

# Matemática Financeira

Aula 02 - Juros Simples, Descontos  
Simples e Juros Compostos

Prof.Dr. Edmilson J.T. Manganote

# Juros Simples

Fórmula do Juros Simples e Montante

$$S = P(1 + i \cdot n)$$

Taxas Equivalentes

$$\frac{i_1}{i_2} = \frac{n_1}{n_2}$$

# Juros Simples

- Juro Exato e Juro Comercial
  - Juros Exatos - considerando o ano civil, que tem 365 dias
  - Juros Comerciais - Considerando o ano comercial, que tem 360 dias
- Operações com Hot Money
  - Empréstimos de curtíssimo prazo, em geral de um dia útil, o regime é de capitalização simples com juros comerciais, sendo as taxas dadas em termos mensais

# Juros Simples

- Valor Nominal e Valor Presente
  - Nominal - na data do vencimento
  - Presente ou atual - valor aplicado a juros simples, em uma data anterior ao vencimento, que proporcione um valor igual ao nominal

$$P + P \cdot i = S$$

# Descontos Simples

- A idéia de desconto está associada com o abatimento dado a um valor monetário em determinadas condições
- Desconto Comercial ou Bancário
  - Chamamos de valor nominal (ou de face) e indicamos por  $N$  o valor do título a ser descontado. Sendo  $n$  o prazo de vencimento e  $d$  a taxa de desconto utilizada, o desconto é dado por:  $D = Ndn$
  - O valor líquido do título sendo dado por:

$$V_d = N - D$$

# Descontos Simples

- Exercício: Uma duplicata de \$ 18.000,00 foi descontada em um banco dois meses antes do vencimento, a uma taxa de desconto comercial de 2,5% a.m.
- a) Obtenha o desconto
- b) Obtenha o valor líquido recebido pela empresa
- c) Obtenha o fluxo de caixa da operação do ponto de vista do banco. Calcule também a taxa efetiva de juros da operação

Uma duplicata de \$ 18.000,00 foi descontada em um banco dois meses antes do vencimento, a uma taxa de desconto comercial de 2,5% a.m.

- a) Obtenha o desconto.
- b) Obtenha o valor líquido recebido pela empresa.
- c) Obtenha o fluxo de caixa da operação do ponto de vista do banco. Calcule também a taxa efetiva de juros da operação.

*Resolução*

a)  $D = 18.000(0,025)2 = 900$

b)  $V_d = 18.000 - 900 = 17.100$

$$i = \frac{18.000}{17.100} - 1 = 0,0526 = 5,26\% \text{ a.b.}$$

No regime de juros simples, tal taxa é equivalente a  $\frac{5,26\%}{2} = 2,63\% \text{ a.m.}$  É importante notar que a taxa de juros simples mensal é diferente da taxa mensal de desconto. Isto porque a taxa de juros incide no valor inicial (\$ 17.100) para dar \$ 900,00, ao passo que a taxa de desconto incide no valor final (\$ 18.000) para dar o resultado \$ 900,00 (as pequenas diferenças observadas decorrem do arredondamento feito).

# Descontos Simples

- Relação entre a Taxa de Desconto e a Taxa de Juros Simples

$$i = \frac{d}{1 - dn}$$



# Descontos Simples

- Exercício: Se a taxa de desconto comercial for de 4% a.m., e o prazo de vencimento de uma duplicata for de três meses, qual a taxa mensal de juros simples da operação?

Se a taxa de desconto comercial for de 4% a.m., e o prazo de vencimento de uma duplicata for de três meses, qual a taxa mensal de juros simples da operação?

*Resolução*

Temos:

$$d = 4\% \text{ e } n = 3$$

Portanto:

$$i = \frac{0,04}{1 - (0,04)^3} = 0,0455 = 4,55\%$$

Assim, a taxa de juros simples da operação vale 4,55% a.m.

# Descontos Simples

- Operações com um conjunto de títulos
  - Caso tenhamos um conjunto de títulos, o seu valor comercial (ou valor líquido) é a soma dos valores atuais de cada título
- Prazo Médio de um conjunto de títulos
  - É a média ponderada dos prazos dos títulos, sendo os pesos iguais aos valores de cada título

# Descontos Simples

- Exercício: Uma empresa apresenta um borderô de duplicatas a seguir, para serem descontadas em um banco à taxa de desconto comercial de 2% a.m. Qual o valor líquido recebido pela empresa? Qual o prazo médio?

