24.500 = PV \times (1,035)^{2,5}$$
$$24.500 = PV \times 1,089810$$
$$PV = \frac{24.500}{1,089810}$$
$$PV = 22.480,98$$

Na HP-12C :

Observe que neste exercício o período esta fracionado, então temos que acionar os comandos STO EEX

F Fin (para limpar)

24.500 CHS PV

2,5 n

3,5 i

PV

Visor \Rightarrow 22.480,98

Resposta – O valor líquido a ser creditado na conta do cliente é de R\$ 22.480,98.

2.2.2 Desconto Comercial ou “por fora”

O desconto comercial composto tem pouca aplicação prática. Consiste em sucessivos descontos sobre o valor nominal (desconto sobre desconto). O valor atual líquido da duplicata pode ser definido por:

$$A = N \times (1 - i_D)^n$$

Sendo que:

N = valor nominal, valor futuro, valor da duplicata, valor de resgate, valor de face

A = valor atual, valor líquido, valor presente, valor já descontado.

Observem que a fórmula é muito parecida com a do desconto comercial simples, só que neste caso são “descontos sobre descontos”.

Já o valor do desconto comercial (D) é o valor nominal menos o valor atual da duplicata:

$$D = N - A$$

Exemplo 2.8 – Uma duplicata de R\$ 24.500,00, com 75 dias a decorrer até o seu vencimento, foi descontada pelo método do desconto composto comercial em um banco à taxa de 3,5 % ao mês. Calcular o valor líquido creditado na conta do cliente.

Resolução:

$$FV = \$ 24.500$$

$$d = 3,5 \% \text{ a.m.} = 3,5/100 = 0,035$$

$$n = 75 \text{ dias} = 2,5 \text{ meses}$$

$$Vf = ?$$

$$\begin{aligned} A &= N \times (1 - i_D)^n \\ A &= 24.500 \times (1 - 0,035)^{2,5} \\ A &= 24.500 \times (0,965)^{2,5} \\ A &= 24.500 \times 0,914783 \\ A &= 22.412,19 \end{aligned}$$

Resposta: O valor líquido a ser creditado na conta do cliente é **R\$ 22.412,19.**

Observação: os exercícios de desconto composto comercial não podem ser resolvidos pelas funções financeiras do MS Excel nem pela calculadora HP 12-C.

2.3 Fórmulas utilizadas

Resumindo em uma tabela, as fórmulas utilizadas para cálculo dos descontos são as seguintes:

	Juros Simples		Juros Compostos	
	Utilizado em operações de curto prazo		Utilizado em operações de longo prazo	
Desconto racional ou “por dentro”	Valor atual (A)	Desconto (D)	Valor Atual (PV)	Desconto (D)
	$N = A \times (1 + i \times n)$	$D = N - A$	$PV = FV \times (1 + i)^n$	$D = FV - PV$
Desconto Comercial (“por fora”)	Valor atual (A)	Desconto (D)	Valor atual (A)	Desconto (D)
	$A = N(1 - i_D \times n)$	$D = N - A$ ou $D = N \times i_D \times n$	$A = N \times (1 - i_d)^n$	$D = N - A$

Quadro 2.1 – Fórmulas de desconto

Atividades

I - Desconto simples

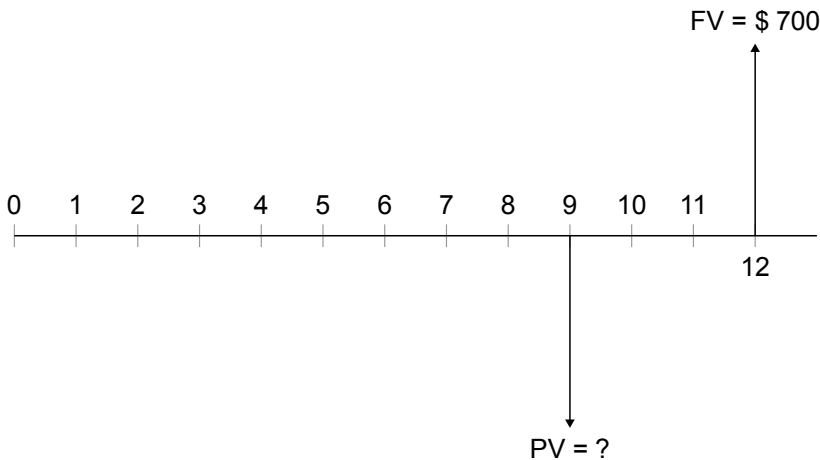
01. Um título de valor nominal de R\$ 78.895,00 foi pago 2 meses antes do vencimento. Se a taxa mensal de desconto racional simples era de 54% ao ano, qual o valor do título na data do desconto e qual o valor do desconto?
02. O valor do desconto comercial simples de um título 3 meses antes do seu vencimento é de R\$ 850,00. Considerando uma taxa de 18% ao ano, obtenha o valor nominal do título.
03. A Empresa Alpha Comércio Ltda. concede um desconto racional simples de 3,5% ao mês para os clientes que antecipam o pagamento de suas duplicatas. Um cliente deseja antecipar o pagamento de um título de R\$ 12.000,00 com vencimento programado para 75 dias. Determine o valor do desconto a ser concedido e o valor líquido a ser concedido pela empresa.

04. Um atacadista possui, em seu grupo de contas a receber, uma nota promissória no valor de R\$ 7.000,00 e cuja data de recebimento está programada para daqui a 4 meses. Sabendo que o atacadista pensa em descontar essa nota promissória em um banco que cobra uma taxa de desconto simples de 2% a.m., calcule o valor líquido a ser recebido pelo atacadista pelos métodos:

- a) desconto racional;
- b) desconto comercial;
- c) faça uma comparação entre os dois métodos.

05. Um título com valor nominal de \$ 700,00, com vencimento programado para daqui a 1 ano, será liquidado 3 meses antes da data de vencimento. Sabendo que foi aplicado o desconto racional simples a uma taxa de 3% ao mês, calcule o valor líquido e o valor do desconto.

Observação – Este diagrama de fluxo de caixa ajudará você a resolver o exercício.



II – Desconto composto

01. O cliente de um banco deseja descontar uma nota promissória 5 meses antes de seu vencimento. O valor nominal deste título é de R\$ 25.000,00. Sendo de 5% ao mês a taxa de desconto composto racional, qual o valor líquido recebido pela pessoa?

02. Um banco libera a um cliente R\$ 7.500,00 oriundos do desconto de uma duplicata de valor nominal de R\$ 10.000,00, descontado à taxa de 3,5% ao mês. Calcular o prazo de antecipação em que foi descontado este título, sabendo que o banco utilizou o método do desconto composto racional.

03. Calcular a taxa mensal de desconto composto racional de um título com valor nominal de R\$ 4.200,00 negociado 60 dias antes da data de seu vencimento. O valor atual deste título é de R\$ 3.997,60.

04. O valor nominal de um título é de R\$ 35.000,00. Este título é negociado mediante uma operação de desconto composto comercial 3 meses antes de seu vencimento. A taxa de desconto alcançada atinge 2,5% ao mês. Pede-se determinar o valor atual na data do desconto e o valor do desconto concedido.

05. Uma empresa tem com um banco uma dívida de R\$ 70.000,00 cujo vencimento se dará daqui a 12 meses. No entanto, a empresa resolve quitar a dívida 3 meses antes da data do vencimento e solicita ao banco um desconto.

O banco informa que opera com o método de desconto composto comercial, sendo sua taxa de desconto de 4% ao mês.

A partir destes dados, calcule o valor líquido que a empresa deve pagar ao banco e o valor que será concedido de desconto.

Gabarito

I - Desconto Simples

1. R\$ 72.380,73

R\$ 6.514,26

2. R\$ 18.888,89

3. R\$ 965,52

R\$ 11.034,48

4.

a) R\$ 6.481,48

b) R\$ 6.440,00

c) O valor líquido liberado pelo desconto comercial é menor do que o valor liberado pelo desconto racional, isto ocorre porque nas operações de desconto comercial a taxa de juros incide sobre o valor futuro (valor

nominal), enquanto que nas operações de desconto racional a taxa incide sobre o valor inicial.

5. R\$ 642,20

R\$ 57,80

II - Desconto Composto

1. R\$ 19.588,15

2. 7,14 meses (7 meses e 4 dias)

Observação: na HP-12C a resposta será 8 meses.

3. 2,5% a.m.

4. R\$ 32.440,08

R\$ 2.559,92

5. R\$ 61.931,52

R\$ 8.068,48

Reflexão

Neste capítulo, foram estudados os vários mecanismos que podem ser utilizados para o cálculo de descontos – abatimentos concedidos em virtude de seu resgate antecipado. Trata-se de uma prática bastante adotada em operações bancárias e comerciais, o que justifica o estudo detalhado desse tema. Observou-se que há regimes de cálculo de desconto que adotam os conceitos e o instrumental dos juros simples e há regimes que adotam os conceitos e o instrumental dos juros compostos.

Leitura recomendada

Leia o artigo publicado no XI SEMEAD – Simpósio de Administração mostrando uma aplicação das operações de desconto a gestão do capital de Giro:

PEREIRA, F.A.; SOUZA, Z. J. Análise da gestão do capital de giro em uma empresa de pequena e médio porte da Região de Ribeirão Preto (SP); um estudo de caso. In: SIMPÓSIO EM ADMINISTRAÇÃO. 11., 2008. São Paulo. Anais eletrônicos... São Paulo. USP, 2008. Disponível em: < <http://www.ead.fea.usp.br/semead/11semead/resultado/trabalhosPDF/184.pdf>> Acesso em 06 abril 2010.

Referências

ASSAF NETO, Alexandre. Matemática financeira e suas aplicações. 10 ed. São Paulo: Atlas, 2008.

KUHNEN, O. L.; BAUER, U. R. Matemática financeira aplicada e análises de investimentos. 2ª ed. São Paulo, Atlas, 1996.

LAPPONI, J. C. Matemática financeira. 1ª ed. Rio de Janeiro, Campus, 2006.

MATHIAS, A.B. (coord). Finanças Corporativas de Curto Prazo: a gestão do valor do capital de Giro. São Paulo: Atlas, 2007. v 1.

MATHIAS, W. F.; GOMES, J. M. Matemática financeira. 2ª ed. São Paulo, Atlas, 1996.

No próximo capítulo

O próximo capítulo apresentará um conceito importante na Matemática Financeira, as séries de pagamento, que são os pagamentos ou recebimentos iguais feitos durante intervalos de tempo regulares.

Capítulo 3

Série de Pagamentos/ Recebimentos

Neste capítulo, serão apresentados os principais conceitos relativos às séries uniformes de pagamentos – séries em que os pagamentos ou os recebimentos são iguais em intervalos regulares de tempo.

Série uniforme de pagamentos postecipada

Série uniforme de pagamentos antecipada

Plano de poupança

Objetivos da sua aprendizagem

Após este capítulo, esperamos que você seja capaz de:
visualizar a série de recebimentos e de pagamentos como fluxo.

Você se lembra?

Da última compra parcelada que você fez? Você sabe como são calculados os juros de cada parcela?

Introdução

Os capítulos 1 e 2 serviram para formar a base conceitual para, enfim, iniciarmos-nos no mundo dos fluxos.

Em matemática financeira, “tudo é **fluxo**”!

De acordo com Assaf Neto (2008), a matemática financeira estuda o valor do dinheiro ao longo do tempo. O seu objetivo básico é analisar e comparar vários fluxos de entradas e saídas de dinheiro em diferentes momentos. Seguindo a mesma linha de raciocínio, Mathias e Gomes (1996) afirmam que os problemas financeiros dependem basicamente desse fluxo de entradas e saídas. Conhecido como fluxo de caixa ou de capitais, pode ser representado graficamente em um diagrama do fluxo de caixa ou de capitais (DFC).

Trata-se de uma importante ferramenta para a análise de operações envolvendo matemática financeira, pois permite a visualização do que ocorre com o capital ao longo do período analisado – “a visualização de um problema envolvendo receitas e despesas que ocorrem em instantes diferentes do tempo é bastante facilitada” (CASAROTTO FILHO, KOPIT-TKE, 1998, p. 20).

O hábito de construir o DFC desenvolve a atitude de equacionar o problema antes de resolvê-lo, preparando uma boa parte do caminho da solução. [...] Conhecidos os dados e as especificações do problema, recomenda-se desenhar o DFC correspondente que registrará os dados disponíveis e o objetivo do problema, a incógnita que se deve calcular, restando apenas escolher a abordagem de resolução do problema (LAPPONI, 2006, p. 12).

Antes de resolver um problema financeiro (na HP-12C) envolvendo pagamentos periódicos (séries de pagamento), deve-se especificar se a modalidade de pagamento é antecipada (os pagamentos se iniciam na data 0) ou postecipada (os pagamentos se iniciam na data 1), o que é realizado por meio das funções BEG e END. No Excel, para escolher a modalidade, foi separado em 0=BEGIN, e 1=END, a opção de escolha é TYPE=0 (início de período) ou TYPE=1 (final de período).

A reta horizontal é uma escala de tempo, crescente da esquerda para a direita – mostra o horizonte financeiro da operação. As flechas indicam

entradas e saídas de dinheiro da empresa. Uma flecha para cima significa entrada ou recebimento de dinheiro; uma flecha para baixo significa saída ou aplicação de dinheiro. Convencionou-se, ainda, que o tamanho das flechas deve representar, proporcionalmente, o valor do dinheiro que está entrando ou saindo – o que, na prática, não precisa ocorrer, desde que também seja destacado o valor do dinheiro que entrou ou saiu.

Por último, é importante destacar que, em toda operação financeira, há no mínimo dois agentes negociando: quando um dos agentes tem uma saída de capital, o outro terá uma entrada do mesmo capital. Dessa forma, ao se desenhar um DFC, deve ser apontado a qual agente envolvido na operação ele se refere.

Em resumo, o diagrama de fluxo de caixa de uma operação financeira é uma representação esquemática das entradas e das saídas de caixa que ocorrem ao longo do tempo. Na escala horizontal, são indicados os períodos de tempo, que podem ser: dias, meses, anos etc. Os valores de PV, PMT e FV devem ser introduzidos na calculadora com o sinal adequado, de acordo com a “convenção de sinal do fluxo de caixa”, que é a seguinte:

Ingresso ou recebimento de dinheiro (flecha apontando para cima no diagrama de fluxo de caixa): sinal positivo (+).

Saída ou pagamento de dinheiro (flecha direcionada para baixo no diagrama de fluxo de caixa): sinal negativo (-).

- A unidade de tempo da taxa de juros i deve coincidir com a unidade de tempo do período n ;
- Na HP-12C e no Excel: os cinco elementos são sempre interligados; anular o quinto elemento que não participar do problema; observar a convenção de sinal:
 - Série antecipada \rightarrow BEGIN / TYPE = 1
 - Série postecipada \rightarrow END / TYPE = 0

Imagine uma operação de empréstimo: a **empresa X** possui R\$ 100 milhões de reais para emprestar, por um ano, a uma taxa de juro de 10%. A **empresa Y**, por sua vez, deseja tomar esse capital. Se a transação fosse concretizada, como seria o DFC relacionado à operação para cada uma das empresas?

- **empresa X**: a empresa troca seu poder de compra (investimento) atual por um maior poder de compra (investimento) no futuro, recebendo em troca uma remuneração (prêmio), definida pelo valor da taxa de

juro. Dessa forma, há uma saída de capital no instante 0 (hoje) igual a R\$ 100 milhões e uma entrada de capital no instante 1 (daqui a um ano) igual a R\$ 110 milhões. Tal dinâmica pode ser observada no DFC apresentado na figura 3.1.

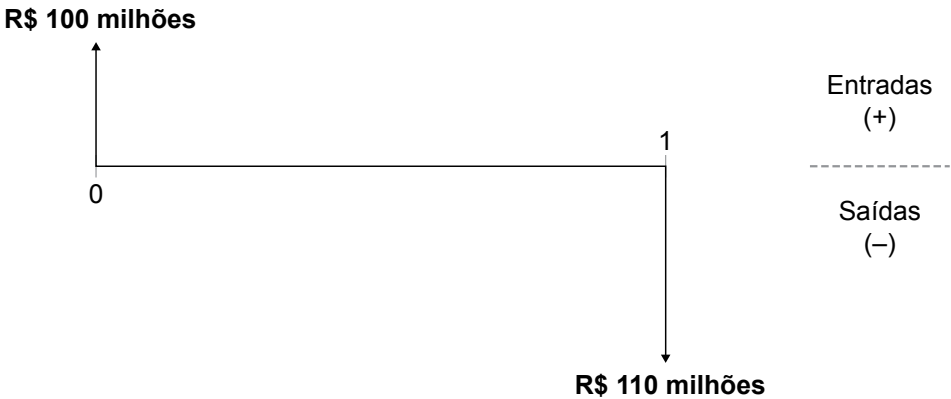


Figura 3.1 – DFC da empresa X

- **empresa Y:** a empresa Y troca seu poder de compra (investimento) futuro por um poder de compra (investimento) no presente, pagando em troca uma remuneração (prêmio), definida pelo valor da taxa de juro. Dessa forma, há uma entrada de capital no instante 0 (hoje) igual a R\$ 100 milhões e uma saída de capital no instante 1 (daqui a um ano) igual a R\$ 110 milhões. Tal dinâmica pode ser observada no DFC apresentado na figura 3.2.

