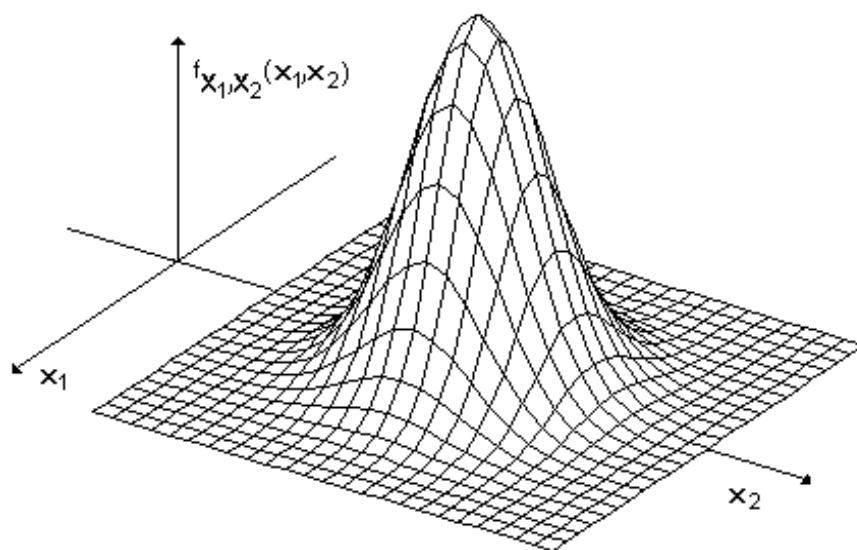


---

# ESTATÍSTICA APLICADA

Edite Manuela da G.P. Fernandes

---



Universidade do Minho, Braga, 1999

---

# ESTATÍSTICA APLICADA

Edite Manuela da G.P. Fernandes

---

com a colaboração de  
A. Ismael F. Vaz  
na realização dos gráficos, figuras e tabelas

Universidade do Minho, Braga, 1999

Título: **Estatística Aplicada**

Autor: *Edite Manuela da G.P. Fernandes*

Composição: *Texto preparado em L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X pela autora e por A. Ismael F. Vaz*

Impressão da capa e colagem: *Serviços de Reprografia e Publicações da Universidade do Minho*

Capa: *A. Ismael F. Vaz*

T<sub>E</sub>X é uma marca registada da American Mathematical Society.

300 exemplares em Janeiro de 1999



# Conteúdo

<b>Prefácio</b>	<b>ix</b>
<b>1 Teoria da amostragem</b>	<b>1</b>
1.1 Introdução . . . . .	1
1.2 Amostragem . . . . .	1
1.3 Amostra aleatória simples . . . . .	2
1.4 Distribuição amostral . . . . .	4
1.5 Erros no processo de amostragem . . . . .	5
1.6 Outros tipos de amostragem . . . . .	5
1.7 Exercícios . . . . .	7
<b>2 Experimentação</b>	<b>13</b>
2.1 Introdução . . . . .	13
2.2 O planeamento da experiência . . . . .	14
2.3 Medição de variáveis . . . . .	16
2.3.1 Precisão das medições . . . . .	16
2.3.2 Escalas de medição . . . . .	17
2.4 Exercícios . . . . .	19
<b>3 Organização dos dados</b>	<b>23</b>
3.1 Introdução . . . . .	23
3.2 Tabela de frequências . . . . .	23
3.3 Gráficos . . . . .	25
3.4 Exercícios . . . . .	31
<b>4 Estatística descritiva</b>	<b>37</b>
4.1 Medidas centrais . . . . .	37
4.2 Medidas de dispersão . . . . .	39
4.3 Distribuição normal . . . . .	41
4.4 Medidas de associação . . . . .	43
4.4.1 Coeficiente de correlação . . . . .	44
4.4.2 Coeficiente de determinação . . . . .	44
4.4.3 Associação, predição e causa . . . . .	46

4.5	Exercícios . . . . .	49
<b>5</b>	<b>Distribuições de probabilidade</b>	<b>55</b>
5.1	Teoria das probabilidades . . . . .	55
5.1.1	Espaço da amostra . . . . .	56
5.1.2	Probabilidades . . . . .	56
5.1.3	Operações com acontecimentos . . . . .	58
5.1.4	Funções de probabilidade . . . . .	60
5.1.5	Distribuição de funções de variáveis aleatórias . . . . .	65
5.2	Esperança Matemática . . . . .	67
5.3	Funções de distribuição discretas . . . . .	70
5.3.1	Tentativas de Bernoulli . . . . .	70
5.3.2	Distribuição binomial . . . . .	71
5.3.3	Distribuição binomial negativa . . . . .	71
5.3.4	Distribuição de Poisson . . . . .	73
5.3.5	Aproximação de Poisson à distribuição binomial . . . . .	74
5.4	Funções de distribuição contínuas . . . . .	75
5.4.1	Distribuição uniforme . . . . .	75
5.4.2	Distribuição exponencial . . . . .	76
5.4.3	Distribuição gama . . . . .	77
5.4.4	Distribuição normal . . . . .	78
5.4.5	Aproximação normal à distribuição binomial . . . . .	80
5.4.6	Distribuição normal bivariada . . . . .	82
5.4.7	Distribuição Qui-quadrado . . . . .	83
5.4.8	Distribuição t-Student . . . . .	84
5.4.9	Distribuição F. Fisher . . . . .	85
5.5	Exercícios . . . . .	87
<b>6</b>	<b>Estimação de parâmetros</b>	<b>93</b>
6.1	Introdução . . . . .	93
6.2	Estimação pontual de parâmetros . . . . .	94
6.2.1	Média do quadrado do erro . . . . .	94
6.2.2	Tendência . . . . .	95
6.2.3	Eficiência . . . . .	96
6.2.4	Consistência . . . . .	96
6.3	Estimador de máxima verosimilhança . . . . .	97
6.3.1	Estimador da média . . . . .	98
6.3.2	Estimador da variância . . . . .	99
6.3.3	Estimador para a proporção binomial . . . . .	100
6.4	Estimação por intervalos de confiança . . . . .	101
6.4.1	Intervalo para a média . . . . .	101
6.4.2	Intervalo para a diferença entre duas médias . . . . .	102
6.4.3	Intervalo para a variância . . . . .	103

6.4.4	Intervalo para a razão entre duas variâncias . . . . .	104
6.4.5	Intervalo para a proporção binomial . . . . .	104
6.5	Exercícios . . . . .	105
<b>7</b>	<b>Testes às médias das distribuições</b>	<b>111</b>
7.1	Hipóteses estatísticas . . . . .	111
7.1.1	Função potência. Nível de significância. . . . .	112
7.1.2	Hipóteses simples e composta . . . . .	112
7.1.3	Testes unilaterais e bilaterais . . . . .	113
7.2	Teste à média de uma distribuição . . . . .	113
7.3	Teste à diferença de duas médias . . . . .	114
7.4	Teste às médias de $k$ distribuições . . . . .	116
7.4.1	Análise da variância . . . . .	118
7.4.2	Planeamento completamente aleatório . . . . .	118
7.4.3	Amostras relacionadas. Planeamento com blocos aleatórios . . . . .	122
7.4.4	Amostras relacionadas. Planeamento com blocos incompletos . . . . .	126
7.4.5	Análise de dois factores. Planeamento factorial com uma replicação. Planeamento factorial com $r$ replicações . . . . .	130
7.4.6	Planeamento factorial a dois níveis, $2^2$ e $2^3$ . . . . .	137
7.4.7	Planeamentos baseados em quadrados latinos e greco-latinos . . . . .	140
7.4.8	Inferência não-paramétrica. Dados ordinais. Graduação das obser- vações. . . . .	144
7.4.9	Amostras independentes. Teste de Kruskal-Wallis. . . . .	146
7.4.10	Amostras relacionadas. Planeamento com blocos. Teste de Quade. . . . .	148
7.4.11	Amostras relacionadas. Planeamento com blocos incompletos. Teste de Durbin. . . . .	150
7.5	Exercícios . . . . .	153
<b>8</b>	<b>Testes às proporções</b>	<b>163</b>
8.1	Teste às proporções de duas binomiais . . . . .	163
8.1.1	Teste à proporção $p_1$ . . . . .	163
8.1.2	Teste à diferença de duas proporções . . . . .	164
8.2	'Estatística' dos testes do Qui-Quadrado . . . . .	164
8.3	Tabelas de Contingências de duas Entradas . . . . .	166
8.3.1	Teste de independência . . . . .	167
8.3.2	Teste de homogeneidade . . . . .	169
8.4	Exercícios . . . . .	171
<b>9</b>	<b>Testes de ajuste de distribuições</b>	<b>175</b>
9.1	Teste do Qui-Quadrado para grandes amostras . . . . .	175
9.1.1	Distribuição completamente especificada na hipótese nula . . . . .	176
9.1.2	Distribuição não totalmente especificada. Estimação de parâmetros . . . . .	176
9.2	Testes do tipo Kolmogorov para pequenas amostras . . . . .	177

9.2.1	Distribuição empírica. 'Estatística' de máxima distância vertical . . .	178
9.2.2	Distribuição completamente especificada na hipótese nula. Teste de Kolmogorov . . . . .	179
9.2.3	Famílias de distribuições. Estimação de parâmetros . . . . .	180
9.3	Testes às distribuições . . . . .	182
9.3.1	Teste a duas distribuições. Amostras independentes. Teste de Smirnov	183
9.3.2	Teste a $k$ distribuições. Amostras independentes. Teste unilateral de Smirnov . . . . .	184
9.4	Testes às variâncias . . . . .	185
9.4.1	Teste à variância $\sigma^2$ . . . . .	185
9.4.2	Teste à razão de duas variâncias . . . . .	186
9.5	Exercícios . . . . .	187
<b>10</b>	<b>Testes de regressão</b>	<b>193</b>
10.1	Regressão linear e simples . . . . .	193
10.2	Regressão linear e múltipla . . . . .	196
10.3	Regressão não-linear . . . . .	198
10.4	Análise dos resíduos . . . . .	199
10.4.1	Tipos de resíduos . . . . .	200
10.4.2	Verificação das condições dos erros . . . . .	203
10.4.3	Modelo mal especificado . . . . .	205
10.5	Exercícios . . . . .	208
<b>11</b>	<b>Testes de independência estocástica</b>	<b>211</b>
11.1	Coeficiente de correlação linear da amostra. Teste de Pearson . . . . .	211
11.2	Teste de Spearman baseado em graduações . . . . .	213
11.3	Exercícios . . . . .	216
<b>A</b>	<b>Tabelas Estatísticas</b>	<b>217</b>
<b>B</b>	<b>Quadrados latinos</b>	<b>291</b>
<b>C</b>	<b>Quadrados greco-latinos</b>	<b>295</b>