Duplicata	Valor	Prazo vencimento
A	\$ 20.000,00	30 dias
B	\$ 40.000,00	65 dias
C	\$ 80.000,00	82 dias

Uma empresa apresenta o borderô de duplicatas a seguir, para serem descontadas em um banco à taxa de desconto comercial de 2% a.m. Qual o valor líquido recebido pela empresa?

Duplicata	Valor	Prazo até o vencimento
A	\$ 20.000	30 dias
B	\$ 40.000	65 dias
C	\$ 80.000	82 dias

#### Resolução

- Duplicata A

$$D_A = 20.000(0,02)1 = 400$$

$$V_{liq} = 19.600$$

- Duplicata B

$$D_B = 40.000 \frac{0,02}{30} 65 = 1.733,33$$

$$V_{liq} = 38.266,67$$

- Duplicata C

$$D_C = 80.000 \frac{0,02}{30} 82 = 4.373,33$$

$$V_{liq} = 75.626,67$$

Desta forma, o valor líquido liberado para a empresa foi de:

$$19.600 + 38.266,67 + 75.626,67 = 133.493,34$$

O mesmo resultado poderia ser obtido subtraindo-se do total do borderô (\$ 140.000,00) a soma dos descontos (\$ 6.506,66). O fluxo de caixa da operação, do ponto de vista do banco, é (Figura 3.4):

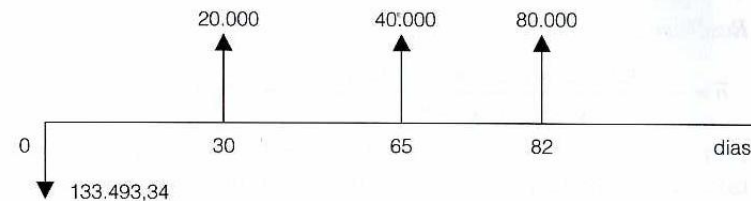


FIGURA 3.4 Fluxo de caixa de um banco que adiantou \$ 133.493,34 para receber duplicatas de \$ 20.000, \$ 40.000 e \$ 80.000.

Para o cálculo da taxa efetiva de juros, o procedimento é um pouco mais complexo do que com um único título. No caso de vários títulos, a taxa efetiva de juros é a taxa interna de retorno do fluxo de caixa da operação, assunto que estudaremos no Capítulo 6.

# Juros Compostos

- Fórmula do Montante

$$S = P(1 + i)^n$$

- O fator entre parênteses é chamado de Fator de Acumulação de Capital
- Períodos não inteiros
  - A relação anterior é estendida para valores de  $n$  positivos e não inteiros

# Juros Compostos

- Exercício: Uma empresa recebeu um empréstimo para capital de giro no valor de \$ 30.000,00, para pagamento em 56 dias. O banco cobrou juros compostos a uma taxa de 52% a.a. Qual o montante que deverá ser pago?

Uma empresa recebeu um empréstimo para capital de giro no valor de \$ 30.000,00, para pagamento em 56 dias. O banco cobrou juros compostos a uma taxa de 52% a.a. Qual o montante?

*Resolução*

Sendo a taxa dada ao ano, o valor de  $n$  (em anos) é dado por:  $n = \frac{56}{360}$

Desta forma, teremos:

$$M = 30000(1,52)^{\frac{56}{360}} = 32.019,02$$



# Juros Compostos

- Taxas Equivalentes

$$(1 + i)^{n_1} = (1 + i)^{n_2}$$

Exercício: Em juros compostos, qual a taxa anual equivalente a 2% a.m.?

Em juros compostos, qual a taxa anual equivalente a 2% a.m.?

*Resolução*

Chamando de  $i_1$  a taxa anual procurada e  $i_2 = 2\%$  a.m. a taxa conhecida e, ainda, adotando um prazo padrão de um ano, teremos:

$i_1$  (taxa anual)

$i_2 = 2\%$  a.m.

$n_1 = 1$

$n_2 = 12$

Assim:

$$(1 + i_1)^1 = (1,02)^{12}$$

$$i_1 = (1,02)^{12} - 1 = 0,2682 = 26,82\% \text{ a.a.}$$

Portanto, a taxa de 26,82% a.a. é equivalente a 2% a.m. no regime de juros compostos. É importante observarmos que se tivéssemos adotado um outro prazo padrão (digamos de dois anos), o resultado seria o mesmo, pois a razão entre  $n_1$  e  $n_2$  seria a mesma.