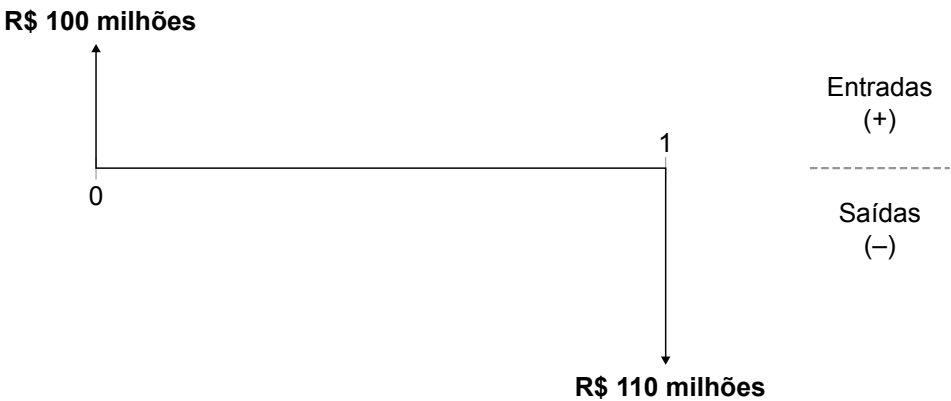


Figura 3.2 – DFC da empresa Y

O próximo quadro apresenta as principais variáveis que serão utilizadas no estudo de matemática financeira, assim como o símbolo adotado, no curso, para cada uma delas – essa simbologia facilitará a aprendizagem. Além disso, o quadro também mostra diversas denominações adotadas para cada uma das variáveis – o que ajudará os alunos caso estes consultem outros livros.

Variável	Símbolo	Definição
Prazo	N	<ul style="list-style-type: none"> • duração da operação; • outras denominações: tempo, número de períodos, quantidade de prestações etc.
Juro	J	<ul style="list-style-type: none"> • remuneração (ou pagamento) que se deve receber (ou fazer) pelo empréstimo de capital.
Taxa de juro	I	<ul style="list-style-type: none"> • coeficiente que determina o valor do juro; • custo de fazer empréstimos (tomadores); • remuneração do capital (poupadores).
Valor presente	PV	<ul style="list-style-type: none"> • capital em determinado momento (tomado emprestado ou aplicado); • outras denominações: capital, valor atual, valor presente, principal da operação, valor de aquisição, valor do empréstimo, valor do financiado, valor do resgate antecipado etc.
Valor futuro	FV	<ul style="list-style-type: none"> • valor do capital em qualquer período posterior ao analisado (capital inicial mais juros); • valor acumulado resultante de uma determinada quantia de capital aplicada a uma taxa periódica de juro por determinado tempo; • outras denominações: montante, futuro, valor acumulado da operação, valor nominal de um título, valor de face, valor residual de um bem, valor do capital acrescido de seus rendimentos etc.
Parcela	PMT	<ul style="list-style-type: none"> • fluxo de caixa, valor de cada parcela, de cada prestação, de cada depósito, de cada amortização etc.

Quadro 3.1 – Matemática financeira: principais variáveis

Lapponi (2006), Assaf Neto (2008) e Kuhnlen e Bauer (1996)

Após observar o quadro 3.1, já é possível definir, por meio de fórmulas matemáticas, algumas das variáveis apresentadas. Para simplificar as análises a serem realizadas a seguir, será considerado que o prazo é igual a um, ou seja, que a operação se concretiza em um período. Tal simplificação será relatada ao longo do capítulo.

O juro (J) pode ser obtido pela diferença entre o valor futuro (FV) e o valor presente (PV). Ou seja, o valor do juro corresponde à diferença entre o capital final (montante) e o capital inicial da operação financeira. Consequentemente: (i) o valor futuro é igual ao valor presente mais o juro e (ii) o valor presente é igual ao valor futuro menos o juro. Por Exemplo, quando uma pessoa toma um capital emprestado, ao final do período estipulado, ela deverá ter pagado o valor tomado mais o juro (remuneração) definido.

$$J = FV - PV$$

$$FV = PV + J$$

$$PV = FV - J$$

Conforme já foi apontado, a taxa de juro (i) é o coeficiente que determina o valor do juro – da remuneração (poupadores) ou do custo (tomadores) de uma operação financeira. Ou seja, é a proporção que o juro representa no valor presente; a parcela do valor presente exigida a mais – remuneração (emprestador) ou custo (tomador) – para a concretização da operação.

$$i = \frac{J}{PV}$$

A taxa de juro pode ser representada das seguintes formas: (i) percentual (50%, por Exemplo) – valor do juro para cada centésima parte do capital – ou (ii) unitária (0,50, por Exemplo) – rendimento de cada unidade de capital. Nas fórmulas de matemática financeira, todos os cálculos são efetuados utilizando-se a taxa unitária de juro.

O juro também pode ser calculado pela multiplicação do valor presente pela taxa de juro. Dessa forma, fica claro que a taxa de juro mede a “prosperidade de uma operação” (LAPPONI, 2006, p. 5). Isto porque, se $i = 0$ (juro nulo), o valor (capital) final será igual ao valor (capital) inicial.

Se $i > 0$ (juro positivo), o valor final será maior do que o valor inicial; se $i < 0$ (juro negativo), o valor final será menor do que o valor inicial.

$$J = PV \times i$$

A sucessão de pagamentos ou recebimentos (de juros, por Exemplo) recebe várias denominações: séries de pagamento, fluxo de caixa, anuidade, séries etc. É bastante comum, na prática, defrontar-se com operações financeiras que se representam por um fluxo de caixa. Normalmente, empréstimos e financiamentos de diferentes tipos costumam envolver uma sequência de desembolsos periódicos de caixa. De maneira idêntica, têm-se os fluxos de pagamentos/recebimentos de aluguéis, de prestações oriundas de compras a prazo, de investimentos empresariais, de dividendos etc. (ASSAF NETO, 2008)

No presente capítulo, o objetivo é estudar, detalhadamente, as séries de pagamento/recebimento. Primeiramente, é importante apontar que os capitais (pagamentos ou recebimentos) referidos a uma dada taxa de juro i são chamados de anuidade. Os valores que constituem a renda são os termos da mesma. O intervalo de tempo entre dois termos é chamado de período e a soma dos períodos é conhecida como a duração da anuidade. O valor presente de uma anuidade é a soma dos valores atuais dos seus termos – soma feita para uma mesma data focal e à mesma taxa de juros. Já o valor futuro (montante) de uma anuidade é a soma dos montantes de seus termos, considerada uma dada taxa de juro e uma data focal (MATHIAS; GOMES, 1996)

Os termos da anuidade serão representados, no estudo, pelo símbolo PMT. Já para os demais elementos, será empregada a mesma simbologia adotada até aqui: valor presente (PV), valor futuro (FV), prazo (n) e taxa de juro (i). Deve-se destacar, ainda, que existem tipos distintos de séries (anuidades), que podem ser diferenciadas em relação a quatro aspectos:

(i) período de ocorrência

- postecipadas ou vencidas: os termos são exigíveis no fim dos períodos;
- antecipadas: os termos são exigíveis no início dos períodos;
- diferidas: os termos são exigíveis em uma data diferente do primeiro período (com carência).

(ii) periodicidade

- periódicas: todos os períodos são iguais;
- não periódicas: os períodos não são iguais entre si.

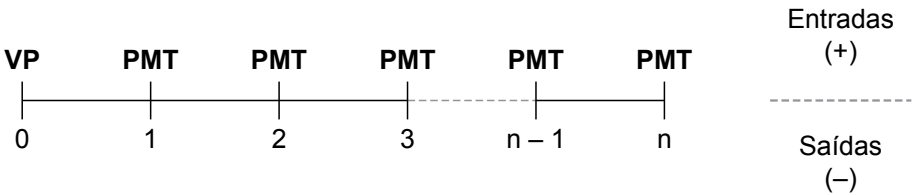
(iii) duração

- temporárias (ou limitadas): duração limitada;
- perpétuas (ou indeferidas): duração ilimitada.

(iv) valores

constantes (ou uniformes): todos os termos são iguais;
variáveis: os termos não são iguais entre si.

O modelo básico de séries de pagamento/recebimento pode ser representado, graficamente, da seguinte maneira:



ASSAF NETO (2008, P. 99)

Figura 3.3 – Modelo padrão de séries de pagamento/recebimento

Se for uma série de pagamentos, as setas que representam os termos (PMT) devem apontar para baixo. Se for uma série de recebimentos, as setas que representam os termos (PMT) devem apontar para cima.

A figura acima ilustra, claramente, as características fundamentais do modelo básico de séries de pagamento/recebimento:

- o PMT inicial ocorre em $n = 1$, ou seja, após o período inicial (postecipada);
- a diferença entre a data de um termo e outro é constante, ou seja, todos os períodos são iguais (periódica);
- o prazo do fluxo é fixo (temporária) e
- todos os termos (PMT) são iguais (uniformes).

Vejamos com maiores detalhes as séries postecipadas (e o plano de poupança) e as antecipadas.

3.1 Série uniforme de pagamentos postecipada

Nas séries uniformes de pagamentos postecipada, os pagamentos começam a ocorrer no final do primeiro período, ou seja, a prestação inicial do financiamento é paga no final do primeiro período do prazo contratado (ASSAF NETO, 2008).

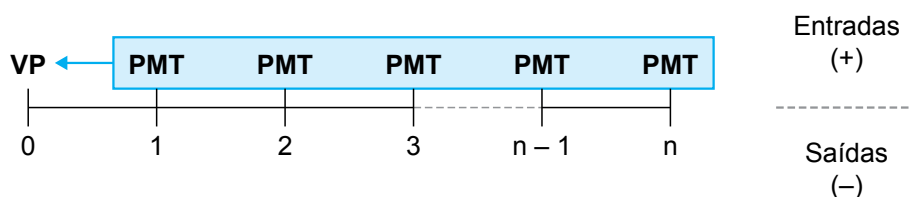


Figura 3.4 – Modelo básico de séries de pagamento/recebimento: representação do cálculo do valor presente (Assaf Neto, 2008, p. 99).

O valor presente nada mais é do que o somatório dos valores de cada um dos termos atualizados para a data que se deseja analisar.

$$PV = \frac{PMT}{(1+i)^1} + \frac{PMT}{(1+i)^2} + \frac{PMT}{(1+i)^3} + \frac{PMT}{(1+i)^4} + \dots + \frac{PMT}{(1+i)^{n-1}} + \frac{PMT}{(1+i)^n}$$

Genericamente, o valor presente pode ser calculado por meio da fórmula abaixo. A dedução dessa fórmula é complicada e trabalhosa, fugindo do escopo do estudo. Por isso, optou-se por apenas apresentá-la:

$$PV = PMT \times \left[\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n \times i} \right]$$

Sendo que:

PV (ou A) = valor presente, valor atual, valor inicial ou valor que será financiado

PMT (ou P) = pagamentos ou recebimentos (prestações)

i = taxa de juros

n = período

Utilizamos as mesmas siglas (PV, FV, PMT, i, n) encontradas na HP-12C ou Excel.

A expressão apresentada dentro dos colchetes é chamada de Fator Atual de uma série de pagamentos, mas devido a facilidade da utilização de calculadoras, calcularemos algebricamente este fator sem o auxílio de tabelas.

Para entender melhor estes conceitos, vamos resolver os exemplos a seguir:

Exemplo 3.1 – Um carro é vendido à vista por R\$ 35.000,00. Um comprador deseja financiá-lo em 36 meses pagando uma taxa de 1,99% ao mês. Calcule o valor da prestação sabendo que a primeira prestação foi paga um mês após a compra.

Resolução:

$PV = R\$ 35.000,00$



$PV = \$ 35.000$
 $n = 36 \text{ meses}$
 $i = 1,99 \% \text{ a.m.} = 1,99/100 = 0,0199$
 $PMT = ?$

$$PV = PMT \times \left[\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n \times i} \right]$$
$$35.000 = PMT \times \left[\frac{(1+0,0199)^{36} - 1}{(1+0,0199)^{36} \times 0,0199} \right]$$
$$35.000 = PMT \times \left[\frac{(1,0199)^{36} - 1}{(1,0199)^{36} \times 0,0199} \right]$$
$$35.000 = PMT \times \left[\frac{2,03270 - 1}{2,03270 \times 0,0199} \right]$$
$$35.000 = PMT \times \left[\frac{1,03270}{0,040451} \right]$$
$$35.000 = PMT \times 25,529653$$
$$\frac{35.000}{25,529653} = PMT$$
$$PMT = 1.370,95$$

Na HP-12C:

Para resolvermos uma série postecipada, devemos antes apertar os comandos g END :

f Reg (para limpar)

g END (modo postecipado)

35.000 CHS PV

1,99 i

36 n

PMT

Visor $\Rightarrow 1.370,95$

Resposta: O comprador irá pagar uma prestação de R\$ 1.370,95.

Exemplo 3.2 – Um apartamento custa à vista R\$ 200.000,00, mas pode ser adquirido com uma entrada de 20 % e o financiamento do saldo restante em 60 prestações iguais mensais a uma taxa de juros de 2 % ao mês. Calcule o valor das parcelas.

Resolução: Valor à vista = \$ 200.000 \Rightarrow como o comprador irá dar 20 % de entrada, financiará somente o restante:

\$ 200.000 \times 20 % = \$ 40.000 \Rightarrow \$ 200.000 – \$ 40.000 = \$ 160.000
 \Rightarrow este valor será o PV (valor inicial do financiamento)

$n = 60$ meses

$i = 2\% \text{ a.m.} = 2/100 = 0,02$

PMT = ?

Cabe ressaltar que esta situação é uma série postecipada, pois a entrada é diferente das demais prestações. O desenvolvimento do exercício ficará assim:

$$PV = PMT \times \left[\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n \times i} \right]$$

$$160.000 = PMT \times \left[\frac{(1+0,02)^{60} - 1}{(1+0,02)^{60} \times 0,02} \right]$$

$$PMT = 160.000 \times \left[\frac{(1,02)^{60} \times 0,02}{(1,02)^{60} - 1} \right]$$

$$160.000 = PMT \times \left[\frac{3,281031 - 1}{3,281031 \times 0,02} \right]$$

$$160.000 = PMT \times \left[\frac{2,281031}{0,065621} \right]$$

$$160.000 = PMT \times 34,760887$$

$$\frac{160.000}{34,760887} = PMT$$

$$PMT = 4.602,88$$

Na HP-12C:

f Reg (para limpar)
 g END (modo postecipado)
 160.000 CHS PV
 2 i
 60 n
 PMT
 Visor \Rightarrow 4.602,88

Resposta: O valor de cada prestação será R\$ 4.602,88.

Exemplo 3.3 – Uma moto usada está sendo vendida por R\$ 1.000,00 de entrada mais 12 pagamentos iguais mensais de R\$ 500,00. Sabendo-se que a taxa de juros de mercado é de 3,5 % ao mês, determine o valor do preço à vista da moto.

Resolução: Neste exercício estamos procurando o valor à vista, mas como resolveremos?

Observe que uma parte está a prazo, no caso as parcelas de R\$ 500,00 e outra parte já foi dada como entrada, os R\$ 1.000,00. Os juros só estão embutidos na parte a prazo, pois como os R\$ 1.000,00 é a entrada (data 0), não tem juros. Então, primeiramente acharemos o PV de no final do exercício somaremos com a entrada.

A resolução ficará assim:

$$PV = PMT \times \left[\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n \times i} \right]$$

$$PV = 500 \times \left[\frac{(1+0,035)^{12} - 1}{(1+0,035)^{12} \times 0,035} \right]$$

$$PV = 500 \times \left[\frac{(1,035)^{12} - 1}{(1,035)^{12} \times 0,035} \right]$$

$$PV = 500 \times \left[\frac{1,511069 - 1}{1,511069 \times 0,035} \right]$$

$$PV = 500 \times \left[\frac{0,511069}{0,052887} \right]$$

$$500 = PV \times 0,103484$$

$$PV = \frac{500}{0,103484}$$

$$PV = 4.831,66$$

agora vamos somar a entrada

$$PV = 4.831,66 + 1.000 = 5.831,66$$

Na HP-12C:

f Fin (para limpar)
 g END (modo postecipado)
 500 CHS PMT
 3,5 i
 12 n
 PV
 Visor \Rightarrow 4.831,66
 1.000 +
 Visor \Rightarrow 5.831,66

Resposta: O valor à vista da moto é R\$ 5.831,66.