# Lista de Figuras

1.1	Roda [12] . . . . .	3
1.2	Tabela das etiquetas [12] . . . . .	8
1.3	Mapa da freguesia do Forno . . . . .	9
1.4	Distribuições amostrais [12] . . . . .	10
1.5	População de supermercados da cidade [12] . . . . .	12
2.1	O planeamento mais simples [12] . . . . .	14
2.2	Planeamento com dois grupos . . . . .	15
2.3	P.c.a. com 4 grupos . . . . .	16
3.1	Tabela de frequências [12] . . . . .	24
3.2	Tabela de dados bivariados [12] . . . . .	25
3.3	Gráfico de linhas [12] . . . . .	26
3.4	Gráfico de barras [12] . . . . .	27
3.5	Gráficos de barras com figuras [12] . . . . .	27
3.6	Gráfico de pontos . . . . .	28
3.7	Histograma [12] . . . . .	29
3.8	Distribuição amostral [12] . . . . .	30
4.1	Valor central das alturas [12] . . . . .	39
4.2	Distribuições não simétricas e simétricas [2] . . . . .	40
4.3	Distribuição normal [12] . . . . .	42
4.4	Diferentes associações entre variáveis [12] . . . . .	45
4.5	Casos com diferentes coeficientes de determinação [12] . . . . .	46
4.6	Factores que originam associação entre duas variáveis A e B [12] . . . . .	47
4.7	Regressão . . . . .	48
5.1	Probabilidades [5] . . . . .	61
5.2	Gráfico da função das probabilidades [5] . . . . .	61
5.3	Gráfico das probabilidades acumuladas [5] . . . . .	62
5.4	Exemplo de função de distribuição acumulada . . . . .	63
5.5	Histograma de uma distribuição de Bernoulli [5] . . . . .	70
5.6	Distribuição das probabilidades binomiais e probabilidades acumuladas [5] . . . . .	72
5.7	Histograma de uma distribuição binomial [5] . . . . .	72

5.8	Histograma da distribuição de Poisson com $\lambda = 2.8$ [5]	74
5.9	Distribuição uniforme com $a = 1$ e $b = 5$	76
5.10	Distribuição exponencial com $\beta = 1$	77
5.11	Distribuições gama com $\beta = 1$ e $\alpha = 1, 2.5, 5$ , e $10$	78
5.12	Distribuição normal	79
5.13	Aproximação à normal ( $p = \frac{1}{2}$ ) [8]	81
5.14	Distribuição normal bivariada	82
5.15	Distribuições Qui-quadrado com $r = 2, 5$ e $10$	84
5.16	Distribuições t-student com $r = 2, 5$ e $10$	86
5.17	Distribuição F com $r_1 = 10$ e $r_2 = 5$	87
6.1	Estimador $T$ tendencioso	95
6.2	Estimadores $T$ e $T'$ para o parâmetro $\phi$	96
6.3	Distribuição do estimador $\bar{X}$	98
7.1	Pontos críticos da distribuição da 'estatística' Z. Região de rejeição do teste.	115
7.2	Efeitos entre níveis de factores (a) sem interacção; (b) com interacção	134
9.1	A função $F^*(x)$ da hipótese nula	178
9.2	As duas distribuições $S(x)$ e $F^*(x)$ e a 'estatística' $T$	179
10.1	Intervalo de valores usados na experiência. Perigos da extrapolação.	196

# Lista de Tabelas

A.1	Números aleatórios . . . . .	217
A.2	Coeficientes da Binomial . . . . .	220
A.3	Distribuição Binomial . . . . .	221
A.4	Distribuição de Poisson . . . . .	232
A.5	Valores de $e^x$ e de $e^{-x}$ . . . . .	241
A.6	Normal padronizada . . . . .	243
A.7	Valores Críticos da distribuição $\chi^2$ . . . . .	245
A.8	Valores Críticos da distribuição t-student . . . . .	246
A.9	Valores Críticos da distribuição F-Fisher . . . . .	247
A.10	Estatística do teste de Kruskal-Wallis para pequenas amostras . . . . .	267
A.11	Estatística do teste de Kolmogorov . . . . .	268
A.12	Estatística do teste de Lilliefors (normal) . . . . .	270
A.13	Estatística do teste de Lilliefors (Exponencial) . . . . .	271
A.14	Estatística do teste de Smirnov para duas amostras de tamanhos iguais a $n$ . . . . .	272
A.15	Estatística do teste de Smirnov para amostras de tamanhos diferentes . . . . .	274
A.16	Estatística do teste de Smirnov para k-amostras . . . . .	276
A.17	Estatística do teste de Spearman . . . . .	285
A.18	Limite inferior crítico no teste dos 'Runs' ( $\alpha = 0.5$ ) . . . . .	286
A.19	Limite superior crítico no teste dos 'Runs' ( $\alpha = 0.5$ ) . . . . .	287
A.20	Valores Críticos da estatística de Durbin-Watson ( $\alpha = 0.05$ ) . . . . .	288



# Prefácio

Este texto serve de apoio às aulas teóricas e teórico-práticas de uma disciplina anual de Estatística que inclua a *Estatística Descritiva* e a *Estatística Inferencial*.

Os dois primeiros capítulos contêm introduções à teoria da amostragem e do planejamento de experiências. A organização dos dados e a sua descrição gráfica surgem no Capítulo 3. O cálculo de certas medidas centrais, de dispersão e de associação que descrevem algumas propriedades de certas distribuições encontra-se no Capítulo 4 sobre a Estatística Descritiva. No Capítulo 5 faz-se uma introdução à teoria das probabilidades e são descritos vários modelos probabilísticos.

Com o Capítulo 6 inicia-se a Estatística Inferencial com a estimação pontual e por intervalos de confiança de parâmetros das distribuições. O Capítulo 7 começa com uma introdução aos testes de hipóteses e descreve vários testes às médias das distribuições, quer paramétricos quer não paramétricos. No Capítulo 8 apresenta-se um conjunto de testes às proporções e no Capítulo 9 são introduzidos os testes de ajuste de distribuições probabilísticas. Os testes de regressão, a análise dos resíduos e os testes de dependência linear encontram-se nos dois últimos capítulos.

No fim de cada capítulo são incluídos enunciados de um conjunto de problemas sobre a respectiva matéria. O Apêndice A contém um conjunto de 20 tabelas, das quais 17 correspondem a tabelas de distribuições probabilísticas.



# Capítulo 1

## Teoria da amostragem

### 1.1 Introdução

A **estatística** tem como objectivo fornecer informação (conhecimento) utilizando quantidades numéricas. Seguindo este raciocínio, a estatística divide o estudo e a análise dos dados (factos numéricos) em três fases:

1. Obtenção dos dados
2. Descrição, classificação e apresentação dos dados
3. Conclusões a tirar dos dados.

A 2<sup>a</sup>. fase é normalmente conhecida por **Estatística Descritiva** e a 3<sup>a</sup>. por **Estatística Inferencial**. A 3<sup>a</sup>. fase é das mais importantes uma vez que a obtenção e organização dos dados sugerem conclusões. Nem só nas áreas das Ciências Exactas, nomeadamente na Matemática, e da Engenharia tem a Estatística as suas aplicações. Economistas, psicólogos, sociólogos e educadores consideram, já, hoje em dia, a estatística como uma ferramenta básica no seu trabalho diário. Nem mesmos os historiadores podem ignorar os métodos estatísticos.

### 1.2 Amostragem

*"Para se saber se o bolo de chocolate está bom, basta comer uma fatia"*

Esta é a ideia essencial da amostragem: **obter informação sobre o todo, examinando apenas uma parte**. Os termos básicos usados em amostragem são:

- **População** - o grupo inteiro de objectos (unidades) dos quais se pretende obter informações. A população deve ser definida claramente e em termos daquilo que se pretende conhecer.
- **Unidade** - qualquer elemento individual da população.

- **Amostra** - uma parte ou subconjunto da população usada para obter informação acerca do todo.
- **Variável** - uma característica de uma unidade que será medida a partir daquela unidade da amostra.

Exemplos da utilização da amostragem:

**Exemplo 1.2.1** *Sondagens à opinião pública que servem para conhecer a opinião da população sobre variadas questões. As mais populares são as sondagens políticas.*

**Exemplo 1.2.2** *Inspecção de mercado utilizada com o intuito de descobrir as preferências das pessoas em relação a certos produtos. Um dos exemplos mais conhecidos da aplicação desta amostragem é a lista de audiências dos programas de televisão.*

**Exemplo 1.2.3** *Censo (recenseamento da população) que tem como objectivo obter informação relativa ao número de ocupantes, idade, sexo, parentesco entre eles, etc. de cada habitação do país (concelho ou freguesia).*

**Exemplo 1.2.4** *Amostragem de aceitação que consiste na selecção e inspecção cuidada de uma amostra retirada de uma encomenda enviada pelo fornecedor. Baseado no 'estado' da amostra, toma-se a decisão de aceitar ou rejeitar a encomenda.*

Um censo é uma amostra que consiste na população inteira.

*"Se nos interessa obter informação relativa à população, porque não considerar um censo?"*

Se a população é grande, torna-se excessivamente caro e perde-se muito tempo a fazer um censo.