# Juros Compostos

- Certificados de Depósito Bancário (CDBs)
  - Título emitidos pelos bancos - nominativos endossáveis
- Recibos de Depósito Bancário (RDBs)
  - Intransferíveis
- Certificado de Depósito Interbancário (CDI)
- Remuneração: Prefixada e Pós-fixada
- Taxa Líquida e Taxa Bruta

# Juros Compostos

- Exercício: Um investidor aplicou \$ 15.000,00 em um CDB prefixado de 30 dias em uma instituição financeira. A taxa bruta da operação foi de 18% a.a. Pede-se:
  - a) O montante bruto de resgate
  - b) O imposto de renda, sabendo-se que é igual a 22,5% do juro auferido
  - c) O montante líquido
  - d) A taxa líquida da operação no período considerado

Um investidor aplicou \$ 15.000,00 em um CDB prefixado de 30 dias em uma instituição financeira. A taxa bruta da operação foi de 18% a.a. Pede-se:

- a) O montante bruto de resgate.
- b) O imposto de renda, sabendo-se que é igual a 22,5% do juro auferido.
- c) O montante líquido (montante após o pagamento do imposto).
- d) A taxa líquida da operação no período considerado.

*Resolução*

$$C = 15.000$$

$$i = 18\% \text{ a.a.}$$

$$n = \frac{30}{360}$$

$$\text{a) } M = 15.000(1,18)^{\frac{30}{360}} = 15.208,33$$

$$\text{b) } IR = 0,225(15.208,33 - 15.000) = 46,87$$

$$\text{c) } M_{liq} = 15.208,33 - 46,87 = 15.161,46$$

$$\text{d) } i_{liq} = \frac{15.161,46}{15.000} - 1 = 0,0108 = 1,08\% \text{ a.p. (ao período)}$$

# Juros Compostos

- Valor Atual e Nominal em Juros Compostos
  - Valor Nominal: valor na data do vencimento
  - Valor Atual ou Valor Presente: em uma data anterior ao vencimento

$$P = \frac{S}{(1+i)^n}$$

# Juros Compostos

- Exercício: Uma pessoa tem uma dívida de \$ 10.000,00 vencível daqui a três meses. Qual o seu valor atual hoje, considerando uma taxa de juros de 1,5% a.m.?

Uma pessoa tem uma dívida de \$ 10.000,00 vencível daqui a três meses. Qual seu valor atual hoje, considerando uma taxa de juros de 1,5% a.m.?

*Resolução*

$$V = \frac{10.000}{(1,015)^3} = 9.563,17$$

Assim, se ela aplicar \$ 9.563,17 hoje a 1,5% a.m., daqui a três meses terá um montante de \$ 10.000,00 (portanto, suficiente para pagar o compromisso).



# Juros Compostos

- Compra à Vista e Compra a Prazo
  - O procedimento consiste em calcular o valor atual do pagamento a prazo e compará-lo com o preço a vista
  - A melhor alternativa é o chamado Preço Econômico

# Juros Compostos

- Exercício: O que é melhor para um comprador: pagar um terreno por \$ 50.000,00 daqui a 50 dias ou pagar a vista com 3% de desconto sobre aquele preço? Suponha que o comprador consiga aplicar seu dinheiro à taxa de 1,4% a.m. no regime de juros compostos.

# Juros Compostos

- Capitalização Composta com Taxas de Juros Variáveis

$$i_{AC} = (1 + i_1)(1 + i_2)(1 + i_3) \cdots (1 + i_n) - 1$$

# Juros Compostos

- Exercício: Em três meses consecutivos, um fundo de renda fixa rendeu, respectivamente, 1,3%, 1,7% e 2,1%. Se o capital aplicado no início do primeiro mês foi de \$ 16.000,00, pede-se:
  - a) O montante ao final do 3º mês
  - b) A taxa de rentabilidade acumulada deste fundo no trimestre

Em três meses consecutivos, um fundo de renda fixa rendeu, respectivamente, 1,3%, 1,7% e 2,1%. Se o capital aplicado no início do primeiro mês foi de \$ 16.000,00, pede-se:

- a) O montante ao final do terceiro mês.
- b) A taxa de rentabilidade acumulada deste fundo no trimestre.