3.2 Série Uniforme de Pagamentos Antecipada

O primeiro pagamento ocorre na data 0 (zero), ou seja o primeiro pagamento ocorre no ato da contratação do empréstimo ou financiamento, mas vale ressaltar que o valor desta primeira prestação é igual aos demais pagamentos. Muitos conhecem este sistema como série de pagamentos com entrada. Nós podemos encontrar o valor desta prestação através seguinte fórmula:

Para resolvermos uma série antecipada, devemos antes apertar os comandos g BEG – aparecerá a palavra BEGIN no visor (para tirar, é só apertar g END).

$$PV = PMT \times \left[\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^{n-1} \times i} \right]$$

Sendo que:

PV (ou A) = valor presente, valor atual ou valor que será financiado

PMT (ou P) = pagamentos ou recebimentos (prestações)

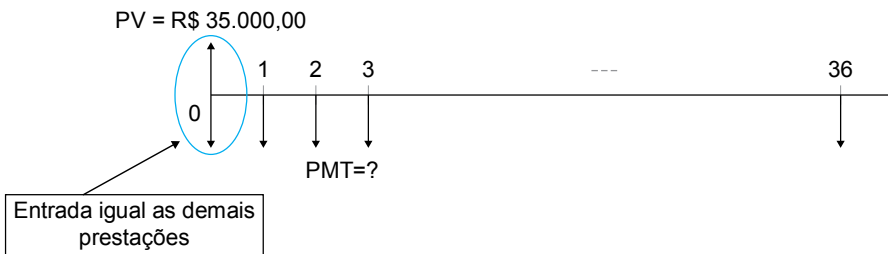
i = taxa de juros

n = período, número de prestações em determinado período

Vamos resolver alguns exemplos:

Exemplo 3.4 – Um carro é vendido à vista por R\$ 35.000,00. Um comprador deseja financiá-lo em 36 meses pagando uma taxa de 1,99% ao mês. Calcule o valor da prestação sabendo que a primeira prestação foi paga no ato da compra.

Resolução:



PV= \$ 35.000
n = 36 meses
i = 1,99 % a.m. = 1,99/100 = 0,0199
PMT = ?

$$PV = PMT \times \left[\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^{n-1} \times i} \right]$$
$$35.000 = PMT \times \left[\frac{(1+0,0199)^{36} - 1}{(1+0,0199)^{36-1} \times 0,0199} \right]$$
$$35.000 = PMT \times \left[\frac{(1+0,0199)^{36} - 1}{(1+0,0199)^{35} \times 0,0199} \right]$$
$$35.000 = PMT \times \left[\frac{(1,0199)^{36} - 1}{(1,0199)^{35} \times 0,0199} \right]$$
$$35.000 = PMT \times \left[\frac{2,03270 - 1}{1,993039 \times 0,0199} \right]$$
$$35.000 = PMT \times \left[\frac{1,03270}{0,039661} \right]$$
$$35.000 = PMT \times 26,038173$$
$$\frac{35.000}{26,038173}$$
$$PMT = 1.344,20$$

Na HP-12C:
f Reg (para limpar)
g BEG (modo antecipado)
35.000 CHS PV
1,99 i
36 n
PMT
Visor => 1.344,20

Resposta: O comprador irá pagar uma prestação de R\$ 1.344,20.

Exemplo 3.5 – Uma loja oferece um liquidificador a ser pago em 4 parcelas iguais mensais de R\$ 30,00, sendo a primeira parcela paga no ato da compra (1+4). Sabendo a taxa de juros cobrada pela loja é de 3 % ao mês, qual o valor do liquidificador a vista?

Resolução:
PMT = \$ 30
n = 4 meses
i = 3 % a.m. = 3/100 = 0,03
PV= ?

$$\begin{aligned}PV &= PMT \times \left[\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^{n-1} \times i} \right] \\PV &= 30 \times \left[\frac{(1+0,03)^4 - 1}{(1+0,03)^{4-1} \times 0,03} \right] \\PV &= 30 \times \left[\frac{(1,03^4) - 1}{(1,03)^3 \times 0,03} \right] \\PV &= 30 \times \left[\frac{1,125509 - 1}{1,092727 \times 0,03} \right] \\PV &= 30 \times \left[\frac{0,125509}{0,032782} \right] \\PV &= 30 \times 3,828595 \\PV &= 114,86\end{aligned}$$

Na HP-12C:
Para resolvermos uma série antecipada, devemos antes apertar os comandos g BEG □ aparecerá a palavra BEGIN no visor (para tirar, é só apertar g END):
f Reg (para limpar)
g BEG (modo antecipado)
30 CHS PMT
3 i
4 n
PV
Visor ⇒ 114,86

Resposta: O valor à vista do liquidificador é R\$ 114,86.

3.3 Plano de Poupança

Pode ser que o interesse não seja calcular o valor presente. É possível que, a partir do prazo (n), da taxa de juro (i) e dos termos (PMT), deseje-se encontrar o valor futuro. Este é encontrado pelo somatório dos valores futuros (montantes) de cada um dos termos (PMT) da série de pagamentos/recebimentos. Este tipo de situação pode ser chamado de plano de poupança

O plano de poupança nada mais é do que depósitos efetuados em intervalos de tempo constantes e acumulados até uma determinada data escolhida.

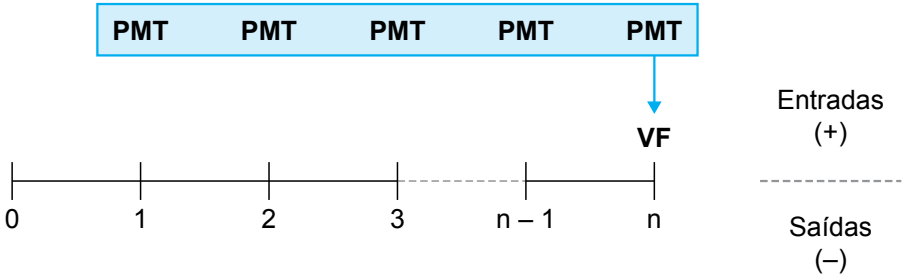


Figura 3.5 – Modelo básico de séries de pagamento/recebimento: representação do cálculo do valor futuro – Plano de poupança

Fonte: Assaf Neto (2008, p. 101).

O valor acumulado (FV) a partir destes depósitos pode ser encontrado através da seguinte fórmula:

$$FV = PMT * \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i} \right]$$

Sendo que:

FV = valor futuro, montante acumulado

PMT = pagamentos, depósitos

i = taxa de juros

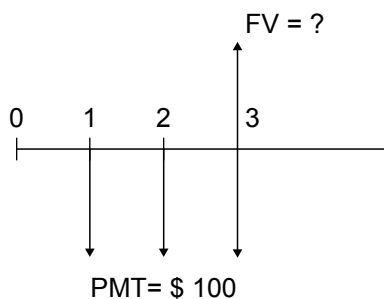
n = período, número de prestações em determinado período

É importante destacar que esta fórmula aqui apresentada é para uma série postecipada, onde os depósitos são efetuados ao final do período. Então, para resolvermos estes exercícios na calculadora HP-12C deveremos utilizar o modo END e para resolvermos no MS Excel®, deveremos colocar na lacuna Tipo o número 0.

Vamos aos exemplos:

Exemplo 3.6 – Pretendo depositar R\$ 100,00 durante 3 meses na poupança a uma taxa de 2 % ao mês. Qual o valor acumulado na poupança ao final dos 3 meses?

Resolução:



PMT = \$ 100

n = 3 meses

i = 2 % a.m. = 2/100 = 0,02

FV = ?

$$\begin{aligned}
 FV &= PMT \times \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i} \right] \\
 FV &= 100 \times \left[\frac{(1+0,02)^3 - 1}{0,02} \right] \\
 FV &= 100 \times \left[\frac{(1,02)^3 - 1}{0,02} \right] \\
 FV &= 100 \times \left[\frac{1,061208 - 1}{0,02} \right] \\
 FV &= 100 \times \left[\frac{0,061208}{0,02} \right] \\
 FV &= 100 \times 3,0604 \\
 FV &= 306,04
 \end{aligned}$$

Na HP-12C:

f Reg (para limpar)
 g END (modo postecipado)
 100 CHS PMT
 2 i
 3 n
 FV
 Visor \Rightarrow 306,04

Resposta: O valor acumulado na poupança será R\$ 306,04

Exemplo 3.7 – Se meu filho entrar na faculdade daqui a 5 anos pretendo dar um carro a ele no valor de R\$ 30.000,00. Quanto devo depositar, mensalmente, para obter o montante necessário ao final deste período, supondo que a taxa mensal de remuneração da poupança é de 0,6 % ao mês?

Resolução:

$$FV = \$ 30.000$$

$$n = 5 \text{ anos} = 60 \text{ depósitos mensais}$$

$$i = 0,6 \% \text{ a.m.} = 0,6/100 = 0,006$$

$$PMT = ?$$

Na HP-12C:

f Reg (para limpar)
 g END (modo postecipado)
 30.000 CHS FV
 0,6 i

$$FV = PMT \times \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i} \right]$$

$$30.000 = PMT \times \left[\frac{(1+0,006)^{60} - 1}{0,006} \right]$$

$$30.000 = PMT \times \left[\frac{(1,006)^{60} - 1}{0,006} \right]$$

$$30.000 = PMT \times \left[\frac{1,431788 - 1}{0,006} \right]$$

$$30.000 = PMT \times \left[\frac{0,431788}{0,006} \right]$$

$$30.000 = PMT \times 71,964735$$

$$PMT = \frac{30.000}{71,964735}$$

$$PMT = 416,87$$

Resposta: Deverei depositar mensalmente R\$ 416,87.

Atividades

- 01.** Ao comprar um par de tênis, paguei 5 parcelas mensais iguais de R\$ 80,00 sem entrada. A loja cobrou uma taxa de juros de 2,5% ao mês. Qual seria o valor do par de tênis se quisesse tê-lo adquirido à vista?

- 02.** O preço de um apartamento à vista é de R\$ 300.000,00. Um comprador ofereceu R\$ 70.000,00 de entrada e o pagamento do saldo restante em 60 prestações iguais mensais financiado a uma taxa de juros de 3% ao mês. Calcule o valor das prestações que o comprador deverá pagar.

- 03.** Uma loja vende notebooks em quatro pagamentos mensais iguais, sendo 1+3 pagamentos. O valor à vista do computador é de R\$ 2.199,00, e a loja opera a uma taxa de juros compostos de 4% ao mês. Nessas condições, qual o valor de cada prestação?

- 04.** Quanto uma pessoa tem que aplicar ao final de cada mês para acumular R\$ 10.000,00 para viajar à Europa daqui a 2 anos, sabendo que a taxa de juros da aplicação é de 2% ao mês?

- 05.** Uma TV LCD de 32 polegadas é oferecida em duas lojas nas seguintes condições:
 Loja A – 3 parcelas mensais de R\$ 600,00, sendo uma destas prestações considerada como entrada;
 Loja B – 5 parcelas mensais de R\$ 250,00, com uma entrada de R\$ 700,00.
 Qual é a melhor proposta de compra, sabendo-se que a taxa utilizada foi de 2,5% ao mês?

- 06.** Um investidor aplicará, ao final de cada mês, a quantia de R\$ 1.500,00 em uma alternativa de poupança que rende 0,7% ao mês. Que montante irá resgatar após 3 anos?

Reflexão

Estes conceitos apresentados são de fundamental importância para conhecermos como é o comportamento do valor do dinheiro no tempo.

É normal nos depararmos com a situação da compra de um bem em que temos o valor a prazo, mas queremos calcular o valor à vista. É comum não sabermos como calculá-lo. Para encontrar este valor à vista,

não basta apenas tirar os juros de cada prestação, mas sim trazê-las a valor presente; só assim encontraremos o valor correto.

Leitura recomendada

Para maior conhecimento do assunto, leia o capítulo 7 do livro a seguir:

BRUNI, A.L.; FAMÁ, R. **A matemática das finanças**. 3. ed. São Paulo: Atlas, 2008.

Referências

ASSAF NETO, Alexandre. **Matemática financeira e suas aplicações**. 10. ed. São Paulo: Atlas, 2008.

CASAROTTO FILHO, N.; KOPITTKE, B. H. **Análise de investimentos**. São Paulo: Atlas, 1998.

KUHNEN, O. L.; BAUER, U. R. **Matemática financeira aplicada e análises de investimentos**. 2. ed. São Paulo: Atlas, 1996.

LAPPONI, J. C. **Matemática financeira**. 1. ed. Rio de Janeiro: Campus, 2006.

MATHIAS, W. F.; GOMES, J. M. **Matemática financeira**. 2. ed. São Paulo: Atlas, 1996.

No próximo capítulo

No próximo capítulo foram apresentados os conceitos referentes ao cálculo das séries uniformes de pagamentos. No próximo capítulo, aprenderemos os métodos de amortização. Será mostrado como o principal e os encargos da dívida são devolvidos ao credor.

Minhas anotações:

[illegible]

Capítulo 4

Sistemas de Amortização de Empréstimos e Financiamentos

No quarto capítulo serão apresentados os sistemas de amortização. Estes sistemas são desenvolvidos basicamente para operações de empréstimos e de financiamentos de longo prazo que envolvem o desembolso do principal emprestado e dos encargos financeiros.

Objetivos da sua aprendizagem

- Entender o mecanismo do cálculo dos sistemas de amortização apresentados;
- Fazer comparações entre os métodos.

Você se lembra?

Se você já comprou uma casa financiada, provavelmente se lembra de ter ouvido falar em sistema de amortização.

Introdução

Em operações de empréstimos ou de financiamentos, é chamado de amortização o pagamento do principal por meio de uma ou mais parcelas periódicas. Os encargos financeiros representam os juros da operação (custo para o devedor e retorno para o credor). Já prestação é o valor da amortização mais os encargos financeiros devidos e saldo devedor é o valor do principal da dívida, em determinado momento, após a dedução do valor já pago a título de amortização.

Conexão:

Para saber mais sobre sistemas de amortização, acesse o site: <http://www.administradores.com.br/informe-se/artigos/sistema-de-amortizacao/23225/>

$$\text{PRESTAÇÃO} = \text{AMORTIZAÇÃO} + \text{JUROS}$$

Conforme destaca Assaf Neto (2008), existem algumas maneiras de se amortizar uma dívida. Nesta aula, serão comentados os principais sistemas de amortização – todos adotam os juros compostos.

4.1 Sistema de amortização constante – Tabela SAC

Nesse sistema, as amortizações do principal são iguais (constantes) durante todo o prazo da operação. O valor da amortização é obtido dividindo-se o capital emprestado pelo número de prestações. Os juros, por sua vez, são decrescentes, pois incidem sobre o saldo devedor – que se reduz após o pagamento de cada amortização. Consequentemente, as prestações – amortização mais juro – também são decrescentes ao longo do tempo. O SAC é ilustrado na figura 4.1.

Conforme já foi apontado, o valor das amortizações (A) – ou seja, do pagamento do principal – é determinado pela divisão do valor presente pelo número de prestações.

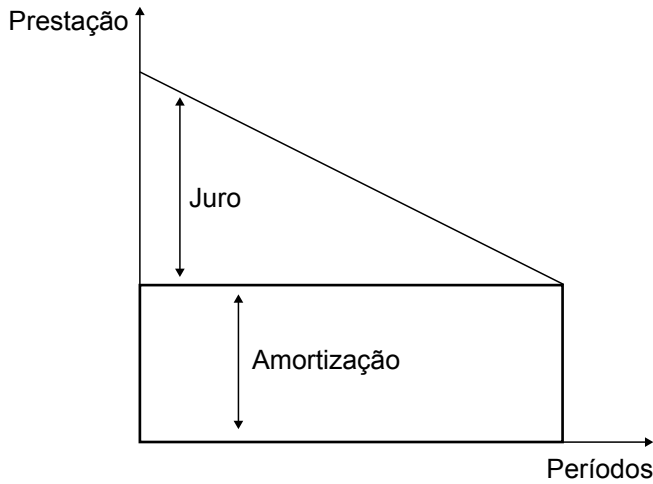


Figura 4.1 – Sistema de amortização constante (SAC)

Mathias e Gomes (1996, p. 309)

A partir do Exemplo a seguir, vamos conhecer o mecanismo do cálculo e construir a planilha de amortização:

Exemplo 4.1 – Um banco empresta o valor de R\$ 1.000,00 com taxa de 8% ao mês para ser pago em 5 pagamentos mensais, calculados pelo SAC. Elabore a planilha de financiamento.

Resolução – As etapas aqui apresentadas são somente para apresentar o mecanismo do cálculo deste sistema. Quando você estiver familiarizado com o método, poderá resolvê-lo diretamente na planilha.