Existem, ainda, outras razões que nos levam a preferir uma amostra a um censo. Nalguns casos, as unidades que constituem a amostra para inspecção, são destruídas. Noutros casos, pela escassez de pessoas treinadas (sem formação específica) para levar a cabo um censo, é mais seguro confiar num número reduzido de informação. Haveria uma menor ocorrência de erros humanos.

Parece, assim, ser mais vantajoso retirar amostras e basear a análise nessas amostras. Este processo parece ser simples, no entanto, pode levar a enganos. A selecção das unidades da população que são mais facilmente acessíveis, origina uma **amostra conveniente**. Este tipo de amostra não é representativa da população e pode levar a conclusões erradas sobre a população.

### 1.3 Amostra aleatória simples

Uma alternativa à amostra conveniente, que é muitas vezes tendenciosa, é a **amostra aleatória simples**. A ideia principal consiste em dar a cada unidade da população a



*mesma oportunidade* de ser escolhida para fazer parte da amostra. Para abreviar usaremos, daqui para a frente, a.a.s. para designar amostra aleatória simples. Uma a.a.s. é obtida através de um método que dá a qualquer possível amostra de tamanho  $n$  (com  $n$  elementos) a mesma oportunidade de ser a amostra escolhida. Dos métodos existentes, os mais usados e simples para a obtenção de uma a.a.s. consistem em:

- *Método 1.*

Usar uma roda semelhante à figura 1.1, que se segue,

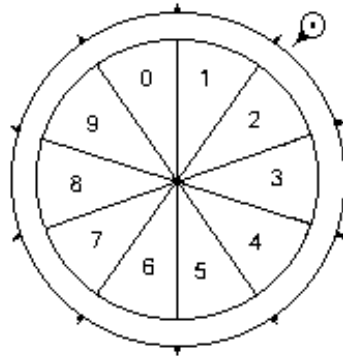


Figura 1.1: Roda [12]

A roda deve ser desenhada numa superfície lisa e deve rodar em torno do centro. A circunferência deve ser dividida em 10 sectores iguais e numerados com: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Fixa-se um ponteiro, como o que está representado na figura. De cada vez que a roda girar, ela parará e o ponteiro indicará um sector, por exemplo o 2. Cada sector (número) tem a mesma oportunidade de sair e, como a roda não tem memória, o resultado obtido de cada vez que a roda gira não vai afectar as tentativas seguintes. Podemos construir, assim, uma tabela de dígitos aleatórios.

- *Método 2.*

Usar uma tabela de números aleatórios (já existente), como a que está representada na Tabela A.1 do Apêndice.

A tabela apresenta agrupamentos de 5 dígitos e tem as linhas numeradas, com o objectivo de facilitar a sua consulta. A tabela satisfaz as seguintes propriedades:

1. Qualquer par de dígitos na tabela tem a mesma oportunidade de ser (qualquer) um dos 100 possíveis pares 00, 01, 02, 03, ..., 97, 98, 99.
2. Qualquer trio de dígitos na tabela tem a mesma oportunidade de ser um dos 1000 possíveis trios 000, 001, 002, 003, ..., 997, 998, 999.

3. E assim por adiante, para grupos de 4 ou mais dígitos da tabela.

**Exemplo 1.3.1** *Se precisarmos de uma a.a.s. de tamanho 5, de um lote de 100 iogurtes para verificarmos contaminações bacterianas, devemos*

1. numerar os 100 iogurtes de 00, 01, 02, ..., 99;
2. ler na tabela, a partir de um sítio qualquer e de seguida (por exemplo, da linha 111 temos 81486 69487 60513 09297 ...)
3. registar os 5 grupos de dois dígitos que tenham correspondência com os números da população: 81, 48, 66, 94 e 87.

*Estes são os iogurtes (numerados) seleccionados para a amostra. Se aparecerem grupos (neste caso, de dois dígitos) repetidos, devemos ignorá-los.*

**Exemplo 1.3.2** *Pretendemos uma amostra de tamanho 5 de um grupo de 300 unidades. Para numerar as unidades da população use 000, 001, 002, ... , 297, 298, 299. Ao ler na tabela, por exemplo, a partir da linha 116, grupos de 3 dígitos, temos 144 592 605 631 424 803 716 510 362 253 504 906 118 138 167 985 ... Somente os 1º, 10º, 13º, 14º, 15º, ... devem ser usados. Os outros números devem ser ignorados, pois não têm correspondência na população.*

## 1.4 Distribuição amostral

Quando examinamos uma amostra para tirar conclusões sobre as características da população, normalmente estas dizem respeito às *características numéricas* dessa população. Como exemplos temos: a percentagem de trabalhadores de uma cidade que usa transportes públicos para se deslocar de casa para o emprego; o tempo médio de vida das lâmpadas GE de 40 watts, etc.

Um **parâmetro** é uma característica numérica da população. É um número *fixo*, mas em geral não conhecemos o seu valor.

Uma '**estatística**' é uma característica numérica da amostra. O valor de uma 'estatística' passa a ser conhecido logo que a amostra é efectivamente retirada da população. No entanto, esse valor vai variar de amostra para amostra. A isto se chama **variação amostral**.

Se chamarmos às variáveis  $X_1, X_2, X_3, X_4, \dots, X_{n-1}, X_n$  os elementos da amostra de tamanho  $n$ , então uma 'estatística' é também uma variável aleatória e é uma função  $f$  dos elementos da amostra:  $f(X_1, X_2, \dots, X_n)$ . Esta 'estatística' é usada para *estimar* o valor do parâmetro da população que é desconhecido.

Uma 'estatística' de uma a.a.s. pode tomar um padrão (conjunto) de valores previsíveis em repetidas amostragens. A este padrão chama-se **distribuição amostral** da 'estatística'.

Conhecida a distribuição amostral é possível saber-se o erro (um limite superior) da 'estatística' em relação ao valor do parâmetro da população.

Esta distribuição descreve também a *tendência* e a *precisão* da 'estatística'. A **precisão** de uma 'estatística' de uma a.a.s. depende do tamanho da amostra e pode ser melhorada aumentando o tamanho da amostra.

## 1.5 Erros no processo de amostragem

Podem surgir dificuldades no processo de amostragem. Dois tipos de erros podem ocorrer:

1. *Erros de amostragem aleatórios* que aparecem no processo de amostragem. Dão origem a resultados diferentes dos que obteríamos se tivéssemos usado um censo. São devidos à aleatoriedade da repetição de uma experiência e são fáceis de ultrapassar, bastando para isso repetir várias vezes a experiência para obter outras amostras.
2. Os *erros de amostragem não aleatórios* não estão relacionados com a selecção da amostra. Muitas vezes são devidos à complexidade do comportamento humano.

São exemplos típicos destes erros, que surgem em inquéritos:

- a falta de dados, que pode aparecer quando não é possível contactar um sujeito (que tenha sido seleccionado para a amostra) ou o sujeito se recusa a responder ao questionário;
- erros nas respostas, quando o sujeito pode deliberadamente mentir ao responder às questões colocadas, ou pode não ter entendido a questão;
- erros no processamento de dados, que ocorrem no processo mecânico do cálculo de quantidades numéricas e no processo de introdução de dados para um ficheiro;
- efeitos do método usado para a obtenção dos dados, que têm a ver com os inquiridores, com a altura em que é realizado o inquérito, com a linguagem utilizada nas perguntas e com o meio utilizado (correios, telefones ou contactos directos).

O contacto directo com o inquirido é o meio mais caro, mas com inquiridores treinados, este método introduz menos tendências do que qualquer dos outros métodos (meios) de obtenção de dados.

## 1.6 Outros tipos de amostragem

Pelo que foi dito, um inquérito aleatório à opinião pública (digno) de confiança vai depender do uso, não só das ideias estatísticas (amostragem aleatória), mas também de práticas experientes (linguagem utilizada nas questões, inquiridores treinados).

Quando o nosso objectivo é retirar uma amostra de uma grande população de sujeitos, usar uma a.a.s. é aconselhável em termos estatísticos, mas, por vezes, não é nada prático.

Assim, em sondagens de opinião pública e em inspecções de mercado, a nível nacional, é costume utilizar um **planeamento amostral com diversas fases** e que consiste em:

- seleccionar uma a.a.s. de distritos do país,
- seleccionar uma a.a.s. de concelhos, nos distritos seleccionados na fase anterior,
- seleccionar uma a.a.s. de freguesias, existentes nos concelhos seleccionados na fase anterior,
- seleccionar uma a.a.s. de pequenos lugares (na área urbana são bairros ou grupos de casas), nas freguesias já seleccionadas, usando mapas ou fotografias aéreas,
- seleccionar uma a.a.s. de residentes, dos lugares seleccionados.
- finalmente, de cada residência seleccionar um adulto para a entrevista.

Este tipo de amostragem tem a vantagem de não precisar de uma lista de *todos* os residentes do país, mas apenas dos residentes dos lugares entretanto seleccionados na fase respectiva. Assim, todos os residentes que fazem parte da amostra estão *agrupados* por pequenos lugares, tornando o processo de obtenção de dados mais económico e rápido.

Outra técnica de amostragem muito usada é a **amostragem estratificada**. Para obter uma amostra aleatória *estratificada* dividem-se as unidades, donde se vai retirar a amostra, por grupos, conhecidos por estratos. Estas camadas ou grupos são escolhidos pelo interesse especial que temos nesses grupos ou pelo facto de que dentro de cada grupo as unidades são muito semelhantes.

Finalmente retira-se uma a.a.s. de cada camada e combinam-se todas as amostras para construir a amostra aleatória estratificada.

Neste tipo de amostra, as unidades da população não têm todas a mesma oportunidade de serem escolhidas. Alguns estratos da população aparecem na amostra deliberadamente representados por excesso. Uma das vantagens deste tipo de amostragem está relacionada com a possibilidade de se obter informação acerca de cada estrato individualmente.

A análise a efectuar dos dados vai depender do tipo de amostragem usada. As técnicas estatísticas para uma análise correcta dos dados, variam de acordo com a amostragem.