*Resolução*

a)  $M = 16.000(1,013)(1,017)(1,021) = 16.829,69$

b)  $i_{AC} = \frac{16.829,69}{16.000} - 1 = 0,0519 = 5,19\%$

A taxa acumulada também poderia ser obtida por meio da fórmula:

$$i_{AC} = (1,013)(1,017)(1,021) - 1 = 0,0519 = 5,19\%$$

# Juros Compostos

- Taxa Acumulada de Empréstimos com Hot Money

$$i_{AC} = \left(1 + \frac{i_1}{30}\right) \left(1 + \frac{i_2}{30}\right) \left(1 + \frac{i_3}{30}\right) \cdots \left(1 + \frac{i_n}{30}\right) - 1$$

# Juros Compostos

- Exercício: Em três dias úteis consecutivos, vigoraram as seguintes taxas em operações de hot money: 3%, 3,5% e 4%. Qual a taxa acumulada no período?

Em três dias úteis consecutivos, vigoraram as seguintes taxas em operações de hot money: 3%, 3,5% e 4%. Qual a taxa acumulada no período?

*Resolução*

$$i_{AC} = \left(1 + \frac{0,03}{30}\right) \left(1 + \frac{0,035}{30}\right) \left(1 + \frac{0,04}{30}\right) - 1,$$

$$i_{AC} = 0,0035 = 0,35\%$$



# Juros Compostos

- Operações em Dias Úteis e Taxa Over
  - Dias úteis do ano: 252 (Convenção de 2000)
  - Taxa Over Mensal: 30 vezes a taxa por dia útil, servindo para comparar rentabilidades ou custos de empréstimos

# Juros Compostos

- Exercício: Uma instituição financeira aplicou \$ 20.000,00 em um CDI de outra instituição por um dia útil à taxa de 19% a.a. (252 dias úteis):
  - a) Qual o montante?
  - b) Qual a taxa efetiva por dia útil e qual a taxa over mensal correspondente?

$$b) i = \frac{20.013.810,58}{20.000.000} - 1 = 0,000691 = 0,0691\% \text{ a.d.u. (ao dia útil)}$$

Taxa over mensal =  $30(0,0691\%) = 2,073\% \text{ a.m.}$

É importante observarmos que a taxa over não corresponde à taxa efetiva ao mês, caso o dinheiro seja aplicado pelo número de dias úteis do mês. De fato, imaginemos que houvesse 21 dias úteis no mês; se este fosse o prazo da aplicação, o montante seria dado por:

$$M = 20.000.000(1,19)^{\frac{21}{252}} = 20.292.033,74$$

A correspondente taxa no período seria:

$$i = \frac{20.292.033,74}{20.000.000} - 1 = 0,0146 = 1,46\% \text{ a.p. (ao período)}$$

o que é diferente da taxa over mensal.

# Juros Compostos

- Taxa Over SELIC
  - Sistema Especial de Liquidação e Custódia foi criado com o intuito de registrar e controlar eletronicamente as operações com títulos públicos federais
  - É dada diariamente (em dias úteis) e expressa ao ano com base em 252 dias úteis
  - LFT - Letra Financeira do Tesouro

# Juros Compostos

- Exercício: Se uma LFT for de \$ 1.175,48 em um determinado dia e a taxa SELIC for de 15,25% a.a. (252 dias úteis), qual o valor da LFT no dia seguinte?

# Juros Compostos

- Período da Taxa não coincide com o Período de Capitalização
  - Na dedução da fórmula do montante, partimos da hipótese de que o período de capitalização (formação de juros) coincidia com o período da taxa. Quando tal fato não ocorre, é convenção adotar-se a taxa do período de capitalização (taxa efetiva) como proporcional à taxa considerada.

# Juros Compostos

Exercício: Um capital de \$ 1.000,00 foi aplicado durante um ano à taxa de 12% a.a., mas com capitalização mensal de juros. Qual o montante ao final?

# Juros Compostos

- Capitalização Contínua

$$S = \left(1 + \frac{i}{n}\right)^n$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{i}{x}\right)^x = e^i$$

$$S = Pe^i$$

$$S = Pe^{in}$$



# Juros Compostos

- Exercício: Um capital de \$ 5.000,00 é aplicado à taxa de 10% a.s., durante dois anos, com capitalização contínua. Qual o montante?

Um capital de \$ 5.000,00 é aplicado à taxa de 10% a.s., durante dois anos, com capitalização contínua. Qual o montante?

*Resolução*

$$C = 5.000$$

$$i = 10\% \text{ a.s.}$$

$$n = 4 \text{ (dois anos = quatro semestres)}$$

Assim,

$$M = 5.000e^{(0,1) \cdot 4} = 7.459,12$$