1ª etapa – Cálculo da parcela de amortização

$$\text{amortização} = \frac{\text{valor do empréstimo}}{n}$$

$$\text{Amortização} = \frac{1.000}{5} = 200$$

2ª etapa – Cálculo da parcela do saldo devedor

O saldo devedor é reduzido, a cada período, a um montante igual a uma amortização (PV/n).

$$SD_t = SD_{t-1} - \text{parcela amortização}_t$$
$$SD_1 = 1.000 - 200 = 800$$
$$SD_2 = 800 - 200 = 600$$
$$SD_3 = 600 - 200 = 400$$
$$SD_4 = 400 - 200 = 200$$
$$SD_5 = 200 - 200 = 0$$

3ª etapa – Cálculo dos juros

Os juros (J) são calculados sobre o saldo devedor. Eles se reduzem a cada período.

$$\text{Juros}_t = SD_{t-1} \times \text{taxa de juros}$$
$$\text{Juros}_1 = 1.000 \times 8 \% = 80$$
$$\text{Juros}_2 = 800 \times 8 \% = 64$$
$$\text{Juros}_3 = 600 \times 8 \% = 48$$
$$\text{Juros}_4 = 400 \times 8 \% = 32$$
$$\text{Juros}_5 = 200 \times 8 \% = 16$$

4ª etapa – Cálculo da prestação

A prestação (PMT) é igual à soma da amortização com os juros. Seu valor em um dado instante t é:

$$\text{Prestação}_t = \text{Amortização}_t + \text{Juros}_t$$
$$\text{Prestação}_1 = 200 + 80 = 280$$
$$\text{Prestação}_2 = 200 + 64 = 262$$
$$\text{Prestação}_3 = 200 + 48 = 248$$
$$\text{Prestação}_4 = 200 + 32 = 232$$
$$\text{Prestação}_5 = 200 + 16 = 216$$

A planilha ficará assim:

	Saldo devedor	Amortização	Juros	Prestação
0	R\$ 1.000,00	–	–	–
1	R\$ 800,00	R\$ 200,00	R\$ 80,00	R\$ 280,00
2	R\$ 600,00	R\$ 200,00	R\$ 64,00	R\$ 264,00
3	R\$ 400,00	R\$ 200,00	R\$ 48,00	R\$ 248,00
4	R\$ 200,00	R\$ 200,00	R\$ 32,00	R\$ 232,00
5	0	R\$ 200,00	R\$ 16,00	R\$ 216,00
Total		R\$ 1.000,00	R\$ 240,00	R\$ 1.240,00

O Exemplo 4.1 não previu a existência de prazo de carência para a amortização do empréstimo. As condições de cada operação devem ser estabelecidas em contrato firmado entre o credor e o devedor.

Mas vamos supor que o credor necessitava de um prazo de carência de 3 meses (contado a partir do final do 1º mês). Para recalcular este financiamento, vamos propor 2 situações:

1. Os juros serão pagos durante o período de carência;
2. Os juros são capitalizados e acrescidos ao saldo devedor a cada período que passa, e a amortização será calculada sobre o saldo devedor do último período de carência.

1ª situação – Os juros serão pagos durante o período de carência

	Saldo devedor	Amortização	Juros	Prestação
0	R\$ 1.000,00			
1	R\$ 1.000,00	R\$ -	R\$ 80,00	R\$ 80,00
2	R\$ 1.000,00	R\$ -	R\$ 80,00	R\$ 80,00
3	R\$ 1.000,00		R\$ 80,00	R\$ 80,00
4	R\$ 800,00	R\$ 200,00	R\$ 80,00	R\$ 280,00
5	R\$ 600,00	R\$ 200,00	R\$ 64,00	R\$ 264,00
6	R\$ 400,00	R\$ 200,00	R\$ 48,00	R\$ 248,00
7	R\$ 200,00	R\$ 200,00	R\$ 32,00	R\$ 232,00
8	R\$ -	R\$ 200,00	R\$ 16,00	R\$ 216,00
Total		R\$ 1.000,00	R\$ 480,00	R\$ 1.480,00

Nestes 3 meses de carência, somente os juros de cada mês é que estão sendo pagos, não amortizando o valor da dívida. Como os juros vão sendo pagos a cada mês, o saldo devedor não vai aumentando.

2ª situação – Os juros são capitalizados e acrescidos ao saldo devedor a cada período que passa, e a amortização será calculada sobre o saldo devedor do último período de carência.

	Saldo devedor	Amortização	Juros	Prestação
0	R\$ 1.000,00			
1	R\$ 1.080,00			
2	R\$ 1.166,40			
3	R\$ 1.259,71			
4	R\$ 1.007,77	R\$ 251,94	R\$ 100,78	R\$ 352,72
5	R\$ 755,83	R\$ 251,94	R\$ 80,62	R\$ 332,56
6	R\$ 503,88	R\$ 251,94	R\$ 60,47	R\$ 312,41
7	R\$ 251,94	R\$ 251,94	R\$ 40,31	R\$ 292,25
8	R\$ -	R\$ 251,94	R\$ 20,16	R\$ 272,10
Total		R\$ 1.259,71	R\$ 302,33	R\$ 1.562,04

A cada período que passa, os juros são incorporados ao saldo devedor seguindo as relações dos juros compostos:

$n = 1 \Rightarrow 1.000 \times (1+0,08) = 1.080$
 $n = 2 \Rightarrow 1.080 \times (1+0,08) = 1.166,40$
 $n = 3 \Rightarrow 1.166,40 \times (1+0,08) = 1.259,71$

Já a amortização é calculada sobre o saldo devedor do último período de carência (período 3):

$$\text{Amortização} = \frac{1.259,71}{5} = 251,94$$

A partir desse período, os cálculos são feitos da maneira habitual.

Os juros, por incidirem sobre o saldo devedor, são decrescentes. Consequentemente, as amortizações devem ser crescentes – para manter as prestações constantes. Portanto, no SAF, os juros decrescem e as amortizações crescem ao longo do tempo, e a soma dessas duas parcelas é constante e igual ao valor da prestação.

4.2 Sistema de amortização francês – tabela price

Enquanto no SAC as amortizações são iguais, no Sistema de Amortização Francês (SAF) as prestações é que devem ser iguais, periódicas e sucessivas – por isso, também é chamado de Sistema de Prestação Constante (SPC). Devido a essa característica, pode-se dizer que as prestações “equivalem [...] ao modelo-padrão de fluxos de caixa” (ASSAF NETO, 2008 p.201), apresentado na unidade anterior.

O SAF é ilustrado na figura a seguir:

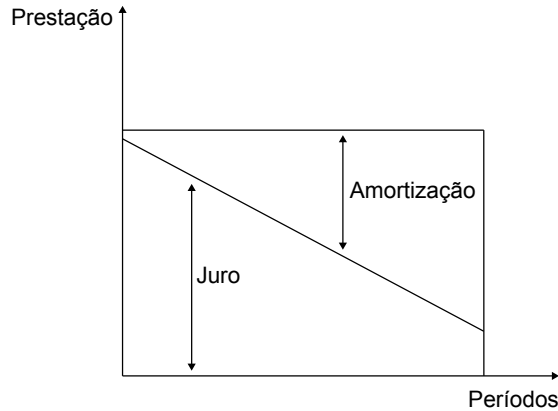


Figura 4.2 – Sistema de Amortização Francês (SAF)

Mathias e Gomes (1996, p. 309)

Vamos utilizar os dados do Exemplo 4.1.

Exemplo 4.2 – Um banco empresta o valor de R\$ 1.000,00 com uma taxa de 8% ao mês para ser pago em 5 pagamentos mensais, calculados pelo Sistema de Amortização Francês. Elabore a planilha de financiamento.

Resolução:

1ª etapa – Cálculo da prestação as parcelas são calculadas por meio da fórmula para cálculo das prestações uniformes:

$$PV = PMT \times \left[\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n \times i} \right]$$

$$PV = PMT \times \left[\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n \times i} \right]$$

$$1.000 = PMT \times \left[\frac{(1+0,08)^5 - 1}{(1+0,08)^5 \times 0,08} \right]$$

$$1.000 = PMT \times \left[\frac{(1,08)^5 - 1}{(1,08)^5 \times 0,08} \right]$$

$$1.000 = PMT \times \left[\frac{1,469328 - 1}{1,469328 - 0,08} \right]$$

$$1.000 = PMT \times \left[\frac{0,469328}{0,117576} \right]$$

$$1.000 = PMT \times 3,991698$$

$$\frac{1.000}{3,991698} = PMT$$

$$PMT = 250,51$$

Na HP-12C:

f Reg (para limpar)

g END (modo postecipado)

1.000 CHS PV

8 i

5 n

PMT

Visor => 250,46

Após o calculo da prestação, devemos fazer os cálculos seguintes período por período:

2ª etapa – Cálculo dos juros

O juro (J) em determinado período t é calculado da seguinte maneira – lembrando que o juro incide sobre o saldo devedor apurado no início de cada período (ou no final do período imediatamente anterior):

$Juros_t = SD_{t-1} \times \text{taxa de juros}$

3ª etapa – Cálculo da parcela de amortização

$Amortização_t = Prestação_t - Juros_t$

4ª etapa – Cálculo da parcela do saldo devedor

O saldo devedor (SD) de cada período t é determinado pela diferença entre o valor devido no início da operação e a amortização do período.

$SD_t = SD_{t-1} - \text{parcela amortização}_t$

A planilha ficará assim:

	Saldo devedor	Amortização	Juros	Prestação
0	R\$ 1.000,00			
1	R\$ 829,54	R\$ 170,46	R\$ 80,00	R\$ 250,46
2	R\$ 645,45	R\$ 184,09	R\$ 66,36	R\$ 250,46
3	R\$ 446,63	R\$ 198,82	R\$ 51,64	R\$ 250,46
4	R\$ 231,90	R\$ 214,73	R\$ 35,73	R\$ 250,46
5	R\$ 0,00	R\$ 231,90	R\$ 18,55	R\$ 250,46
Total		R\$ 1.000,00	R\$ 252,28	R\$ 1.252,28

Também poderemos realizar todos estes cálculos pela HP – 12 C:
Na HP-12C:
f Reg(para limpar)
g END (modo postecipado)

1.000 CHS PV
8 i
5 n
PMT
Visor => 250,46

Agora não podemos apagar a calculadora, pois iremos apertar uma sequência de teclas até preencher toda a planilha. Conforme formos clicando, a HP-12C vai mostrando cada um dos valores.

Comando	Função	Período	Visor
1 f Amort	Juros	1º período	80,00
x><y	Amortização		170,46
RCL PV	Saldo devedor		829,54
1 f Amort	Juros	2º período	66,36
x><y	Amortização		184,09
RCL PV	Saldo devedor		645,45
1 f Amort	Juros	3º período	51,64
x><y	Amortização		198,82
RCL PV	Saldo devedor		446,63
1 f Amort	Juros	4º período	35,73
x><y	Amortização		214,73
RCL PV	Saldo devedor		231,90
1 f Amort	Juros	5º período	18,55
x><y	Amortização		231,90
RCL PV	Saldo devedor		0,00

Nesse sistema de amortização, os juros vão diminuindo com o passar do tempo e a amortização vai aumentando. Observe que, nas primeiras prestações, pagamos mais juros do que amortizamos a dívida.

Esta tabela foi construída sem um período de carência. Se quisermos calcular com um período de carência de 3 meses, vamos proceder de duas maneiras, como fizemos no Sistema de Amortização Constante:

1. Os juros serão pagos durante o período de carência;
2. Os juros são capitalizados e acrescidos ao saldo devedor a cada período que passa, e a amortização será calculada sobre o saldo devedor do último período de carência.

1ª situação – Os juros serão pagos durante o período de carência;

	Saldo devedor	Amortização	Juros	Prestação
0	R\$ 1.000,00			
1	R\$ 1.000,00		R\$ 80,00	R\$ 80,00
2	R\$ 1.000,00		R\$ 80,00	R\$ 80,00
3	R\$ 1.000,00		R\$ 80,00	R\$ 80,00
4	R\$ 829,54	R\$ 170,46	R\$ 80,00	R\$ 250,46
5	R\$ 645,45	R\$ 184,09	R\$ 66,36	R\$ 250,46
6	R\$ 446,63	R\$ 198,82	R\$ 51,64	R\$ 250,46
7	R\$ 231,90	R\$ 214,73	R\$ 35,73	R\$ 250,46
8	R\$ 0,00	R\$ 231,90	R\$ 18,55	R\$ 250,46
Total		R\$ 1.000,00	R\$ 492,28	R\$ 1.492,28

No período de carência, só será pago o valor dos juros. As prestações serão calculadas a partir do saldo devedor do terceiro período. Como os juros vão sendo pagos a cada mês, o saldo devedor não vai aumentando.

Na HP-12C:

f Reg (para limpar)
g END (modo postecipado)

1.000 CHS PV
8 i
5 n
PMT
Visor => 250,46

$$\begin{aligned}
 PV &= PMT \times \left[\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n \times i} \right] \\
 1.000 &= PMT \times \left[\frac{(1+0,08)^5 - 1}{(1+0,08)^5 \times 0,08} \right] \\
 1.000 &= PMT \times \left[\frac{(1,08)^5 - 1}{(1,08)^5 \times 0,08} \right] \\
 1.000 &= PMT \times \left[\frac{1,469328 - 1}{1,469328 - 0,08} \right] \\
 1.000 &= PMT \times \left[\frac{0,469328}{0,117576} \right] \\
 1.000 &= PMT \times 3,991698 \\
 \frac{1.000}{3,991698} &= PMT \\
 PMT &= 250,51
 \end{aligned}$$

2ª situação – Os juros são capitalizados e acrescidos ao saldo devedor a cada período que passa, e a amortização será calculada sobre o saldo devedor do último período de carência.

	Saldo devedor	Amortização	Juros	Prestação
0	R\$ 1.000,00			
1	R\$ 1.080,00			
2	R\$ 1.166,40			
3	R\$ 1.259,71			
4	R\$ 1.044,99	R\$ 214,73	R\$ 100,78	R\$ 315,50
5	R\$ 813,08	R\$ 231,90	R\$ 83,60	R\$ 315,50
6	R\$ 562,63	R\$ 250,46	R\$ 65,05	R\$ 315,50
7	R\$ 292,13	R\$ 270,49	R\$ 45,01	R\$ 315,50
8	R\$ 0,00	R\$ 292,13	R\$ 23,37	R\$ 315,50
Total		R\$ 1.259,71	R\$ 317,80	R\$ 1.577,52

Como feito anteriormente, a cada período que passa os juros são incorporados ao saldo devedor seguindo as relações dos juros compostos:

$$n = 1 \Rightarrow 1.000 \times (1+0,08) = 1.080$$

$$n = 2 \Rightarrow 1.080 \times (1+0,08) = 1.166,40$$

$$n = 3 \Rightarrow 1.166,40 \times (1+0,08) = 1.259,71$$

Já a prestação é calculada sobre o saldo devedor do último período de carência (período 3).

Na HP-12C:

f Fin (para limpar)

g END (modo postecipado)

1.259,71CHS PV

8 i

5 n

PMT

Visor => 315,50

$$PMT = PV \times \left[\frac{(1+i)^n \times i}{(1+i)^n - 1} \right]$$
$$PMT = 1.259,71 \times \left[\frac{(1+0,08)^5 \times 0,08}{(1+0,08)^5 - 1} \right]$$
$$PMT = 1.259,71 \times \left[\frac{(1,08)^5 \times 0,08}{(1,08)^5 - 1} \right]$$
$$PMT = 1.259,71 \times \left[\frac{1,469328 \times 0,08}{1,469328 - 1} \right]$$
$$PMT = 1.259,71 \times \left[\frac{0,117546}{0,469328} \right]$$
$$PMT = 1.259,71 \times 0,250456$$
$$PMT = 315,50$$

4.3 Sistema de amortização americano – tabela saa

O último caso que deve ser analisado é o sistema de amortização americano (SAA), por meio do qual é estipulado que o capital financiado (emprestado) deve ser pago em uma única parcela no final do período contratado. Ou seja, não há amortizações intermediárias durante o período da operação. Os juros, por sua vez, são pagos periodicamente. Portanto, as prestações intermediárias são compostas apenas de juros. O SAA é ilustrado na figura abaixo.

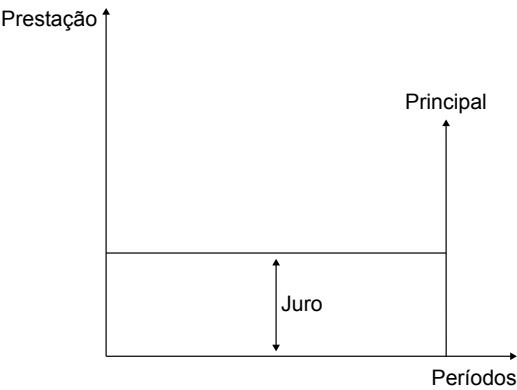


Figura 4.3 – Sistema de Amortização Americano (SAA)

Mathias e Gomes (1996, p. 310)

Exemplo 4.3 – Empréstimo de \$ 5.000.000,00. Devolução em 24 meses (8 trimestres). Taxa de juros de 3,6% a.t. e amortizações pelo sistema americano. Elabore a planilha financeira.