Para planear uma amostra, com o objectivo de realizar um inquérito/estudo, devemos passar pelas seguintes etapas:

1. Definição da população (em extensão e unidades).
2. Especificação das variáveis a medir (preparar o questionário).
3. Planeamento estatístico da amostra (tamanho e tipo de amostragem).
4. Reconhecimento de certos detalhes (treino dos inquiridores, escolha da altura adequada).

## 1.7 Exercícios

1. Considere as quatro situações seguintes:

- i) Um semanário regional está interessado em conhecer as reacções da população do distrito de Terra Preta em relação à política a implementar, pelo governo, na agricultura, durante o ano de 1991. Um dos seus jornalistas entrevistou as primeiras 50 pessoas que se dispuseram a dar a sua opinião. O título da reportagem, que saiu no jornal, foi "Distrito de Terra Preta desencantado com o governo", e mais adiante o jornalista dizia que se houvesse eleições naquele momento o governo diminuiria o número de candidatos eleitos pelo distrito.
  - ii) Um deputado está interessado em saber se os seus eleitores estão de acordo com uma lei para o controlo de portes de armas. Os seus colaboradores registaram ter recebido 361 cartas de eleitores, sobre a questão referida, das quais 283 opunham-se à lei.
  - iii) Uma fábrica de farinhas, da região do Minho, quer saber que percentagem das donas de casa do concelho de Braga faz todo ou parte do pão que consome, em casa. Foi conseguida uma amostra de 500 endereços e foram enviados entrevistadores a essas casas. Estes entrevistadores trabalham durante os dias úteis da semana e durante o horário normal de trabalho.
  - iv) O departamento da polícia da cidade de Vila dos Mouros, do concelho de Pó-Alto pretende saber o que pensam os seus residentes de raça cigana em relação aos serviços prestados pela polícia. Para tal, preparou um questionário com várias perguntas, escolheu uma amostra de 300 endereços, numa área predominantemente habitada por ciganos e enviou agentes policiais a cada um dos endereços para fazer a entrevista a um adulto da habitação.
- (a) Identifique a população (qual a unidade básica e que unidades compõem a população), as variáveis medidas (qual a informação que se pretende) e a amostra. Se a situação não é descrita com detalhe suficiente a fim de identificar a população, deve completar a descrição da população de uma maneira adequada (da sua descrição deve ser possível dizer sem ambiguidades se uma unidade pertence ou não à população).
  - (b) Estas situações (de amostras) apresentam algumas fontes de tendência. Para cada caso, discuta as razões que o levam a pensar em tendência, bem como a direcção dessa tendência (de que maneira irão as conclusões tiradas da amostra ser diferentes das realidades da população).
2. Use a tabela A.1 do Apêndice, de números aleatórios, para construir uma a.a.s. de tamanho 3, a retirar destes 25 voluntários para um teste de teclados ergonómicos para máquinas de escrever e/ou computadores. Descreva como vai usar a tabela e como iniciou a sua consulta.

Asdrubal António Armando Artur Beatriz Carla Carlos Clara Fernando Filipa Francisco Garcia Geraldina Helder Helena Inês Joana Jorge José Leonor Luis Marcos Marta Rui Sandra.

3. Uma empresa que comercializa cogumelos em lata tem 50 caixotes grandes com latas de cogumelos para despachar. Cada um dos caixotes tem uma etiqueta com um número de despacho, como mostra a figura 1.2:

A1109	A2056	A2219	A2381	B0001
A1123	A2083	A2336	A2382	B0012
A1186	A2084	A2337	A2383	B0046
A1197	A2100	A2338	A2384	B0123
A1198	A2108	A2339	A2385	B0124
A2016	A2113	A2340	A2390	B0125
A2017	A2119	A2351	A2396	B0138
A2020	A2124	A2352	A2410	B0139
A2029	A2125	A2367	A2411	B0145
A2032	A2130	A2372	A2500	B0151

Figura 1.2: Tabela das etiquetas [12]

É necessário retirar uma a.a.s. para inspecção do produto. Usando a tabela A.1 e iniciando a sua consulta pela linha 139, diga com que elementos (caixotes) construiu a a.a.s.

4. A figura 1.3 representa um mapa da freguesia do Forno da cidade de Âncora. Use a tabela A.1 e iniciando a consulta na linha 125, seleccione uma a.a.s. de 5 blocos habitacionais desta freguesia. Note que cada bloco tem um número de identificação no mapa.
5. Os números sublinhados, nas três situações descritas em baixo, representam o valor de um parâmetro ou de uma 'estatística'. Para cada situação, diga qual é o caso:
- A Comissão das estatísticas do trabalho do Ministério do Trabalho anunciou que, no mês passado, entrevistou uma amostra de 50000 membros de um sindicato de trabalhadores, dos quais 6.5 por cento estavam desempregados.
  - Um carregamento é composto de bolas de berlinde com diâmetros, em média, da ordem dos 2.503 cm. Este valor está dentro das especificações para que o lote seja aceite pelo comprador. O processo de amostragem para decidir sobre a aceitação inspeccionou 100 bolas de berlinde de um lote com diâmetros, em média, da ordem dos 2.515 cm. Como este valor está fora dos limites especificados para a aceitação do produto, o lote inteiro vai ser (erradamente) rejeitado.

510	511			104	103	102	101
	509			105	106	107	108
507	508			111	110	109	
506	505			112	113	114	115
503	504			204	203	202	201
502	501			205	206	207	208
415	416			212	211	210	209
414	413			213	214	215	216
411	412			220	219	218	217
410	409			301	302	303	304
405	406	407	408	307	306	310	305
404	403	402	401	308	309		311
				315	314	313	312

Figura 1.3: Mapa da freguesia do Forno

- Na cidade de Portela existe uma agência de vendas pelo telefone, que faz ligações telefónicas para números de telefones de residências daquela cidade usando um esquema de selecção aleatório. Dos primeiros 100 números discados, verificou-se posteriormente que 23 não faziam parte da lista telefónica oficial. Isto não é tão surpreendente como parece, uma vez que 38 por cento dos telefones da cidade de Portela não se encontram na lista.
6. A figura 1.4 apresenta quatro distribuições amostrais de uma 'estatística' que poderia ser usada para estimar o parâmetro da distribuição, também representado nos gráficos. Identifique as distribuições, quanto à tendência (forte ou fraca) e precisão (grande ou pequena). Justifique.

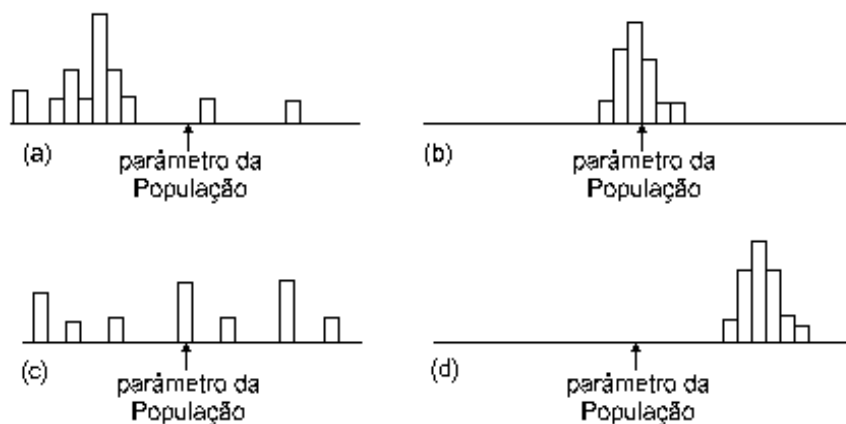


Figura 1.4: Distribuições amostrais [12]

7. Já vimos como a técnica para a obtenção de dados pode influenciar a precisão dos resultados obtidos da amostra. Os métodos descritos em i), ii), iii) e iv) foram usados na obtenção de informação (dados) relativa às audiências televisivas, a partir de uma amostra de residentes da cidade do Pico:
- no método de registo diário*, é pedido ao residente que anote diariamente todos os programas que viu e quem os viu, durante uma semana, e envie posteriormente pelo correio essas anotações (semanalmente);
  - no método de recordação*, um entrevistador mostra ao sujeito uma lista dos programas da semana anterior e pergunta quais os programas que foram vistos;
  - no método do telefonema imediato*, o residente recebe chamadas, em alturas determinadas, e é-lhe perguntado se a televisão está ligada, a que programa está a assistir e quem o está a ver;



- iv) *no método do registo automático*, é ligado um aparelho ao televisor que regista a hora e o canal sempre que a televisão está ligada. Ao fim de uma semana retira-se o registo do aparelho.

Para cada método assinale as vantagens e inconvenientes, especialmente no que diz respeito a possíveis erros.

O método 7 é o mais comum. Concorde com a escolha? Justifique (não discuta o problema da escolha da amostra, mas somente a questão de obtenção dos dados, depois de seleccionada a amostra).

8. Pretende-se saber o que pensam os alunos do 12<sup>o</sup> ano em relação ao acesso dos estudantes à Universidade. Selecciona-se uma a.a.s. de 800 estudantes;

- (a) Especifique a população?
- (b) Como vai obter um conjunto de possíveis elementos para integrar a amostra?
- (c) Como pensa contactar os sujeitos?
- (d) Qual a questão específica ou questões que pretende colocar?

9. Uma Universidade emprega 2000 membros do sexo masculino e 500 do sexo feminino. A lei da igualdade das oportunidades de emprego, sugere a criação de uma amostra aleatória estratificada de 200 elementos do sexo masculino e outros 200 do sexo feminino.

- (a) Qual é a oportunidade de um membro do sexo feminino ser escolhido para integrar a amostra?
- (b) Qual é a oportunidade de um membro do sexo masculino ser escolhido?
- (c) A cada elemento da amostra é colocada a questão: - " Na sua opinião, os membros do sexo feminino desta universidade são, em geral, mais mal pagos do que os do sexo masculino, quando desempenham as mesmas funções e têm as mesmas qualificações?"