Nós temos que preencher a seguinte tabela:

SAA sem carência e pagamentos de juros				
Trimestres	Saldo devedor	Amortização	Juros	Prestação
0	5.000.000			
1				
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8		5.000.000		
		5.000.000	0	0

Para isso, alguns cálculos são necessários.

Saldo devedor (SD): continuará R\$ 5.000.000,00 até o final do período.

Juros (J) = Nesta situação, os juros são pagos periodicamente durante o prazo da operação.

$$\text{Juros}_t = \text{SD}_{t-1} \times \text{taxa de juros}$$

Prestação (PMT) – A última prestação (8ª) é constituída pela amortização total do empréstimo e pela última parcela dos juros. Deste modo:

$$\text{Prestação}_1 = J_1$$

$$\text{Prestação}_8 = \text{Amortização}_8 + J_8$$

Depois desses cálculos, podemos preencher a planilha.

SAA sem carência e pagamentos de juros				
Trimestres	Saldo devedor	Amortização	Juros	Prestação
0	5.000.000			180.000
1	5.000.000	0	180.000	180.000
2	5.000.000	0	180.000	180.000
3	5.000.000	0	180.000	180.000
4	5.000.000	0	180.000	180.000

Trimestres	Saldo devedor	Amortização	Juros	Prestação
5	5.000.000	0	180.000	180.000
6	5.000.000	0	180.000	180.000
7	5.000.000	0	180.000	180.000
8	5.000.000	5.000.000	180.000	5.180.000
		5.000.000	1.140.00	6.440.000

Nota-se que, nesse sistema, o principal (amortização) é pago somente no final do contrato. Por isso, as prestações são formadas unicamente pelos juros, exceto a última, que soma juros e o principal.

4.4 Sistema de Amortização Misto (SAM)

O Sistema de Amortização Misto (SAM) é uma combinação dos Sistemas de Amortização Francês (SAF) e Sistemas de Amortização Constante (SAC). Este método foi desenvolvido originalmente para operações do Sistema Financeiro de Habitação e, ele é basicamente calculado através da média aritmética do SAF e SAC (ASSAF NETO, 2002).

Dessa maneira, os valores da planilha são calculados da seguinte forma:

Cálculo da prestação SAM

$$\text{Prestação SAM} = \frac{\text{Prestação SAC} + \text{Prestação SAF}}{2}$$

Cálculo da parcela de amortização SAM

$$\text{Amortização SAM} = \frac{\text{Amortização SAC} + \text{Amortização DF}}{2}$$

Cálculo dos juros SAM

$$\text{Juros SAM} = \frac{\text{Juros SAC} + \text{Juros SAF}}{2}$$

Cálculo do Saldo Devedor SAM

$$\text{Saldo Devedor} = \frac{\text{Saldo Devedor SAC} + \text{Saldo Devedor SAF}}{2}$$

Resolveremos o exemplo 4.3 baseado nos exemplos 4.1 (Sistema de Amortização Constante) e 4.2 (Sistema de Amortização Francês).

Exemplo 4.3: Um banco empresta o valor de R\$ 1.000,00 com uma taxa de 8 % ao mês para ser pago em 5 pagamentos mensais, calculados pelo SAM. Elabore a planilha de financiamento.

Resolução: Como as planilhas dos métodos SAC e SAF já foram elaboradas no exemplos anteriores, agora somente montaremos a planilha do SAM.

• **Sistema de Amortização Constante**

	Saldo Devedor	Amortização	Juros	Prestação
0	R\$ 1.000,00	–	–	–
1	R\$ 800,00	R\$ 200,00	R\$ 80,00	R\$ 280,00
2	R\$ 600,00	R\$ 200,00	R\$ 64,00	R\$ 264,00
3	R\$ 400,00	R\$ 200,00	R\$ 48,00	R\$ 248,00
4	R\$ 200,00	R\$ 200,00	R\$ 32,00	R\$ 232,00
5	0	R\$ 200,00	R\$ 16,00	R\$ 216,00
Total		R\$ 1.000,00	R\$ 240,00	R\$ 1.240,00

• **Sistema de Amortização Francês**

	Saldo Devedor	Amortização	Juros	Prestação
0	R\$ 1.000,00			
1	R\$ 829,54	R\$ 170,46	R\$ 80,00	R\$ 250,46
2	R\$ 645,45	R\$ 184,09	R\$ 66,36	R\$ 250,46
3	R\$ 446,63	R\$ 198,82	R\$ 51,64	R\$ 250,46
4	R\$ 231,90	R\$ 214,73	R\$ 35,73	R\$ 250,46
5	R\$ 0,00	R\$ 231,90	R\$ 18,55	R\$ 250,46
Total		R\$ 1.000,00	R\$ 252,28	R\$ 1.252,28

Cálculo da Prestação

$$\text{Prestação}_1 = (280 + 250,46) / 2 = 265,23$$

$$\text{Prestação}_2 = (264 + 250,46) / 2 = 257,23$$

$$\text{Prestação}_3 = (248 + 250,46) / 2 = 249,23$$

$$\text{Prestação}_4 = (232 + 250,46) / 2 = 241,23$$

$$\text{Prestação}_5 = (216 + 250,46) / 2 = 233,23$$

Cálculo da Amortização:

$Amortização1 = (200 + 170,46) / 2 = 185,23$

$Amortização2 = (200 + 184,09) / 2 = 192,04$

$Amortização3 = (200 + 198,82) / 2 = 199,41$

$Amortização4 = (200 + 214,73) / 2 = 207,36$

$Amortização5 = (200 + 231,90) / 2 = 215,95$

Cálculo dos juros

$Juros1 = (80 + 80,00) / 2 = 80$

$Juros2 = (64 + 66,36) / 2 = 65,18$

$Juros3 = (48 + 51,64) / 2 = 49,82$

$Juros4 = (32 + 35,73) / 2 = 33,86$

$Juros5 = (16 + 18,55) / 2 = 17,27$

Cálculo do Saldo Devedor

$SD1 = (800 + 829,54) / 2 = 814,77$

$SD2 = (600 + 645,45) / 2 = 622,72$

$SD3 = (400 + 446,63) / 2 = 423,31$

$SD4 = (200 + 231,90) / 2 = 215,95$

$SD5 = 0 + 0$

Construção da planilha Sistema de Amortização Misto

	Saldo Devedor	Amortização	Juros	Prestação
0	R\$ 1.000,00			
1	R\$ 814,77	R\$ 185,23	R\$ 80	R\$ 265,23
2	R\$ 622,72	R\$ 192,04	R\$ 65,18	R\$ 257,23
3	R\$ 423,31	R\$ 199,41	R\$ 49,82	R\$ 249,23
4	R\$ 215,95	R\$ 207,36	R\$ 33,86	R\$ 241,23
5	R\$ 0,00	R\$ 215,95	R\$ 17,27	R\$ 233,23
Total		R\$ 1.000,00	R\$ 246,14	R\$ 1.246,14

4.5 Comparação entre os métodos SAC, SAF e SAM

Após aprendermos cada um dos métodos, é possível identificar que as prestações e os juros do Sistema de Amortização Constante são decrescentes, a amortização é constante e, neste método o tomador do empréstimo começa a pagar prestações maiores que no Sistema de Amortização Francês.

Com relação ao Sistema de Amortização Francês, as prestações são iguais, o valor da amortização é crescente, ou seja, aumenta com o passar do tempo enquanto que os juros embutido em cada parcela vai diminuindo (decrescente).

O Sistema de Amortização Misto é uma média dos dois métodos anteriores e, suas parcelas são decrescentes, e a amortização é crescente. A primeira parcela deste método é menor que do SAC, mas maior que do SAF. Já sua última prestação ocorre o contrário. Ela é menor que do SAF, mas maior que do SAC.

Atividades

- 01.** Um empréstimo no valor de R\$ 15.000,00 deve ser pago em 6 prestações mensais sem carência a uma taxa de 5% ao mês. Elabore a planilha do financiamento pelo Sistema de Amortização Francês e pelo Sistema de Amortização Constante.
- 02.** Utilize os dados do exercício 1 e construa uma planilha SAC com 4 meses de carência para cada um dos casos:
 - a) juros pagos durante o período de carência;
 - b) juros são capitalizados e acrescidos ao saldo devedor.
- 03.** Utilize os dados do exercício 1 e construa uma planilha SAF com 4 meses de carência para cada um dos casos:
 - a) juros pagos durante o período de carência;
 - b) juros são capitalizados e acrescidos ao saldo devedor.

Leitura recomendada

Para maior conhecimento do assunto, leia o capítulo 8 do livro a seguir:

BRUNI, A.L.; FAMÁ, R. **A matemática das finanças**. 3. ed. São Paulo: Atlas, 2008.

Referências

ASSAF NETO, Alexandre. **Matemática financeira e suas aplicações**. 10. ed. São Paulo: Atlas, 2008.

MATHIAS, W. F.; GOMES, J. M. **Matemática financeira**. 2. ed. São Paulo: Atlas, 1996.

No próximo capítulo

Após aprendermos os conceitos do valor do dinheiro no tempo, utilizaremos estes conceitos para analisar opções de investimentos. As análises serão feitas considerando-se o fluxo de caixa e o custo do capital, ou a taxa mínima de atratividade que os investidores desejam receber de retorno.

Capítulo 5

Análise de Investimentos – Taxa Interna de Retorno, Valor Presente Líquido e Payback

No quinto capítulo, vamos aprender as ferramentas quantitativas para a análise de investimentos. Aprenderemos três ferramentas: uma que faz as análises em valores monetários (valor presente líquido – VPL), outra que analisa qual o retorno dos projetos em termos percentuais (taxa interna de retorno – TIR) e outra que analisa o tempo de retorno (*payback*).

Objetivos da sua aprendizagem

- Aprender a tomada de decisão sobre investimentos.
- Utilizar as ferramentas para tomada de decisão: valor presente líquido (VPL), taxa interna de retorno (TIR) e *payback*.

Você se lembra?

Você se lembra da última decisão que tomou acerca de adquirir um determinado bem? Que aspectos você considerou para fazer a melhor escolha? Neste capítulo, aprenderemos as ferramentas de análise de investimentos nas quais, com certeza, você um dia já pensou intuitivamente.

Introdução



O que uma empresa deve levar em conta para decidir se compra ou não uma nova máquina (investe)? A empresa deve seguir estes passos (BLANCHARD, 1999, p. 141-3):

- I. estimar quanto tempo a máquina vai durar: à medida que o tempo passa, as máquinas tornam-se cada vez menos confiáveis e de manutenção mais cara, o que é conhecido como depreciação. Uma forma simples de avaliar essa depreciação é presumir que a máquina perde sua eficiência a uma taxa δ (taxa de depreciação). Dessa forma, uma nova máquina esse ano valerá $(1 - \delta)$ no próximo ano, $(1 - \delta)^2$ daqui a dois anos e assim sucessivamente;
- II. calcular o valor atual dos lucros: leva algum tempo para que a máquina seja instalada. Dessa forma, uma máquina comprada no ano t se torna operacional, gera lucro e inicia sua operação somente um ano mais tarde, em $t + 1$;
- III. decidir se compra uma máquina ou não: essa decisão depende da relação entre o valor atual dos lucros esperados e o preço

A depreciação é definida como o desgaste efetivo por uso ou perda de utilidade, mesmo por ação da natureza ou por obsolescência. O valor inicial do ativo é deduzido na contabilidade pela parcela da depreciação de cada período até tornar-se nulo (MANUAL DE CONTABILIDADE DA SOCIEDADE POR AÇÕES, 2009).

da máquina. Se o valor atual for menor do que o preço, a empresa não deverá comprar a máquina – estará pagando mais do que espera ter de volta em lucros mais tarde –; em contrapartida, se o valor atual for maior do que o preço, a empresa deverá comprar a nova máquina.

O mesmo raciocínio utilizado para a determinação da compra de uma nova máquina pode ser adotado para qualquer outra decisão de investimento – construção de uma nova fábrica, renovação de um conjunto de escritórios, expansão das instalações, entre outros. Portanto, o investimento depende positivamente do valor atual esperado dos lucros futuros – quanto maiores forem os lucros correntes e/ou esperados, maior será o nível do investimento.

O cálculo do valor atual esperado dos lucros futuros é uma aplicação dos conceitos de matemática financeira analisados ao longo do curso. Nessa aula, outros métodos de avaliação de investimentos que utilizam o ferramental da disciplina serão estudados.

5.1 Payback

Consiste na determinação do tempo necessário para que o valor do investimento seja recuperado por meio dos fluxos de caixa promovidos pelo investimento (ASSAF NETO, 2003). Para o cálculo do *payback*, veremos duas abordagens, como mostrado por Bruni & Fama (2003): o *payback* simples e o *payback* descontado.

5.1.1 Payback simples

O *payback* é um método simples que estima qual o prazo necessário para a recuperação do investimento. Para o cálculo do *payback* simples, basta somar os fluxos de caixa gerados pelo investimento até igualar ao investimento inicial.

Quanto a aceitar ou rejeitar determinado projeto de investimento baseado no cálculo do *payback*, o período de *payback* obtido deve ser confrontado com o período limite estabelecido pela empresa.

Exemplo 5.1– Calcule o *payback* simples dos projetos apresentados a seguir, supondo um prazo máximo aceitável pela empresa para recuperação do investimento igual a três anos.

Projetos	Investimen- to inicial	Fluxos de caixa				
		Ano 1	Ano 2	Ano 3	Ano 4	Ano 5
A	– \$ 600.000	\$ 300.000	\$ 300.000	\$ 50.000	\$ 100.000	\$ 200.000
B	– \$ 600.000	\$ 100.000	\$ 200.000	\$ 200.000	\$ 200.000	\$ 100.000

Resolução:

Para calcular o *payback* simples do exemplo 5.1, basta somar os fluxos de caixa até eles se igualarem ao investimento inicial. O cálculo do *payback* do projeto A ficará da seguinte maneira:

$$\text{Payback}_A = \underbrace{300.000}_{\text{ano 1}} + \underbrace{300.000}_{\text{ano 2}} = 600.000$$
$$\text{Payback}_A = 2 \text{ anos}$$

Também poderemos montar uma tabela, verificando em qual período o saldo se tornou igual a zero:

	FC	Saldo de investimento
0	(600.000,00)	(600.000,00)
1	300.000,00	(300.000,00)
2	300.000,00	–
3	50.000,00	50.000,00
4	100.000,00	150.000,00
5	200.000,00	350.000,00

O cálculo do *payback* do projeto B ficará da seguinte maneira:

$$\text{Payback}_B = \underbrace{100.000}_{\text{ano 1}} + \underbrace{200.000}_{\text{ano 2}} + \underbrace{200.000}_{\text{ano 3}} + \underbrace{200.000}_{\substack{\text{preciso de} \\ \$ 100.000 \\ \text{desse valor}}} = 700.000$$

500.000
(ainda precisa de \$100.000
para completar os \$600.000)

$$\text{Payback}_B = 3 + \frac{100.000}{200.000} = 3,5 \text{ anos}$$

Ou calculando através de uma tabela:

	FC	Saldo de investimento
0	(600.000,00)	(600.000,00)
1	100.000,00	(500.000,00)
2	200.000,00	(300.000,00)
3	200.000,00	(100.000,00)
4	200.000,00	100.000,00
5	100.000,00	200.000,00

→ Falta R\$ 100.000,00

→ Preciso de R\$ 100.000,00 dos R\$ 200.000,00 do ano 4

$$\frac{100.000}{200.000} = 0,5$$

É possível concluir que, no projeto A, a empresa conseguirá o retorno do investimento em dois anos. Já no projeto B o retorno do investimento se dará em três anos e meio. No quarto ano do projeto B, é preciso considerar apenas \$ 100.000 dos \$ 200.000 gerados pelo fluxo de caixa; assim, o *payback* simples do projeto B é igual a $3 + (100.000/200.000) = 3,5$ anos.

Se o período máximo aceitável pela empresa é de três anos, o projeto A deverá ser escolhido; já que o *payback* do projeto B excede o período máximo pela empresa que é de três anos.

Por ser um método de cálculo fácil, o *payback* simples não leva em consideração o valor do dinheiro no tempo. Os fluxos de caixa são simplesmente somados e não descontados a uma determinada taxa de juros.

Essa taxa, que também é chamada de taxa de desconto, taxa mínima de atratividade (TMA), custo de capital ou custo de oportunidade, refere-se ao retorno mínimo que deve ser conseguido de um projeto para manter seu valor de mercado (GITMAN, 2001).

O custo de capital é a taxa de retorno mínima necessária para atrair capital para um investimento. Também pode ser entendido como a taxa que o investidor pode obter em outro investimento de risco semelhante. É a taxa de desconto ou o valor do dinheiro no tempo usada para converter o valor esperado dos fluxos de caixa em valor presente (MARTELANC, PASIN, CAVALCANTE, 2005).

Com a intenção de contornar essa situação apresentada, aprenderemos outro critério: o *payback* descontado, que considera a taxa de desconto no cálculo.

5.1.2 *Payback* descontado

No cálculo do *payback* descontado, como mostrado anteriormente, é considerado o custo do capital. O método de cálculo é similar ao utilizado no *payback* simples, bastando trazer a valor presente os fluxos de caixa (BRUNI & FAMÁ, 2003).

Para trazer a valor presente um valor futuro, será utilizada a seguinte fórmula aprendida na disciplina de Matemática Financeira (fórmula 1):

$$PV = \frac{FV}{(1 + i)^n}$$

(1)

Para entendermos melhor este conceito, faremos o exemplo anterior só que agora considerando o custo do capital:

Exemplo 5.2 – Calcule o *payback* simples dos projetos apresentados a seguir, supondo um prazo máximo aceitável pela empresa para recuperação do investimento igual a três anos e um custo de capital de 10% ao ano.

Projetos	Investimen- to inicial	Fluxos de caixa				
		Ano 1	Ano 2	Ano 3	Ano 4	Ano 5
A	– \$ 600.000	\$ 300.000	\$ 300.000	\$ 50.000	\$ 100.000	\$ 200.000
B	– \$ 600.000	\$ 100.000	\$ 200.000	\$ 200.000	\$ 200.000	\$ 100.000

Resolução:

O *payback* descontado é calculado através do valor presente de cada um dos fluxos de caixa futuros. Observe o cálculo do *payback* de cada um dos projetos analisados:

Payback do projeto A:

Ano	Valor presente – Projeto A
1	$PV = \frac{300.000}{(1+0,10)^1} = 272.727,27$
2	$PV = \frac{300.000}{(1+0,10)^2} = 247.933,88$
3	$PV = \frac{50.000}{(1+0,10)^3} = 37.565,74$
4	$PV = \frac{100.000}{(1+0,10)^4} = 68.301,34$
5	$PV = \frac{200.000}{(1+0,10)^5} = 124.184,26$

$$\text{Payback}_A = \underbrace{272.727,27}_{\text{ano 1}} + \underbrace{247.933,88}_{\text{ano 2}} + \underbrace{37.565,74}_{\text{ano 3}} + \underbrace{68.301,34}_{\text{ano 4}} = 626.530,23$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{558.228,89}$
 (ainda precisa de \$ 41.771,11)
 para completar os \$600.000

precisa de
 \$41.771,11
 desse total

$$\text{Payback}_A = 3 + \frac{41.771,11}{68.301,34} = 3,61 \text{ anos}$$

Payback do projeto B:

Ano	Valor presente – Projeto B
1	$PV = \frac{100.000}{(1+0,10)^1} = 90.909,09$
2	$PV = \frac{200.000}{(1+0,10)^2} = 165.289,25$
3	$PV = \frac{200.000}{(1+0,10)^3} = 150.262,96$
4	$PV = \frac{200.000}{(1+0,10)^4} = 136.602,69$
5	$PV = \frac{100.000}{(1+0,10)^5} = 62.092,13$

$$\text{Payback}_B = \underbrace{90.909,09}_{\text{ano 1}} + \underbrace{165.289,25}_{\text{ano 2}} + \underbrace{150.262,96}_{\text{ano 3}} + \underbrace{136.602,69}_{\text{ano 4}} + \underbrace{62.092,13}_{\text{ano 5}} = 605.156,12$$

$\underbrace{543.063,99}_{\text{(ainda precisa de \$56.936,01 para completar os \$600.000)}}$

precisa de
 \\$56.936,01
 desse total

$$\text{Payback}_A = 4 + \frac{56.936,01}{62.092,13} = 4,91 \text{ anos}$$

O projeto A tem um *payback* descontado de 3,61 anos e o projeto B tem um *payback* de 4,91 anos. Assim, nenhum projeto atende ao tempo mínimo requerido pela empresa que é de três anos.

O *payback*, tanto o simples quanto o descontado, não considera o fluxo de caixa como um todo. Isso pode ser visualizado mais facilmente no *payback* do projeto A, em que só são considerados os valores dos anos (3,61) necessários para recuperar o investimento inicial.

Os cálculos do *payback* descontado também podem ser feitos por meio da tabela, como no *payback* simples.

Os métodos apresentados a seguir considerarão todos os valores do fluxo de caixa. Os métodos apresentados serão o valor presente líquido (VPL) e a taxa interna de retorno (TIR).

5.2 Valor presente líquido (VPL)

O valor presente líquido (em inglês, Net Present Value – NPV) é obtido ao se subtrair o investimento inicial de um projeto do valor presente de seus fluxos de entrada de caixa (GITMAN, 2001). O valor presente líquido mostra o resultado econômico (riqueza) do projeto atualizado (ASSAF NETO, 2003).

A fórmula (2) para o cálculo do VPL é apresentada a seguir:

$$\text{VPL} = \left[\frac{\text{FC}}{(1+i)^1} + \frac{\text{FC}}{(1+i)^2} + \frac{\text{FC}}{(1+i)^3} + \dots + \frac{\text{FC}}{(1+i)^n} \right] - \text{investimento inicial} \quad (2)$$

É importante destacar que o NPV não identifica diretamente a taxa de rentabilidade (ou custo) da operação financeira – “ao descontar todos os fluxos de entradas e saídas de caixa por uma taxa de desconto mínima aceitável, denota, em última análise, o resultado econômico da alternativa financeira expressa em moeda atualizada” (ASSAF NETO, 2008, p. 278).

Para decidir se um investimento deve ou não ser realizado utilizando a VPL, deve-se seguir a seguinte regra:

- se o VPL for maior que zero, o projeto deve ser aceito, pois mostra uma geração de riqueza líquida positiva;
- se o VPL for menor que zero, o projeto deve ser rejeitado, pois mostra uma destruição de valor;
- se o VPL for igual que zero, é indiferente aceitar ou não o projeto.

Exemplo 5.3 – Calcule o valor presente líquido do projeto apresentado na tabela abaixo. A taxa mínima de atratividade é de 15% ao ano.

Investimento inicial	Fluxos de caixa			
	Ano 1	Ano 2	Ano 3	Ano 4
– \$ 600	\$ 200	\$ 230	\$ 250	\$ 220

$$VPL = \left[\frac{200}{(1+0,15)^1} + \frac{230}{(1+0,15)^2} + \frac{250}{(1+0,15)^3} + \frac{220}{(1+0,15)^4} \right] - 600$$

$$VPL = \left[\frac{200}{(1,15)^1} + \frac{230}{(1,15)^2} + \frac{250}{(1,15)^3} + \frac{220}{(1,15)^4} \right] - 600$$

$$VPL = \left[\frac{200}{1,15} + \frac{230}{1,3225} + \frac{250}{1,520875} + \frac{220}{1,749006} \right] - 600$$

$$VPL = [173,91 + 173,91 + 164,37 + 125,78] - 600$$

$$VPL = [637,97] - 600$$

$$VPL = 37,91$$

Para cálculo do valor presente líquido, deve ser respeitado o sinal dos números, negativo para saídas e positivo para entradas. Isso é necessário para interpretar o resultado, pois ele poderá ser positivo ou negativo. O resultado sempre será em valor monetário.

E na HP – 12C?

Na HP-12 C, estes cálculos são realizados utilizando-se as teclas: CFj e CF0, sendo que CF0 é o investimento inicial e CFj são os fluxos de caixa. Primeiro, devemos entrar com a sequência de dados, sempre respeitando os de sinais positivos e os de negativos. Se for um valor negativo, devemos usar a tecla CHS (inverte o sinal).

Os dados devem ser inseridos sempre respeitando a ordem do fluxo de caixa, ou seja, digita-se primeiro o investimento inicial (digita o valor e depois f CF0) e depois cada um dos fluxos de caixa. Para cada entrada de dados, deve-se digitar o valor e depois f CFj.

Se temos que calcular o VPL, devemos apertar f NPV; e, para calcular a TIR, devemos apertar f IRR.

Não devemos nos esquecer de que, para o cálculo do VPL, devemos inserir a taxa de desconto, ou seja, o i .

A resolução ficará da seguinte maneira, calculando na HP-12C:

Resolvendo na HP-12C:

600 CHS g CF0

200 g CFj

230 g CFj

250 g CFj

220 g CFj

15 i

f NPV

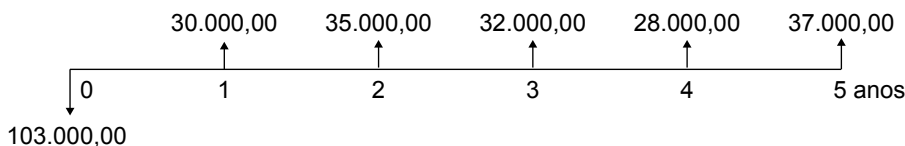
37,97 (resposta visor)

O VPL de R\$ 37,91 obtido no exemplo 5.3 indica que os fluxos de entrada de caixa somados na data zero superam o investimento inicial; assim, o projeto deve ser aceito.

Exemplo 5.4 – Uma transportadora está analisando a compra de um caminhão no valor de R\$ 103.000,00. A utilização desse veículo nos próximos cinco anos deverá gerar receitas líquidas estimadas em R\$ 30.000,00, R\$ 35.000,00, R\$ 32.000,00, R\$ 28.000,00 e R\$ 37.000,00, respectivamente. Se a empresa espera uma taxa de retorno de 15% a.a., qual o valor presente líquido?

Investimento inicial	Fluxos de caixa				
	Ano 1	Ano 2	Ano 3	Ano 4	Ano 5
– \$ 103.000	\$ 30.000	\$ 35.000	\$ 32.000	\$ 28.000	\$ 37.000

Resolução:



$$VPL = \left[\frac{30.000}{(1+0,15)^1} + \frac{35.000}{(1+0,15)^2} + \frac{32.000}{(1+0,15)^3} + \frac{28.000}{(1+0,15)^4} + \frac{37.000}{(1+0,15)^5} \right] - 103.000$$

$$VPL = \left[\frac{30.000}{(1,15)^1} + \frac{35.000}{(1,15)^2} + \frac{32.000}{(1,15)^3} + \frac{28.000}{(1,15)^4} + \frac{37.000}{(1,15)^5} \right] - 103.000$$

$$VPL = \left[\frac{30.000}{1,15} + \frac{35.000}{1,3225} + \frac{32.000}{1,520875} + \frac{28.000}{1,749006} + \frac{37.000}{2,011357} \right] - 103.000$$

$$VPL = [26.086,96 + 26.465,03 + 21.040,51 + 16.009,09 + 18.395,54] - 103.000$$

$$VPL = 107.997,13 - 103.000$$

$$VPL = 4.997,13$$

Resolvendo na HP-12C:

103.000 CHS g CF0

30.000 g CFj

35.000 g CFj

32.000 g CFj

28.000 g CFj

37.000 g CFj

15 i

f NPV

4.997,13 (resposta visor)

Deve-se destacar que, se o VPL for maior do que zero, significa que o retorno gerado pelo investimento excede ao mínimo desejado pela empresa. Simultaneamente, o método da TIR aponta que o investimento produz uma taxa de rentabilidade periódica superior à taxa mínima requerida.

Resumo, o critério deste método estabelece que, enquanto o valor presente das entradas for maior que o valor presente das saídas, o projeto deve ser recomendado do ponto de vista econômico.

O método do valor presente líquido analisa o projeto em valores monetários. O método que veremos a seguir, taxa interna de retorno (TIR), fará a análise em termos percentuais (taxa).

5.3 Taxa interna de retorno (tir)

O método da taxa interna de retorno (TIR) representa a taxa de retorno que iguala, em determinado momento, o valor presente das entradas com o valor presente das saídas previstas de caixa (fórmula 3). Normalmente, utiliza-se como referência a data de início do investimento – data 0 (ASSAF NETO, 2003).

$$\text{Investimento inicial} = \frac{FC}{(1+i)^1} + \frac{FC}{(1+i)^2} + \frac{FC}{(1+i)^3} + \dots \frac{FC}{(1+i)^n} \quad (3)$$

Também podemos considerar que a TIR é a taxa de desconto que torna o valor presente líquido igual a zero, como pode ser visto na fórmula 4:

$$0 = \frac{FC}{(1+i)^1} + \frac{FC}{(1+i)^2} + \frac{FC}{(1+i)^3} + \dots \frac{FC}{(1+i)^n} - \text{Investimento inicial} \quad (4)$$

A taxa interna de retorno é facilmente calculada através de uma calculadora financeira ou de planilhas eletrônicas.

Neste método de avaliação, a aceitação ou a rejeição de determinada alternativa de investimento é decidida a partir da comparação da taxa interna de retorno obtida com a rentabilidade mínima requerida pela empresa para seus investimentos, também chamada de taxa mínima de atratividade (TMA).

Considerando que os valores de caixa ocorrem em diferentes momentos, é possível concluir que o método da TIR, ao levar em conta o valor do dinheiro no tempo, expressa na verdade a rentabilidade, se for uma aplicação, ou o custo, no caso de um empréstimo ou financiamento, do fluxo de caixa (ASSAF NETO, 2008, p. 272).

Para decidir se um investimento deve ou não ser realizado utilizando a TIR, é necessário compará-la à taxa requerida (r) – também chamada de taxa mínima requerida ou de custo de capital; representa o mínimo de rentabilidade que a empresa espera obter com o investimento.

- se $TIR > TMA$, o investimento deve ser realizado;
- se $TIR < TMA$, o investimento não deve ser realizado.

Exemplo 3.5 – Baseado no exemplo 3.3, calcule a taxa interna de retorno do projeto apresentado na tabela abaixo. A taxa mínima de atratividade é de 15% ao ano.

Investimento inicial	Fluxos de caixa			
	Ano 1	Ano 2	Ano 3	Ano 4
– \$ 600	\$ 200	\$ 230	\$ 250	\$ 220

Algebricamente, o cálculo da TIR é feito da seguinte maneira:

$$600 = \frac{200}{(1+i)} + \frac{230}{(1+i)^2} + \frac{250}{(1+i)^3} + \frac{220}{(1+i)^4}$$

Como explicado anteriormente, a TIR é facilmente resolvida por planilhas eletrônicas ou pela calculadora HP-12C:

Resolvendo na HP-12C:

600 CHS g CF0

200 g CFj

230 g CFj

250 g CFj

220 g CFj

f IRR

18,02 (resposta visor)

A TIR do projeto analisado é 18,02% e é maior do que a taxa mínima de atratividade requerida pela empresa.

Este exercício também pode ser visualizado através do gráfico 1. Observe que a taxa interna de retorno é a taxa que é igual ao valor presente líquido a zero.

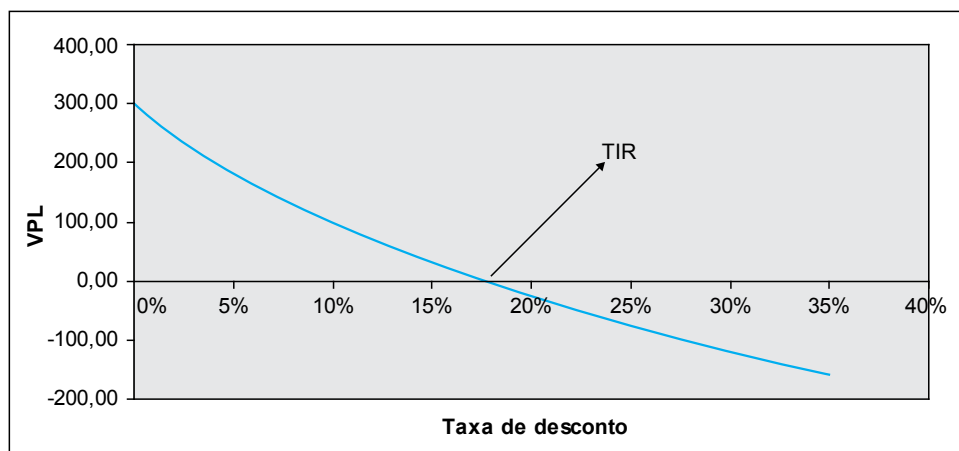


Gráfico 5.1. – VPL e TIR do exemplo 3.3

Atividades

01. Uma empresa está considerando um projeto que exige investimento inicial de R\$ 42.000,00 e fluxos de entrada de caixa após o IR de R\$ 7.000,00 por ano durante 10 anos. O período de *payback* máximo aceitável é de 8 anos.

a) Determine o *payback* simples para esse projeto. A empresa deve aceitar esse projeto? Por quê?

b) Determine o *payback* descontado para esse projeto, supondo um custo de capital de 8% ao ano. A empresa deve aceitar esse projeto? Por quê?

02. A Fábrica Cheirosa está considerando investir em uma nova máquina para envasar os perfumes. A máquina exige investimento inicial de R\$ 30.000,00 e vai gerar fluxos de caixa, após o imposto de renda, de R\$ 6.000,00 durante o período de 8 anos. Calcule o valor presente líquido (VPL) para cada um dos custos de capital listados abaixo e indique se a máquina deve ou não ser aceita. Explique sua decisão.