180 das 200 senhoras (90 por cento) responderam que "sim"

60 dos 200 homens (30 por cento) responderam que "sim"

Daqui se conclui que 240 elementos da amostra de 400 sujeitos (60 por cento) responderam que "sim" e o coordenador deste estudo registou o seguinte: " ... baseado numa amostra, podemos concluir que 60 por cento dos membros de toda a Universidade pensam que as senhoras recebem vencimentos mais baixos do que os homens."

Explique porque razão esta conclusão está errada. Qual deveria ser essa percentagem?

10. Uma cidade tem 33 supermercados. Um inspector sanitário pretende verificar se as condições de armazenamento da carne, nos supermercados, estão de acordo com a nova lei. Devido ao tempo que dispõe, só pode inspeccionar 10 supermercados. Decidiu, então, escolher uma amostra estratificada aleatória e dividiu os supermercados por estratos de acordo com o volume de vendas. O estrato A contém as 3 maiores lojas; serão todas inspeccionadas. O estrato B integra 10 mercados mais pequenos; decidiu inspeccionar 4. O estrato C contém 20 pequenos supermercados de bairro; escolheu daqui 3.

Suponha que o "s" significa que o mercado está de acordo com a lei, o "n", que não está. A população é a representada na figura 1.5 (desconhecida do inspector, claro!)

Estrato A			Estrato B			Estrato C				
Mercado	1	s	Mercado	1	n	Mercado	1	s	11	s
	2	s		2	s		2	s	12	s
	3	n		3	n		3	n	13	n
				4	n		4	s	14	s
				5	s		5	n	15	s
				6	n		6	n	16	n
				7	s		7	n	17	n
				8	n		8	s	18	n
				9	n		9	n	19	s
				10	s		10	n	20	s

Figura 1.5: População de supermercados da cidade [12]

- Use a Tabela A.1 para seleccionar a tal amostra estratificada de 10 mercados.
- Use os resultados obtidos da amostra para estimar a proporção, de toda a população, que armazena a carne de acordo com a lei.
- Use a descrição da população apresentada na figura 1.5. para determinar a proporção exacta de mercados da cidade, que cumpre a tal lei. Que precisão tem o valor estimado em (b)?

# Capítulo 2

## Experimentação

### 2.1 Introdução

**Experimentação** é uma actividade essencial na nossa caminhada para o progresso. Embora o objectivo da experimentação seja muitas vezes a descoberta de novos princípios científicos ou fenómenos, estabelecendo relações de *causa/efeito* ou desenvolvendo métodos mais aperfeiçoados e processos, uma grande parte da actividade experimental conduzida no domínio das Ciências e na Indústria é dirigida à obtenção de *condições óptimas* para o funcionamento de um processo.

**Óptimo** significa o melhor e é um termo mais forte do que melhorado.

*Experimentação* e *amostra por observação* (ou outras formas de observação) são conceitos diferentes.

Numa experiência, o experimentador *controla* ou manipula o ambiente das unidades. Os investigadores intervêm na experiência, *administrando um tratamento* com o objectivo de estudar os seus efeitos. A vantagem da realização de uma experiência deve-se ao facto de podermos estudar os efeitos de tratamentos específicos que nos interessam.

A intenção dos experimentadores é estudar os efeitos resultantes numa variável, das *alterações introduzidas noutra variável*.

Assim, distinguimos **variáveis resposta** ou **dependentes** (v.d.), das **variáveis independentes** (v.i.) que o experimentador manipula.

Podemos ter várias variáveis de cada tipo.

De uma amostra obtida por observação podemos mostrar que existe uma relação entre duas variáveis (por exemplo: o número de cigarros fumados por dia e número de mortes de cancro no pulmão), mas já não podemos mostrar que uma variável é a *causa* da existência de outra variável (por exemplo: o cigarro é uma das causas de morte de cancro no pulmão).

Há tratamentos que não podem ser impostos, por razões práticas e morais. Nestes casos, onde não é possível realizar uma experiência, podemos tentar estudar o fenómeno causa/efeito a partir de uma amostra obtida por simples observação.

Em princípio, as experiências *podem estabelecer causas*. Se alterarmos o valor de uma v.i., sem alterar as outras condições de realização da experiência, então qualquer variação

resultante da v.d. deve ser causada pela variação da v.i. Na prática, é difícil repetir a experiência sem que as outras condições se alterem.

Os termos mais utilizados em experimentação são:

- **Unidades** - os objectos de base sobre os quais se realiza a experiência. Quando as unidades são pessoas, chamam-se *sujeitos*.
- **Variável** - uma característica mensurável de uma unidade.
- **Variável dependente** - uma variável cuja variação se pretende estudar; uma variável resposta.
- **Variável independente** - uma variável cujo efeito na v.d. se pretende estudar. Numa experiência chama-se **factor**.
- **Tratamento** - qualquer condição experimental específica aplicada às unidades. É, em geral, uma combinação de valores específicos, chamados **níveis**, de cada um dos factores experimentais.

Assim, as experiências permitem estudar os factores que nos interessam, individualmente ou simultaneamente (combinados). A experiência pode mostrar que esses factores causam certos efeitos. Por esta razão, devemos *preferir realizar experiências*, em vez de descrever a população por observação de uma amostra (para obter dados) sempre que o nosso objectivo seja estudar os *efeitos* das variáveis.

## 2.2 O planeamento da experiência

Falaremos, em seguida, de algumas ideias estatísticas do *planeamento de uma experiência*. O **planeamento da experiência é uma regra ou um esboço para a afectação dos tratamentos às unidades**.

O planeamento mais simples consiste em aplicar o tratamento (por vezes a várias unidades) e observar os seus efeitos. Registam-se medidas antes e depois da aplicação do tratamento. O planeamento tem o aspecto da figura 2.1.

Observação 1 → Tratamento → Observação 2

Figura 2.1: O planeamento mais simples [12]

Por vezes, em planeamentos deste tipo, não é possível tirar conclusões válidas, pois os efeitos da v.i. não se conseguem distinguir dos efeitos de outros factores, que não estão em

estudo. As variáveis, que não nos interessa estudar, mas que mesmo assim influenciam a variável dependente são **factores externos**.

Os efeitos de duas variáveis (variáveis independentes ou factores externos) numa variável dependente dizem-se **misturados** se não podem ser distinguidos uns dos outros.

A mistura de diferentes factores (mistura dos seus efeitos) torna obscuro o verdadeiro efeito da v.i. sobre a v.d.

Para evitar a mistura com factores externos devemos realizar **experiências comparativas**. Se pudermos usar dois grupos de unidades, atribuímos o tratamento apenas a um grupo, chamado *grupo experimental*, e ao outro grupo, o *grupo de controlo*, não aplicamos o tratamento. Todas as outras condições de realização da experiência são as mesmas.

Assim, qualquer diferença entre os grupos deve ser devida aos efeitos do tratamento. Qualquer factor externo influencia os *dois* grupos, enquanto que o tratamento só está a influenciar um grupo.

Para que as experiências comparativas sejam eficazes é necessário uma técnica especial de atribuição de unidades aos grupos. Grupos equivalentes, para usar em experiências, podem ser obtidos *afectando aleatoriamente* as unidades aos grupos.

Assim como uma a.a.s. é representativa da população, também uma selecção aleatória de metade das unidades existentes dá origem à criação de dois grupos - os que foram seleccionados e os que ficaram de fora. Este tipo de planeamento tem o aspecto representado na figura 2.2:

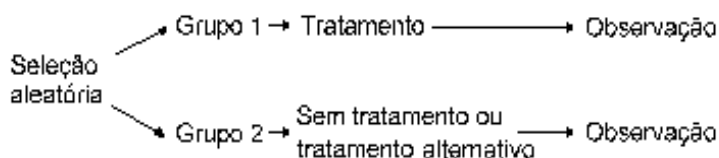


Figura 2.2: Planeamento com dois grupos

O caso mais simples de *aleatoriedade* afecta aleatoriamente unidades experimentais a todos os tratamentos. Estes planeamentos chamam-se **planeamentos completamente aleatórios** (p.c.a.). Eles correspondem às a.a.s. em amostragem. O planeamento da figura 2.2 é um p.c.a. com dois grupos.

Se precisássemos de comparar mais tratamentos, teríamos de dividir as unidades por mais grupos. Não é preciso que cada grupo tenha o mesmo número de unidades.

Um exemplo de um p.c.a. com 4 grupos de unidades para comparar quatro tratamentos, ou três mais um de controlo, está representado na figura 2.3.

Os princípios básicos do planeamento estatístico de experiências são a aleatoriedade e o controlo.

A **aleatoriedade** é a afectação aleatória de unidades experimentais aos tratamentos, atribuindo uma a.a.s. de unidades a cada tratamento.

O **controlo** consiste em reconhecer factores externos no planeamento, usando grupos equivalentes na comparação dos tratamentos.

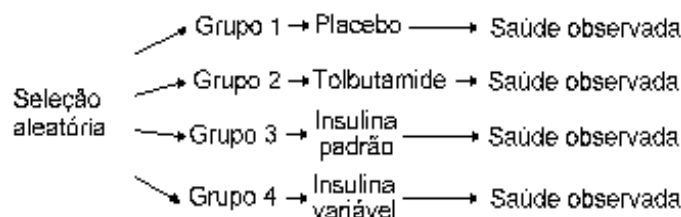


Figura 2.3: P.c.a. com 4 grupos

O p.c.a. usa a aleatoriedade e o controlo, afectando aleatoriamente as unidades aos tratamentos. Neste planeamento os tratamentos são os níveis de um único factor.

## 2.3 Medição de variáveis

Definimos *variável*, na secção 1.2. do Capítulo 1, como sendo uma característica mensurável de uma unidade. As variáveis surgem da medição das propriedades das unidades.

**Medir** uma propriedade significa atribuir quantidades numéricas às unidades, como forma de representar essa *propriedade*.