- a) Custo de capital 10% ao ano
- b) Custo de capital 12% ao ano
- c) Custo de capital 14% ao ano

03. Calcule a TIR do projeto apresentado no exercício 2.

04. Uma empresa está considerando um investimento em um projeto de longo prazo que necessita de investimento inicial de R\$ 18.250,00 e terá retornos anuais, após o imposto de renda, de R\$ 4.000,00 durante 7 anos. O custo de capital da empresa é de 10% ao ano. Pede-se:

- a) determinar a taxa interna de retorno (TIR);
- b) determinar o valor presente líquido (VPL);
- c) A empresa deve aceitar o projeto? Por quê?

05. Determinar a TIR (IRR) dos seguintes fluxos de caixa anuais:

	Ano 0	Ano 1	Ano 2	Ano 3
Projeto A	(10.000,00)	5.000,00	4.000,00	3.000,00
Projeto B	(30.000,00)	12.000,00	12.000,00	15.000,00

06. Um imóvel é colocado à venda por \$360.000,00 à vista, ou em 7 prestações: as 2 primeiras de \$50.000,00, duas seguintes de \$70.000,00 e as três últimas de \$80.000,00. Qual o custo mensal dessa operação (TIR)?

Reflexão

Um investimento, quando tratado individualmente, será considerado economicamente atraente se:

- (i) o NPV for positivo;
- (ii) a TIR for superior à taxa mínima requerida;
- (iii) o *payback* for maior que o tempo retorno esperado.

O valor presente líquido analisa o projeto em valores monetários. Com isso, é possível verificar qual o valor atual que está tendo de retorno do projeto. Já a TIR verifica qual a taxa, ou seja, analisa em termos percentuais qual é este retorno, e o *payback* analisa somente o tempo, sem considerar a taxa de desconto.

Leitura recomendada

Aprofunde seus conhecimentos a respeito dos temas tratados aqui lendo o artigo “Os métodos quantitativos de análise de investimentos”, do professor Alexandre Assaf Neto, que consta nos Cadernos de Estudos da FIPECAFI, número 06, outubro de 1992. Você poderá acessá-lo em: http://www.eac.fea.usp.br/cadernos/completos/cad06/metodos_quantitativos.pdf

Referências

ASSAF NETO, Alexandre. **Matemática financeira e suas aplicações**. 10. ed. São Paulo: Atlas, 2008.

BLANCHARD, O. **Macroeconomia**. Rio de Janeiro: Campus, 1999.

LAPPONI, J. C. **Matemática financeira**. 1. ed. Rio de Janeiro: Campus, 2006.

MANUAL DE CONTABILIDADE DAS SOCIEDADES POR AÇÕES: aplicável às demais sociedades. FIPECAFI. 7 ed. São Paulo: Atlas, 2009.

Gabarito

Capítulo 1

1.

$$PV = 1$$

$$FV = 2$$

$$n = ?$$

$$i = 2,5\% \text{ a.m.} / 100 = 0,025$$

$$FV = PV(1 + i \times n)$$

$$2 = 1 \times (1 + 0,025 \times n)$$

$$\frac{2}{1} = 1 + 0,025 \times n$$

$$2 - 1 = 0,025 \times n$$

$$1 = 0,025 \times n$$

$$n = \frac{1}{0,025}$$

$$n = 40 \text{ meses}$$

2.

$$PV = 12.000,00$$

$$FV = 17.750,00$$

$$n = 1 \text{ ano} = 12 \text{ meses}$$

$$i = ? \text{ mensal}$$

$$FV = PV \times (1 + i \times n)$$

$$17.750 = 12.000 \times (1 + i \times 12)$$

$$17.750 = 12.000 + 144.000i$$

$$17.750 - 12.000 = 144.000i$$

$$i = \frac{5.750}{144.000}$$

$$i = 0,039931 \times 100$$

$$i = 3,99\% \text{ a.m.}$$

3.

$$2.000 \cdot 20\% \text{ entrada} = 400$$

$$2.000 - 400 = 1.600,00 \text{ valor financiado}$$

$$PV = 1.600,00$$

$$FV = 1.750,00$$

$$n = 30 \text{ dias} = 1 \text{ mês}$$

$$i = ? \text{ mensal}$$

$$FV = PV \times (1 + i \times n)$$

$$1.750 = 1.600 \times (1 + i \times 1)$$

$$1.750 = 1.600 + 1.600i$$

$$1.750 - 1.600 = 1.600i$$

$$150 = 1.600i$$

$$i = \frac{150}{1.600}$$

$$i = 0,093750 \times 100$$

$$i = 9,38\% \text{ a.m.}$$

4.

$$PV = ?$$

$$FV = 430$$

$$n = 45 \text{ dias}$$

$$i = 5,5 \% \text{ a.m.} / 30 \text{ dias} = 0,183333 \% \text{ a.d.}$$

$$0,183333 / 100 = 0,001833$$

$$FV = PV \times (1 + i \times n)$$

$$430 = PV \times (1 + 0,001833 \times 45)$$

$$430 = PV \times (1 + 0,0825)$$

$$430 = PV \times 1,0825$$

$$PV = \frac{430}{1,0825}$$

$$PV = 397,23$$

5.

$$I = 40,80\% \text{ a.a} \div 12 \text{ meses} = 3,4\% \text{ a.m.} \div 100 = 0,034 \quad J = PV \times i \times n$$

$$PV = 245,00$$

$$J = 245 \times 0,034 \times 2$$

$$n = 2 \text{ meses}$$

$$J = 16,66$$

$$J = ?$$

6.

$$PV = 34.000,00$$

$$FV = PV \times (1 + i)^n$$

$$FV = 57.300,00$$

$$57.300 = 34.000(1 + i)^{36}$$

$$n = 3 \text{ anos} = 36 \text{ meses}$$

$$\frac{57.300}{34.000} = (1 + i)^{36}$$

$$i = ?$$

$$1,685294 = (1 + i)^{36}$$

$$\sqrt[36]{1,685294} = \sqrt[36]{(1 + i)^{36}}$$

$$1,014604 = 1 + i$$

$$i = 1,014604 - 1$$

$$i = 0,014604 \times 100$$

$$i = 1,46\% \text{ a.m.}$$

6.

$$n = ?$$

$$FV = PV \times (1 + i)^n$$

$$PV = 6.000,00$$

$$7.800 = 6.000 \times (1 + 0,045)^n$$

$$J = 1.800,00$$

$$\frac{7800}{6000} = (1 + 0,045)^n$$

$$FV = 7.800,00$$

$$1,3 = 1,045^n$$

$$i = 4,5 \% \text{ a.m.}$$

$$\log 1,3 = \log 1,045^n$$

$$0,113943 = 0,019116n$$

$$n = 0,113943 \div 0,019116$$

$$n = 5,96$$

Aproximadamente 6 meses

8.

$$PV = 75.000,00$$

$$i = 30\% \text{ a.a.}$$

$$n = 3 \text{ anos}$$

$$FV = ?$$

$$FV = 75.000 \times (1 + 0,30)^3$$

$$FV = 75.000 \times (1,30)^3$$

$$FV = 75000 \times 2,197$$

$$FV = 164.775,00$$

9.

$$i = 4\% \text{ a.m.}$$

$$FV = 38.000,00$$

$$n = 5 \text{ anos} = 60 \text{ meses}$$

$$PV = ?$$

$$FV = PV \times (1 + i)^n$$

$$38.000 = PV \times (1 + 0,04)^{60}$$

$$38.000 = PV \times (1,04)^{60}$$

$$38.000 = PV \times 10,519627$$

$$PV = \frac{38.000}{10,519627}$$

$$PV = 3.612,30$$

10.

$$J = ?$$

$$PV = 6.000,00$$

$$i = 7,4\% \text{ a.m.}$$

$$n = 2 \text{ anos} = 24 \text{ meses}$$

$$FV = PV \times (1 + i)^n$$

$$FV = 6.000 \times (1 + 0,074)^{24}$$

$$FV = 6.000 \times (1,074)^{24}$$

$$FV = 6.000 \times 5,547570$$

$$FV = 33.285,42$$

$$J = FV - PV$$

$$J = 33285,42 - 6.000$$

$$J = 27.285,42$$

11.

$$PV = 8.350,00$$

$$i = 88\% \text{ a.a.}$$

$$n = 8 \text{ meses}$$

$$FV = ?$$

$$FV = PV \times (1 + i)^{\frac{\text{quero}}{\text{temho}}}$$

$$FV = 8.350 \times (1 + 0,88)^{\frac{8}{12}}$$

$$FV = 8.350 \times (1,88)^{\frac{8}{12}}$$

$$FV = 8.350 \times (1,88)^{0,666667}$$

$$FV = 8.350 \times 1,523253$$

$$FV = 12.719,16$$

12.

a) 18% ao ano para ao semestre

$$iq = \left[(1 + 0,18)^{\frac{6}{12}} \right] - 1$$

$$iq = \left[(1,18)^{0,5} \right] - 1$$

$$iq = 1,086278 - 1$$

$$iq = 0,086278 \times 100$$

$$iq = 8,63\% \text{a.s.}$$

b) 5% ao mês para ao trimestre

$$iq = \left[(1 + 0,05)^{\frac{3}{1}} \right] - 1$$

$$iq = \left[(1,05)^3 \right] - 1$$

$$iq = 1,157625 - 1$$

$$iq = 0,157625 \times 100$$

$$iq = 15,76\% \text{a.trim.}$$

c) 36% ao ano para ao mês

$$iq = \left[(1 + 0,36)^{\frac{1}{12}} \right] - 1$$

$$iq = \left[(1,36)^{0,083333} \right] - 1$$

$$iq = 1,025955 - 1$$

$$iq = 0,025955 \times 100$$

$$iq = 2,59\% \text{a.m}$$

d) 7% ao mês para ao semestre

$$iq = \left[(1 + 0,07)^{\frac{6}{1}} \right] - 1$$

$$iq = \left[(1,07)^6 \right] - 1$$

$$iq = 1,500730 - 1$$

$$iq = 0,500730 \times 100$$

$$iq = 50,07\% \text{a.s.}$$

Capítulo 2

Desconto Simples

1.

$$N = 78.895,00$$

$$n = 2 \text{ meses}$$

$$i = 54\% \text{ a.a} \div 12 \text{ meses} = 4,5\% \text{ a.m.} \div 100 = 0,045$$

$$A = ?$$

$$Dr = ?$$

$$Dr = N - A$$

$$Dr = 78.895 - 72.380,73$$

$$Dr = 6.514,27$$

$$N = A \times (1 + i \times n)$$

$$78.895 = A \times (1 + 0,045 \times 2)$$

$$78.895 = A \times (1 + 0,09)$$

$$78.895 = A \times 1,09$$

$$A = \frac{78.895}{1,09}$$

$$A = 72.380,73$$

2.

$$D = 850,00$$

$$n = 3 \text{ meses}$$

$$d = 18\% \text{ a.a} \div 12 \text{ meses} = 1,5\% \text{ a.m.} \div 100 = 0,015$$

$$N = ?$$

$$D = N \times d \times n$$

$$850 = FV \times 0,015 \times 3$$

$$850 = FV \times 0,045$$

$$FV = \frac{850}{0,045}$$

$$FV = 18.888,89$$

3.

$$i = 3,5\% \text{ a.m.} / 100 = 0,035$$

$$N = 12.000,00$$

$$n = 75 \text{ dias} = 2,5 \text{ meses}$$

$$A = ?$$

$$Dr = ?$$

$$Dr = N - A$$

$$Dr = 12.000 - 11.034,48$$

$$Dr = 965,52$$

$$N = A \times (1 + i \times n)$$

$$12.000 = A \times (1 + 0,035 \times 2,5)$$

$$12.000 = A \times (1 + 0,0875)$$

$$12.000 = A \times 1,0875$$

$$A = \frac{12.000}{1,0875}$$

$$A = 11.034,48$$

4.

$$N = 7.000,00$$

$$n = 4 \text{ meses}$$

$$d = 2\% \text{ a.m}$$

a) Desconto Racional

$$N = A \times (1 + i \times n)$$

$$7.000 = A \times (1 + 0,02 \times 4)$$

$$7.000 = A \times (1 + 0,08)$$

$$7.000 = A \times 1,08$$

$$A = 7.000 \div 1,08$$

$$A = 6.481,48$$

b) Desconto Comercial

$$D = N \times d \times n$$

$$D = 7.000 \times 0,02 \times 4$$

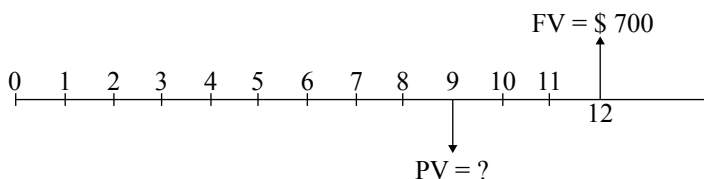
$$D = 560$$

$$A = N - D$$

$$A = 7.000 - 560 = 6.440$$

c) O valor líquido liberado pelo desconto comercial é menor do que o valor liberado pelo desconto racional. Isso ocorre porque, nas operações de desconto comercial, a taxa de juros incide sobre o valor futuro (valor nominal), enquanto que, nas operações de desconto racional, a taxa incide sobre o valor inicial.

5.



$$N = 700,00$$

$$n = 3 \text{ meses}$$

$$i = 3\% \text{ a.m.}$$

$$Dr = N - A$$

$$Dr = 700 - 642,20$$

$$Dr = 57,80$$

$$N = A \times (1 + i \times n)$$

$$700 = A \times (1 + 0,03 \times 3)$$

$$700 = A \times (1 + 0,09)$$

$$700 = A \times 1,09$$

$$A = \frac{700}{1,09}$$

$$A = 642,20$$

Desconto Composto**1.**

$$FV = 25000$$

$$i = 5\% \text{ a.m.} \Rightarrow 0,05$$

$$n = 5 \text{ meses}$$

$$PV = ?$$

$$FV = PV \times (1+i)^n$$

$$25.000 = PV \times (1+0,05)^5$$

$$25.000 = PV \times (1,05)^5$$

$$25.000 = PV \times 1,276282$$

$$PV = \frac{25.000}{1,276282}$$

$$PV = 19.588,15$$

2.

$$FV = 10.000$$

$$i = 3,5\% \text{ a.m.} \Rightarrow 0,035$$

$$n = ?$$

$$PV = 7.500$$

$$FV = PV \times (1+i)^n$$

$$10.000 = 7.500 \times (1+0,035)^n$$

$$10.000 = 7.500 \times (1,0035)^n$$

$$\frac{10.000}{7.500} = (1,0035)^n$$

$$1,333333 = 1,0035^n$$

$$\log 1,333333 = \log 1,0035^n$$

$$\log 1,333333 = n \times \log 1,0035$$

$$0,124938628 = n \times 0,0149403498$$

$$n = \frac{0,124938628}{0,0149403498}$$

$$n = 8,4$$

3.

$$FV = 4.200$$

$$n = 60 \text{ dias} = 2 \text{ meses}$$

$$PV = 3.997,60$$

$$i = ?$$

$$FV = PV \times (1+i)^n$$

$$4.200 = 3.997,60 \times (1+i)^2$$

$$\frac{4.200}{3.997,60} = (1+i)^2$$

$$1,050630 = (1+i)^2$$

$$\sqrt{1,050630} = \sqrt{(1+i)^2}$$

$$1,025002 = 1+i$$

$$i = 1,025002 - 1$$

$$i = 0,025002$$

$$i = 2,5\%$$

4.

$$A = ?$$

$$N = 35.000$$

$$d = 2,5\% \text{ a.m.} \Rightarrow 0,025$$

$$n = 3$$

$$A = N \times (1 - d)^n$$

$$A = 35.000 \times (1 - 0,025)^3$$

$$A = 35.000 \times (0,975)^3$$

$$A = 35.000 \times 0,926859$$

$$A = 32.440,08$$

$$D = N - A$$

$$D = 35.000 - 32.440,08$$

$$D = 2.559,92$$

5.

$$N = 70.000$$

$$n = 3$$

$$d = 4\% \text{ a.m.} \Rightarrow 0,04$$

$$A = ?$$

$$A = N \times (1 - d)^n$$

$$A = 70.000 \times (1 - 0,04)^3$$

$$A = 70.000 \times (0,96)^3$$

$$A = 70.000 \times 0,884736$$

$$A = 61.931,52$$

$$D = N - A$$

$$D = 70.000 - 61.931,52$$

$$D = 8.068,48$$

Capítulo 3

1.