Nem todas as propriedades podem ser medidas através de números. Por exemplo, as situações de *empregado*, *desempregado* e *indivíduo não activo* correspondem a tentativas de medição da propriedade, situação profissional, classificando-a.

Assim, é possível falar de *classificação* e *divisão por categorias* de variáveis, separadamente da medição. A classificação de pessoas, por exemplo, por sexo, raça, ou situação profissional, não dá origem a números. No entanto, podemos continuar a usar o termo medição, atribuindo números às classes. Isto é, atribuímos o valor 0 à classe dos indivíduos não activos, o valor 1 à classe dos desempregados e o valor 2 à classe dos empregados.

Uma **variável** é uma medida *válida* de uma propriedade quer ela seja relevante ou apropriada à representação daquela propriedade.

A estatística só trata de propriedades mensuráveis. Por exemplo, a inteligência e a maturidade não podem ser estudadas estatisticamente, no entanto, variáveis como o CI (coeficiente de inteligência - mede apenas uma combinação de habilidade inata, conhecimento apreendido e abertura à cultura dominante) já podem ser tratadas.

### 2.3.1 Precisão das medições

Nem mesmo as medições laboratoriais mais exactas são perfeitamente precisas. Muitos cientistas usam a estatística para analisar os erros das suas medições.

A precisão das medições pode ser vista sob dois aspectos: falta de tendência e de confiança.

Um processo de medição é **não tendencioso** se não atribui sistematicamente um valor por excesso ou por defeito, em relação ao valor exacto da variável.

Um processo de medição é de **confiança** se medições repetidas da mesma unidade dão os mesmos (ou quase os mesmos) resultados.

Os resultados de medições repetidas são *aleatórios*, no sentido de que os resultados de repetidas amostragens são aleatórios. Isto é, resultados individuais variam, mas existe uma *distribuição* de resultados. A média de várias medições varia menos (de maior confiança) do que uma única medição, tal como uma 'estatística' da amostra torna-se mais precisa quando a amostra é grande.

### 2.3.2 Escalas de medição

A medição de uma propriedade significa atribuir uma quantidade numérica para a representar. Tendo planeado o processo de obtenção dos dados e as medições que devem ser feitas em relação às unidades, a etapa seguinte consiste em organizar um resumo desses dados.

Mas antes disto, é preciso saber que tipo de informação está adjacente aos números. Falar do tipo de informação adjacente às medições, é equivalente a reconhecer o tipo de escala que foi usada nas medições.

A medida de uma propriedade está numa escala **nominal** se a medição apenas define a que classe a unidade pertence, em relação àquela propriedade.

A medida está numa escala **ordinal** se também esclarece quando uma unidade tem *mais* da propriedade do que outra unidade.

A medida está numa escala **intervalar** se também diz que uma unidade é *diferente por uma certa quantidade* da propriedade, de outra unidade.

A medida está numa escala **proporcional** se diz que uma unidade tem *tantas vezes mais* da propriedade do que outra unidade.

As medições feitas numa *escala nominal* colocam as unidades em categorias. São exemplos, as propriedades raça, sexo, situação profissional. Podemos atribuir um código a cada categoria: feminino-0, masculino-1 ou feminino-1, masculino-0; o valor em si não é importante.

Numa *escala ordinal* a ordem dos números atribuídos às categorias tem significado. Se um conjunto de candidatos recebe de um Comité uma pontuação de 1 (mais fraca) a 10 (mais forte), então o candidato com pontuação 8 é melhor do que o candidato com pontuação 6 (não é só diferente). O valor dos números não tem significado, por exemplo, a pontuação 8 não é duas vezes melhor do que a 4.

Com as *escalas intervalar e proporcional* atingimos o tipo de medidas que nos é mais familiar.

Há medições feitas numa escala de unidades iguais, como por exemplo: a altura em *cm.*, o tempo de reacção em *seg.*, ou a temperatura em  $^{\circ}C$ . Um comprimento de 4cm é duas vezes maior do que um de 2cm. A escala é proporcional e o 0 tem o seu significado.

A temperatura em  $^{\circ}C$  corresponde a uma escala intervalar. Uma temperatura de  $40^{\circ}C$  não é duas vezes mais quente do que uma de  $20^{\circ}C$ .

A escala para uma medição depende essencialmente do método de medição e não da propriedade a medir. Por exemplo, o peso, em gramas, de uma caixa de ovos usa uma escala intervalar/proporcional. No entanto, se as caixas são etiquetadas de acordo com o tamanho dos ovos: pequenos, médios, grandes, e muito grandes, então o peso é medido numa escala ordinal.



## 2.4 Exercícios

1. Pretende-se estudar os efeitos resultantes da vida das famílias pobres em urbanizações de habitação social, na estabilidade familiar. Obteve-se a lista dos candidatos aceites à habitação social, bem como uma outra lista de candidatos, que tendo entregue as candidaturas foram rejeitados pelas autoridades. Retirou-se uma a.a.s. de cada uma das listas e observaram-se os dois grupos de pessoas por um período de vários anos.
  - (a) Acha que se realizou uma experiência? Justifique.
  - (b) Quais são as variáveis independente e dependente?
  - (c) Acha que este estudo contém misturas de factores que o impedem de tirar conclusões válidas sobre os efeitos da vida em urbanizações de habitação social? Explique.
2. Nas situações descritas a seguir aparecem misturas. Explique sucintamente quais as variáveis que se misturam e porque razão as conclusões tiradas sobre os efeitos da variável independente na v.d. não são válidas:
  - (a) No ano passado, apenas 10 por cento de um grupo de adultos do sexo masculino não apanharam gripe durante o inverno. Este ano, todos os homens do grupo tomaram diariamente uma grama de vitamina C, e 20 por cento deles não apanharam gripe.

Isto mostra que a vitamina C evita a gripe.
  - (b) Suspeitou-se que uma dose diária de vitaminas melhora o estado de saúde de pacientes internados em casas de saúde. Os doentes de uma dessas casas foram divididos em dois grupos. A um dos grupos foi dado, todos os dias, uma dose de vitaminas, enquanto que o outro grupo não recebeu qualquer tratamento.

Passados seis meses, verificou-se que o primeiro grupo tinha tido menor número de dias com pacientes doentes do que o segundo grupo.
  - (c) Um educador pretende comparar a eficácia de uma 'máquina - equipamento informático - de leitura' quando comparada com o método normal de ensino de leitura. Para testar a aptidão na leitura de uma classe de alunos do 4º ano de escolaridade, o educador dividiu os alunos em dois grupos. Pediu a um dos professores, voluntários para o uso da 'máquina', que ensinasse a um dos grupos de alunos. O outro grupo de controlo foi ensinado por um professor, que não se tinha voluntariado, pelo método normal.

No final do ano lectivo, o grupo que utilizou a 'máquina' obteve um aumento nas classificações obtidas na leitura superior ao aumento do outro grupo que não utilizou a 'máquina'.
3. Em 1976 a Pepsi-Cola abriu uma campanha publicitária na televisão, que conduziu a uma experiência. Aos consumidores regulares de Coca-Cola foram dados dois copos, um de Coca-Cola, marcado apenas com um Q, e um de Pepsi, também apenas

marcado com um M. Mais de metade das pessoas envolvidas na experiência disseram que a marca M sabia melhor.

A Coca-Cola disse que a experiência não era válida devido às misturas de factores, da marca Coca-Cola com outras variáveis externas.

Consegue descobrir onde está a mistura?

4. Foi descoberta uma vacina contra um vírus perigoso. O cientista tem consigo dez ratinhos (chamados Alfi, Berni, Chuchu, David, Frati, Jó, Lili, Mémé, Poli, Záti) para a realização de uma experiência.

Faça o planeamento da experiência que tem como objectivo comparar a eficácia da vacina. Use a linha 140 da Tabela A.1 para fazer a atribuição aleatória de unidades.

5. Realizar apenas comparações não faz de um estudo uma experiência. Os exemplos seguintes são estudos baseados em observações, ou são experiências?

Descreva claramente a diferença entre um estudo comparativo baseado em observações e uma experiência comparativa? Quais as vantagens que a experiência tem sobre o estudo?

- (a) Um professor de latim de uma escola secundária pretende mostrar os efeitos benéficos do estudo de latim nas aulas da disciplina de Português. Para tal, obteve, dos livros de termos, as classificações, de todos os alunos do 9º ano, obtidas num exame de Português. A média das classificações dos alunos que tinham tido latim era mais alta do que a dos outros alunos que nunca tinham tido latim. O professor concluiu que - " O estudo de latim melhora o domínio da língua portuguesa".

São os alunos que escolhem o latim, como opção.

- (b) Um artigo de uma revista de mulheres dizia que as mães que amamentam os seus filhos são mais carinhosas e apresentam maior receptividade para as crianças, do que as mães que alimentam os filhos com biberão. O autor do artigo dizia que amamentar tem efeitos desejáveis nas atitudes da mãe em relação à criança. Mas, são as mulheres que escolhem amamentar ou alimentar com biberão, e é bem possível que as mães que escolhem amamentar as crianças, já por si sejam mais receptivas.

6. Uma empresa que confecciona comida está a preparar uma nova massa de bolo de chocolate. É muito importante que o sabor do bolo não sofra variações devido a pequenas alterações no tempo de cozedura e na temperatura. A empresa pensou planejar uma experiência em que iria testar as temperaturas  $300^{\circ}\text{C}$ ,  $320^{\circ}\text{C}$  e  $340^{\circ}\text{C}$  e os tempos: 1 hora e 1 hora e 15 minutos.

Ajude no planeamento desta experiência, considerando cinco unidades em cada grupo. Quantos tratamentos definiu e quantas unidades irá precisar? Com a Tabela A.1, use a aleatoriedade necessária ao planeamento.

7. Desde 1974, que os carros vêm equipados com transformadores catalíticos com o objectivo de reduzir emissões prejudiciais à saúde. A empresa Cero produz cerâmicas usadas na construção desses transformadores. A cerâmica deve ser cozida até atingir uma certa dureza. A empresa teve de decidir qual das temperaturas era melhor:  $500^{\circ}F$ ,  $750^{\circ}F$  e  $1000^{\circ}F$ . Também verificou que o sítio onde era colocada a peça tinha efeitos na qualidade do produto final. Assim, teve de testar também o lugar apropriado do forno: à frente, no meio ou no fundo. Parecem existir dois factores: a temperatura e o lugar da cozedura.

Faça o planeamento desta experiência, usando a aleatoriedade como princípio básico, e 3 unidades em cada grupo. Use a Tabela A.1 a partir da linha 111.

8. Há evidências de que o 'stress' físico, mesmo o toque diário nas folhas das plantas de interiores, por um minuto, impede o crescimento das plantas. Algumas pessoas dizem (sem evidências realistas) que falar delicadamente com as plantas ajuda o crescimento das mesmas.

Discuta um planeamento de uma experiência que tenha como objectivo ver os efeitos dos toques físicos, da conversa com as plantas, ou ambos, no crescimento. Descreva os tratamentos então definidos.



# Capítulo 3

## Organização dos dados

### 3.1 Introdução

A ideia que a maioria das pessoas tem sobre a estatística é a de um conjunto de tabelas com uma quantidade enorme de números e com alguns gráficos à mistura! As tabelas repletas de informação são muitas vezes difíceis de ler e de tirar conclusões e, os gráficos mal dimensionados e etiquetados são difíceis de interpretar.

No entanto, as tabelas são um dos meios mais usados para organizar e resumir um conjunto vasto e desordenado de dados. É mais vantajoso contruir uma tabela pequena com alguns valores especiais ('estatísticas' da amostra ou parâmetros da população) que caracterizam e resumem a distribuição dessas observações, do que uma tabela com um conjunto enorme de números. Os gráficos têm como objectivo dar uma visão resumida e rápida dos dados.

### 3.2 Tabela de frequências

Dado um conjunto de observações, é costume, em primeiro lugar, contar quantas vezes aparece cada valor, isto é, o número de ocorrências desse valor. A uma amostra, obtida por observação, de 1537 alunos foi colocada a seguinte questão:

- Concorda ou discorda com aulas teóricas dadas com a ajuda de acetatos?

Depois de registar todas as respostas, obtiveram-se as seguintes frequências: 928 alunos concordaram, 543 discordaram e 66 não tinham opinião formada. Verificando-se que  $928 + 543 + 66 = 1537$ , conclui-se que foram consideradas todas as respostas (consistência interna).

Como as proporções são mais úteis do que os totais, podemos calcular:  $\frac{928}{1537} = 0.60$  e 60 por cento dos alunos concordaram;  $\frac{543}{1537} = 0.35$ , 35 por cento não concordaram e  $\frac{66}{1537} = 0.04$  e 4 por cento não tinham opinião formada. Somando as percentagens  $60 + 35 + 4$  dá 99 por cento, quando deveria dar 100. Cometemos erros de arredondamento ao arredondar as divisões (fracções) para duas casas decimais.

A **frequência** de qualquer valor de uma variável é o número de vezes que esse valor ocorre nos dados. Isto é, a frequência corresponde a uma contagem.

A **frequência relativa** de qualquer valor é a proporção, fracção ou percentagem de todas as observações que têm aquele valor.

As frequências (simples) (f.) e as frequências relativas (f.r.) são um meio muito usado para resumir os dados quando a escala usada é nominal ou ordinal. Mesmo quando a escala é intervalar/proporcional e a variável pode tomar uma quantidade enorme de valores, podemos fazer um resumo dos dados calculando as f. e as f.r. de grupos de valores (chamados classes ou intervalos).

Na tabela da figura 3.1 apresenta-se um exemplo de uma tabela de f. e de f.r. respeitante às dimensões de propriedades agrícolas, em acres (medida agrária).

Fazendas por tamanho (1969)		
Tamanho	Número de	Percentagem
em acres	fazendas (milhares)	de fazendas
Menos de 40	162	5.9
10-49	473	17.3
50-99	460	16.8
100-179	542	19.9
180-259	307	11.2
260-499	419	15.3
500-999	216	7.9
1000-1999	91	3.3
Mais de 2000	60	2.2
Total	2730	99.8

Figura 3.1: Tabela de frequências [12]

As tabelas de f. tornam-se mais interessantes quando envolvem mais do que uma variável. Nalguns casos aparecem várias variáveis, provavelmente definindo um conjunto de variáveis independentes e dependentes.

Os dados são **univariados** se de cada unidade apenas se mede uma variável (característica).

Os dados são **bivariados** se de cada unidade se medem duas variáveis (características).

Os dados são **multivariados** se de cada unidade se medem mais do que uma variável.

Dados bivariados contêm muito mais informação do que os univariados. Veja-se por exemplo, a tabela da figura 3.2 em que as entradas correspondem ao número de graus académicos atribuídos nos E.U. em 1976, classificados por duas variáveis nominais: o nível do grau e o sexo do candidato.

Algumas questões que podem ser respondidas a partir desta tabela são:

- Que proporção dos graus de doutor foram atribuídos a indivíduos do sexo feminino?

Graus obtidos, por grau e sexo (1976)			
	Bacharelato	Mestrado	Doutoramento
Homens	508.549	167.745	26.273
Mulheres	425.894	145.256	7.803
Total	934.443	313.001	34.076

FONTE: Centro nacional para estatísticas da educação

Figura 3.2: Tabela de dados bivariados [12]

- Que proporção dos graus foram de doutor e atribuídos às senhoras?
- Que proporção dos graus atribuídos às senhoras, foram de doutor?

Embora as questões pareçam iguais, não o são. À 1<sup>a</sup>. questão a resposta é  $\frac{7803}{34076}$ , à 2<sup>a</sup>, a proporção é  $\frac{7803}{1281520}$  e à 3<sup>a</sup>. é  $\frac{7803}{578953}$ .

Para responder à última questão foi necessário calcular o total de uma linha, que corresponde ao total de senhoras a quem foi atribuído um grau:  $425894 + 145256 + 7803 = 578953$ . Um total semelhante pode ser calculado para os homens. A tabela pode ser estendida com mais uma coluna à direita, para incluir estes totais. Os totais agora referidos, bem como os totais da última linha da tabela, que correspondem aos números de graus de bacharelato, de mestre e de doutor, são conhecidos por **frequências marginais**.

### 3.3 Gráficos

Um gráfico serve para dar uma visão resumida dos dados. Um gráfico bem construído pode revelar factos (características) sobre os dados que, a retirar de uma tabela necessitariam de uma análise cuidada.

1. Um **gráfico de linha** mostra a tendência (comportamento) de uma variável em relação ao tempo.

O tempo é representado no eixo horizontal e a variável observada, ao longo do tempo, no eixo vertical. Considere a figura 3.3, onde é representado o número de distúrbios, em função do tempo (1968 a 1970) nos E.U.

Do gráfico, pode facilmente verificar-se que:

- (a) o número de distúrbios, em cada ano, é maior nos meses de Verão e menor no Inverno (chamado *efeito sazonal*);
- (b) o número de distúrbios tem vindo a diminuir ao longo dos três anos (*tendência a longo prazo*).

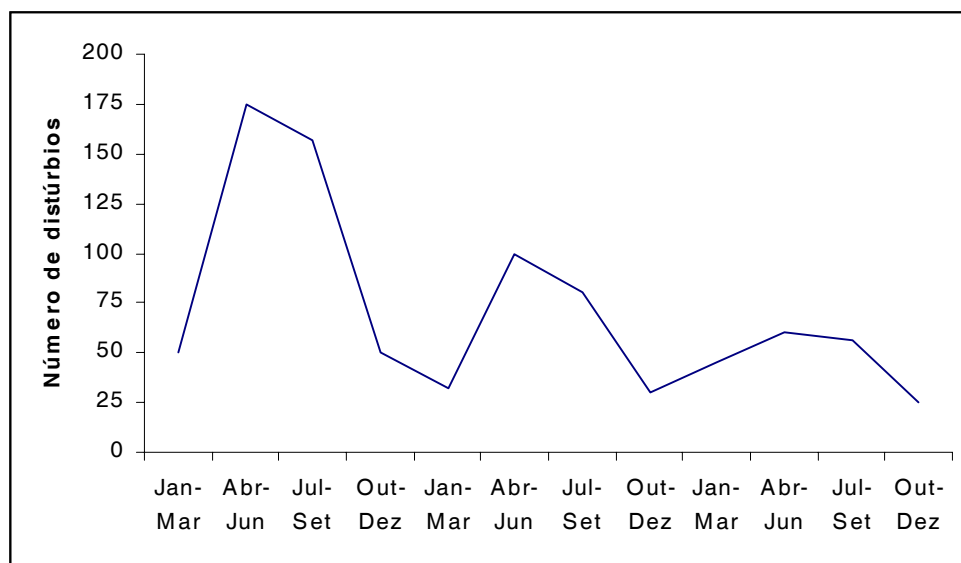


Figura 3.3: Gráfico de linhas [12]

## 2. Os **Gráficos de barras** comparam os valores de várias variáveis.

Na maior parte dos exemplos, os valores comparados são f. ou f.r. de uma variável nominal. A figura 3.4 apresenta um gráfico de barras respeitante aos dados da tabela da figura 3.1. Tem três barras que representam o número de graus atribuídos aos homens e às senhoras, separadamente para cada um dos três tipos de graus.

As barras aparecem normalmente verticais, separadas e devem ter todas a mesma largura. A altura varia com o valor da variável, o que significa que a área do retângulo também varia. A nossa percepção da quantidade representada, corresponde precisamente à área da barra.

Um gráfico de barras pode ser representado através de figuras. No entanto, essas figuras devem ter todas a mesma largura, variando a altura com o valor da variável. Na figura 3.5 estão representados dois exemplos de gráficos de barras utilizando figuras. O primeiro não está correcto, pois pode levar a falsas interpretações em termos relativos; o segundo, que é tão atraente como o primeiro, está correcto. As áreas das figuras visualizam correctamente as proporções relativas entre as variáveis.