$$\text{PMT} = 80,00$$

$$i = 2,5\% \div 100 \Rightarrow 0,025$$

$$n = 5$$

$$\text{PV} = ?$$

$$\text{PMT} = 80$$

$$\text{PV} = \text{PMT} \times \left[\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n \times i} \right]$$

$$\text{PV} = 80 \times \left[\frac{(1+0,025)^5 - 1}{(1+0,025)^5 \times 0,025} \right]$$

$$\text{PV} = 80 \times \left[\frac{1,131408 - 1}{1,131408 \times 0,025} \right]$$

$$\text{PV} = 80 \times \left[\frac{0,131408}{0,028285} \right]$$

$$\text{PV} = 80 \times 4,645854$$

$$\text{PV} = 371,67$$

2.

$$PV = 300.000 - 70.000 \text{ (entrada)} = 230.000$$

$$i = 3\% \text{ a.m.} \div 100 \Rightarrow 0,03$$

$$n = 60 \text{ meses}$$

$$PMT = ?$$

$$PV = PMT \times \left[\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n \times 1} \right]$$

$$230.000 = PMT \times \left[\frac{(1+0,03)^{60} \times 0,03}{(1+0,03)^{60} - 1} \right]$$

$$230.000 = PMT \times \left[\frac{(1,03)^{60} \times 0,03}{(1,03)^{60} - 1} \right]$$

$$230.000 = PMT \times \left[\frac{5,891603 - 1}{5,891603 \times 0,03} \right]$$

$$230.000 = PMT \times \left[\frac{4,891603}{0,176748} \right]$$

$$230.000 = PMT \times 27,675577$$

$$PMT = \frac{230.000}{27,675577}$$

$$PMT = 8.310,59$$

3.

$$i = 4\% \text{ a.m.} \Rightarrow 0,04$$

$$n = 1 + 3 = 4$$

$$PV = 2.199,00$$

$$PMT = ?$$

série antecipada

$$PV = PMT \times \left[\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^{n-1} \times 1} \right]$$

$$2.199 = PMT \times \left[\frac{(1+0,04)^4 - 1}{(1+0,04)^{4-1} \times 0,04} \right]$$

$$2.199 = PMT \times \left[\frac{(1,04)^4 - 1}{(1,04)^3 \times 0,04} \right]$$

$$2.199 = PMT \times \left[\frac{1,169859 - 1}{1,124864 \times 0,04} \right]$$

$$2.199 = PMT \times \left[\frac{0,169859}{0,044995} \right]$$

$$2.199 = PMT \times 3,775063$$

$$PMT = \frac{2.199}{3,775063}$$

$$PMT = 582,50$$

4.

$$FV = 10.000$$

$$n = 2 \text{ anos} \Rightarrow 24 \text{ meses}$$

$$i = 2\% \text{ a.m.} \Rightarrow 0,02$$

$$PMT = ?$$

$$FV = PMT \times \left[\frac{(1+i)^n \times i}{i} \right]$$

$$10.000 = PMT \times \left[\frac{(1+0,02)^{24} - 1}{0,02} \right]$$

$$10.000 = PMT \times \left[\frac{(1,02)^{24} - 1}{0,02} \right]$$

$$10.000 = PMT \times \left[\frac{1,608437 - 1}{0,02} \right]$$

$$10.000 = PMT \times \frac{0,608437}{0,02}$$

$$10.000 = PMT \times 30,421862$$

$$PMT = \frac{10.000}{30,421862}$$

$$PMT = 328,71$$

5.

Loja A:

$$PMT = 600$$

$$PV = ?$$

$$i = 2,5\% \text{ a.m.} \Rightarrow 0,025$$

$$n = 3$$

serie antecipada (entrada igual as parcelas)

$$PV = PMT \times \left[\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^{n-1} \times i} \right]$$

$$PV = 600 \times \left[\frac{(1+0,025)^3 - 1}{(1+0,025)^{3-1} \times 0,025} \right],$$

$$PV = 600 \times \left[\frac{(1,025)^3 - 1}{(1,025)^2 \times 0,025} \right],$$

$$PV = 600 \times \left[\frac{1,0768906 - 1}{1,050625 \times 0,025} \right]$$

$$PV = 600 \times \left[\frac{0,076890}{0,026266} \right]$$

$$PV = 600 \times 2,927358$$

$$PV = 1.756,44$$

Loja B:

$$\text{PMT} = 250$$

$$\text{PV} = ?$$

$$i = 2,5\% \text{ a.m.} \Rightarrow 0,025$$

$$n = 5 \text{ meses}$$

$$\text{PV} = \text{PMT} \times \left[\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n \times i} \right]$$

$$\text{PV} = 250 \times \left[\frac{(1+0,025)^5 - 1}{(1+0,025)^5 \times 0,025} \right]$$

$$\text{PV} = 250 \times \left[\frac{(1,025)^5 - 1}{(1,025)^5 \times 0,025} \right]$$

$$\text{PV} = 250 \times \left[\frac{1,131408 - 1}{1,131408 \times 0,025} \right]$$

$$\text{PV} = 250 \times \left[\frac{0,131408}{0,028285} \right]$$

$$\text{PV} = 250 \times 4,645854$$

$$\text{PV} = 1.161,46 + 700(\text{ENTRADA})$$

$$\text{PV} = 1.861,46$$

6.

$$\text{FV} = ?$$

$$\text{PMT} = 1500$$

$$i = 0,7\% \text{ a.m.} \Rightarrow 0,007$$

$$n = 36 \text{ meses}$$

$$\text{FV} = \text{PMT} \times \left[\frac{(1+i)^n \times i}{i} \right]$$

$$\text{FV} = 1500 \times \left[\frac{(1+0,007)^{36} - 1}{0,007} \right]$$

$$\text{FV} = 1500 \times \left[\frac{(1,007)^{36} - 1}{0,007} \right]$$

$$\text{FV} = 1500 \times \left[\frac{1,285467 - 1}{0,007} \right]$$

$$\text{FV} = 1500 \times \left[\frac{0,285467}{0,007} \right]$$

$$\text{FV} = 1500 \times 40,781000$$

$$\text{FV} = 61.171,50$$

Capítulo 4

1.

SAF				
	Saldo devedor	Amortização	Juros	Prestação
0	R\$ 15.000,00	—	—	—
1	R\$ 12.794,74	R\$ 2.205,26	R\$ 750,00	R\$ 2.955,26
2	R\$ 10.479,21	R\$ 2.315,53	R\$ 639,74	R\$ 2.955,26
3	R\$ 8.047,91	R\$ 2.431,30	R\$ 523,96	R\$ 2.955,26
4	R\$ 5.495,05	R\$ 2.552,87	R\$ 402,40	R\$ 2.955,26
5	R\$ 2.814,54	R\$ 2.680,51	R\$ 274,75	R\$ 2.955,26
6	R\$ —	R\$ 2.814,54	R\$ 140,73	R\$ 2.955,26
Total		R\$ 15.000,00	R\$ 2.731,57	R\$ 17.731,57

SAC				
	Saldo devedor	Amortização	Juros	Prestação
0	R\$ 15.000,00	—	—	—
1	R\$ 12.500,00	R\$ 2.500,00	R\$ 750,00	R\$ 3.250,00
2	R\$ 10.000,00	R\$ 2.500,00	R\$ 625,00	R\$ 3.125,00
3	R\$ 7.500,00	R\$ 2.500,00	R\$ 500,00	R\$ 3.000,00
4	R\$ 5.000,00	R\$ 2.500,00	R\$ 375,00	R\$ 2.875,00
5	R\$ 2.500,00	R\$ 2.500,00	R\$ 250,00	R\$ 2.750,00
6	R\$ —	R\$ 2.500,00	R\$ 125,00	R\$ 2.625,00
Total		R\$ 15.000,00	R\$ 2.625,00	R\$ 17.625,00

2.

a)

	Saldo devedor	Amortização	Juros	Prestação
0	R\$ 15.000,00	—	—	—
1	R\$ 15.000,00	—	R\$ 750,00	R\$ 750,00
2	R\$ 15.000,00	—	R\$ 750,00	R\$ 750,00
3	R\$ 15.000,00	—	R\$ 750,00	R\$ 750,00
4	R\$ 15.000,00	—	R\$ 750,00	R\$ 750,00
5	R\$ 12.500,00	R\$ 2.500,00	R\$ 750,00	R\$ 3.250,00
6	R\$ 10.000,00	R\$ 2.500,00	R\$ 625,00	R\$ 3.125,00

7	R\$ 7.500,00	R\$ 2.500,00	R\$ 500,00	R\$ 3.000,00
8	R\$ 5.000,00	R\$ 2.500,00	R\$ 375,00	R\$ 2.875,00
9	R\$ 2.500,00	R\$ 2.500,00	R\$ 250,00	R\$ 2.750,00
10	R\$ –	R\$ 2.500,00	R\$ 125,00	R\$ 2.625,00
Total		R\$ 15.000,00	R\$ 2.625,00	R\$ 17.625,00

b) juros são capitalizados e acrescidos ao saldo devedor.

	Saldo devedor	Amortização	Juros	Prestação
0	R\$ 15.000,00	–	–	–
1	R\$ 15.750,00	–	–	–
2	R\$ 16.537,50	–	–	–
3	R\$ 17.364,38	–	–	–
4	R\$ 18.232,59	–	–	–
5	R\$ 15.193,83	R\$ 3.038,77	R\$ 911,63	R\$ 3.950,40
6	R\$ 12.155,06	R\$ 3.038,77	R\$ 759,69	R\$ 3.798,46
7	R\$ 9.116,30	R\$ 3.038,77	R\$ 607,75	R\$ 3.646,52
8	R\$ 6.077,53	R\$ 3.038,77	R\$ 455,81	R\$ 3.494,58
9	R\$ 3.038,77	R\$ 3.038,77	R\$ 303,88	R\$ 3.342,64
10	R\$ –	R\$ 3.038,77	R\$ 151,94	R\$ 3.190,70
Total		R\$ 18.232,59	R\$ 3.190,70	R\$ 21.423,40

3.

a) juros pagos durante o período de carência;

	Saldo devedor	Amortização	Juros	Prestação
0	R\$ 15.000,00	–	–	–
1	R\$ 15.000,00	–	R\$ 750,00	R\$ 750,00
2	R\$ 15.000,00	–	R\$ 750,00	R\$ 750,00
3	R\$ 15.000,00	–	R\$ 750,00	R\$ 750,00
4	R\$ 15.000,00	–	R\$ 750,00	R\$ 750,00
5	R\$ 12.794,74	R\$ 2.205,26	R\$ 750,00	R\$ 2.955,26
6	R\$ 10.479,21	R\$ 2.315,53	R\$ 639,74	R\$ 2.955,26
7	R\$ 8.047,91	R\$ 2.431,30	R\$ 523,96	R\$ 2.955,26
8	R\$ 5.495,05	R\$ 2.552,87	R\$ 402,40	R\$ 2.955,26
9	R\$ 2.814,54	R\$ 2.680,51	R\$ 274,75	R\$ 2.955,26
10	R\$ –	R\$ 2.814,54	R\$ 140,73	R\$ 2.955,26
Total		R\$ 15.000,00	R\$ 2.731,57	R\$ 17.731,57

b) juros são capitalizados e acrescidos ao saldo devedor.

	Saldo devedor	Amortização	Juros	Prestação
0	R\$ 15.000,00	—	—	—
1	R\$ 15.750,00	—	—	—
2	R\$ 16.537,50	—	—	—
3	R\$ 17.364,38	—	—	—
4	R\$ 18.232,59	—	—	—
5	R\$ 15.552,08	R\$ 2.680,51	R\$ 911,63	R\$ 3.592,14
6	R\$ 12.737,55	R\$ 2.814,54	R\$ 777,60	R\$ 3.592,14
7	R\$ 9.782,29	R\$ 2.955,26	R\$ 636,88	R\$ 3.592,14
8	R\$ 6.679,26	R\$ 3.103,03	R\$ 489,11	R\$ 3.592,14
9	R\$ 3.421,09	R\$ 3,258,18	R\$ 333,96	R\$ 3.592,14
10	R\$ —	R\$ 3,421,09	R\$ 171,05	R\$ 3.592,14
Total		R\$ 18.232,59	R\$ 3.320,24	R\$ 21.552,84

Capítulo 5

1.

a) Payback

	FC	Saldo	
0	42.000,00	42.000,00	
1	7.000,00	35.000,00	
2	7.000,00	28.000,00	
3	7.000,00	21.000,00	
4	7.000,00	14.000,00	
5	7.000,00	7.000,00	
6	7.000,00	—	6 anos
7	7.000,00		
8	7.000,00		
9	7.000,00		
10	7.000,00		

b) payback descontado

Deverá ser calculado primeiramente o PV (valor presente) de cada um dos fluxos de caixa e depois calcular o PV

		Saldo	
	PV do fluxo de caixa	42.000	
1	R\$ 6.481,48	R\$ 35.518,52	
2	R\$ 6.001,37	R\$ 29.517,15	
3	R\$ 5.556,83	R\$ 23.960,32	
4	R\$ 5.145,21	R\$ 18.815,11	
5	R\$ 4.764,08	R\$ 14.051,03	
6	R\$ 4.411,19	R\$ 9.639,84	
7	R\$ 4.084,43	R\$ 5.555,41	
8	R\$ 3.781,88	R\$ 1.773,53	$1.773,53 \div 3.501,74 = 0,50547$
9	R\$ 3.501,74	(R\$ 1.728,22)	
10	R\$ 3.242,35	(R\$ 4.970,57)	Payback = 8,5 anos

2.

0	– 30.000,00
1	6.000,00
2	6.000,00
3	6.000,00
4	6.000,00
5	6.000,00
6	6.000,00
7	6.000,00
8	6.000,00

a) Custo de Capital 10 % ao ano

$$VPL = \frac{FC}{(1+i)^1} + \frac{FC}{(1+i)^2} + \frac{FC}{(1+i)^3} + \dots + \frac{FC}{(1+i)^n} - \text{investimento inicial}$$

$$VPL = \frac{6.000}{(1+0,10)^1} + \frac{6.000}{(1+0,10)^2} + \frac{6.000}{(1+0,10)^3} + \frac{6.000}{(1+0,10)^4} + \frac{6.000}{(1+0,10)^5} + \frac{6.000}{(1+0,10)^6} + \frac{6.000}{(1+0,10)^7} + \frac{6.000}{(1+0,10)^8} - 30.000$$

$$VPL = 5.454,55 + 4.958,58 + 4.507,89 + 4.098,08 + 3.725,53 + 3.386,84 + 3.078,95 + 2.799,04 - 30.000$$

$$VPL = 32.009,56 - 30.000 = \mathbf{2.009,56}$$

Na HP – 12C

30.000 CHS g Cf0

6.000 g Cfj

8 g Nj (como os 6.000 se repete 8 vezes, não precisa digitar novamente, só indicar que se repete)

10 i

f NPV

2.009,56

b) Custo de Capital 12% ao ano

VPL = – **R\$ 194,16**

c) Custo de Capital 14 % ao ano

VPL = – **R\$ 2.166.82**

A fábrica só deverá investir na máquina se o custo de capital for igual a 10%, pois para os demais custos o VPL se torna negativo.

Obs: Para resolver na HP (ou pela fórmula), é só refazer os cálculos com as outras taxas.

3.

30.000 CHS g Cf0

6.000 g Cfj

8 g Nj (como os 6.000 se repete 8 vezes, não precisa digitar novamente, só indicar que se repete)

10 i

f IRR

11,81%

4.

TIR e VPL

18.250 CHS g Cf0

4.000 g Cfj

7 g Nj (como os 4.000 se repete 7 vezes, não precisa digitar novamente, só indicar que se repete)

10 i

f IRR

12,01%

f NPV

1.223,88

$$VPL = \frac{FC}{(1+i)^1} + \frac{FC}{(1+i)^2} + \frac{FC}{(1+i)^3} + \dots + \frac{FC}{(1+i)^n} - \text{investimento inicial}$$

$$VPL = \frac{4.000}{(1+0,10)^1} + \frac{4.000}{(1+0,10)^2} + \frac{4.000}{(1+0,10)^3} + \frac{4.000}{(1+0,10)^4} + \frac{4.000}{(1+0,10)^5} + \frac{4.000}{(1+0,10)^6} + \frac{4.000}{(1+0,10)^7} - 18.250$$

$$VPL = 3.636,36 + 3.305,78 + 3.005,26 + 2.732,05 + 2.483,69 + 2.257,90 + 2.052,63 - 18.250$$

$$VPL = 19.473,68 - 30.000 = \mathbf{1.223,88}$$

5.

• Projeto A

10.000 CHS g Cf0

5.000 g Cfj

4.000 g Cfj

3.000 g Cfj

f IRR

10,65%

• Projeto B

30.000 CHS g Cf0

9.000 g Cfj

12.000 g Cfj

15.000 g Cfj

f IRR

8,89%

6.

360.000 CHS g Cf0

50.000 g Cfj

2 g Nj

70.000 g Cfj

2 g Nj

80.000 g Cfj

3 g Nj

f IRR

7,08%

Minhas anotações:

This image shows a full page of white paper with horizontal blue or grey ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page, providing a template for handwriting practice. There are no margins, text, or other markings on the page.