## 3. O **gráfico (de uma mancha) de pontos** representa dados bivariados, quando as duas variáveis são medidas numa escala intervalar/proporcional ou ordinal.

As unidades de uma das variáveis são marcadas num dos eixos e as da outra variável, no outro eixo. Se uma das variáveis é independente e a outra dependente, então a independente deve ser representada no eixo horizontal.

Cada observação bivariada é representada por um ponto, como mostra o exemplo da



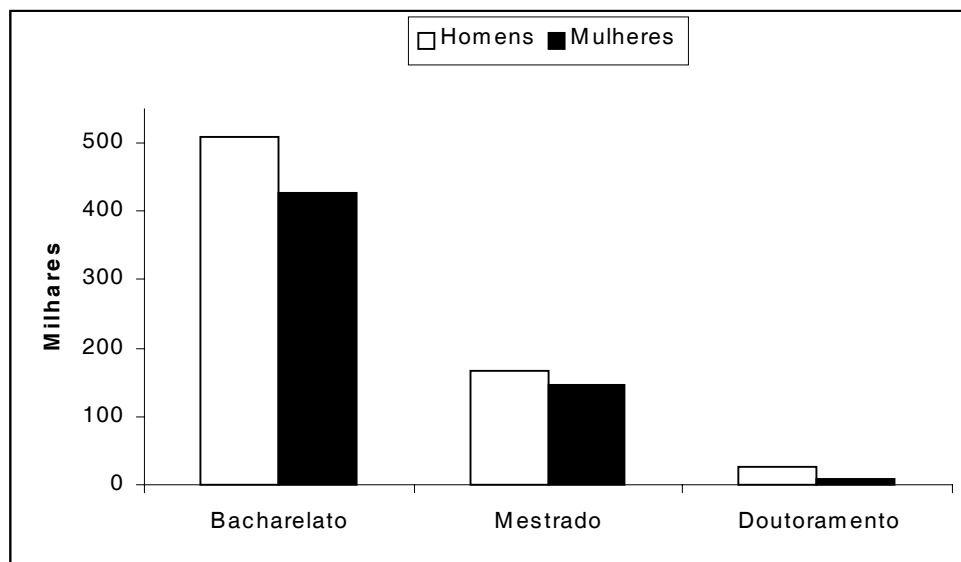


Figura 3.4: Gráfico de barras [12]

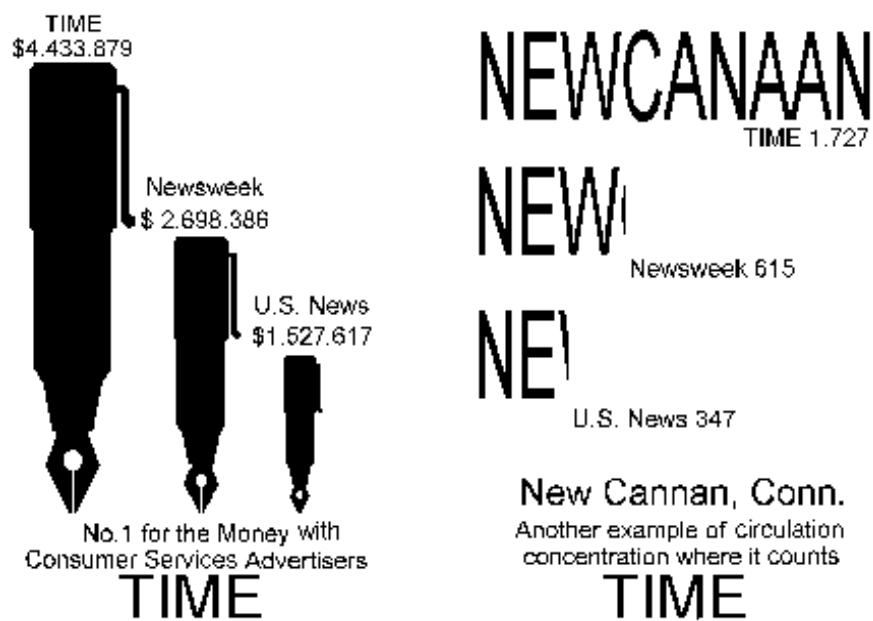


Figura 3.5: Gráficos de barras com figuras [12]

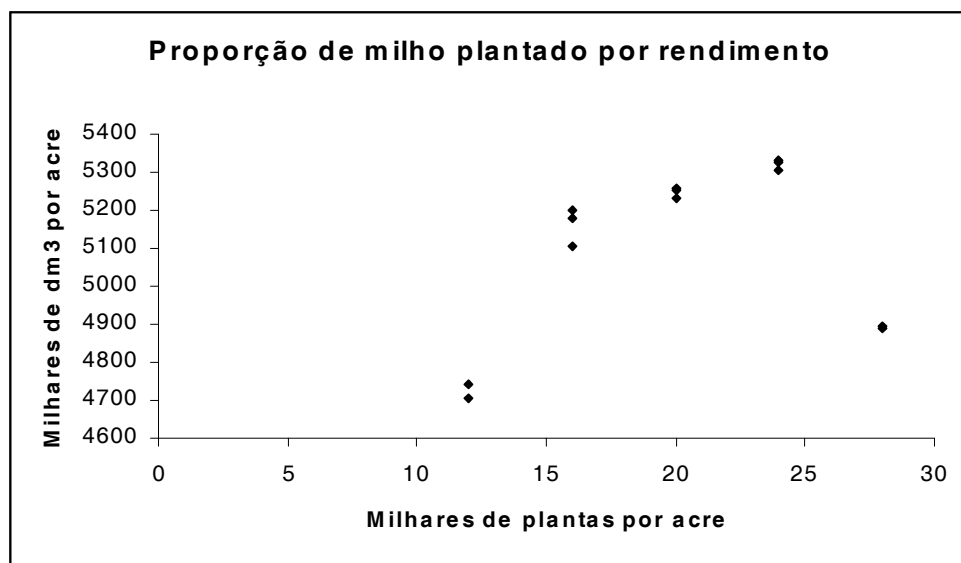


Figura 3.6: Gráfico de pontos

figura 3.6

- Os **histogramas de frequência** são os gráficos mais importantes na estatística inferencial.

Quando os dados são valores de uma variável medida numa escala intervalar/proporcional, uma tabela de frequências para cada uma das classes mostra a distribuição de valores dessa variável. Esta distribuição pode ser representada graficamente num histograma.

A figura 3.7 mostra um exemplo em que os valores estão divididos por classes (ou intervalos) de amplitudes iguais a 2000. Cada barra representa uma dessas classes e a altura corresponde à frequência (número de valores que pertencem à classe). Também se usam frequências relativas na definição de histogramas.

Os histogramas têm as barras verticais, umas a seguir às outras e *devem ser todas da mesma largura*. Assim, ao agrupar um conjunto de dados pelas classes para representar um histograma, devemos escolher classes (intervalos) com as mesmas amplitudes. Não existe nenhum valor ideal para a amplitude das classes (intervalos). O objectivo é conseguir obter uma distribuição de frequências equilibrada. Assim, tenta-se evitar colocar todos os valores num número *muito reduzido* de classes *enormes* ou distribuir um ou dois valores por *muitas* classes *pequenas*.

A forma da distribuição de frequências de um conjunto de dados pode ser analisada através do histograma das frequências. A figura 3.7 mostra uma distribuição não simétrica e descaída para a direita. Por vezes, a análise é facilitada pela curva que se obtém unindo, por linhas, os pontos médios dos topos das barras no histograma, como se vê na figura 3.7.

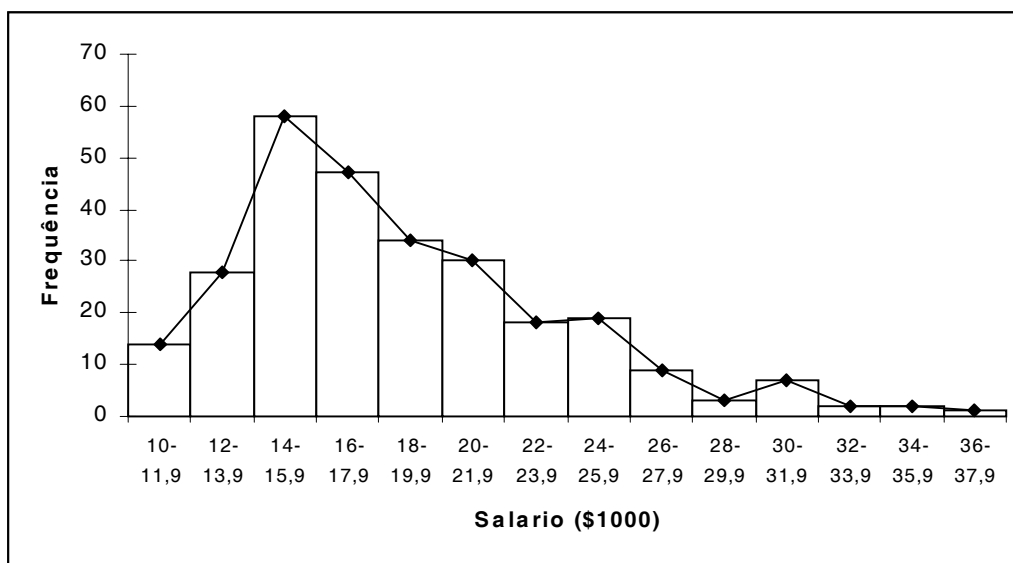


Figura 3.7: Histograma [12]

Os histogramas de frequências ou de frequências relativas evidenciam a forma de qualquer conjunto de observações medidas numa escala intervalar/proporcional. Não interessa se os dados dizem respeito a uma amostra ou à população inteira.

A distribuição de frequências de uma 'estatística' amostral, obtida através de repetidas amostras retiradas da mesma população, é a **distribuição amostral** da 'estatística'. A sua forma é característica do método de amostragem utilizado e ajuda a determinar a *precisão* da 'estatística' como uma estimativa do parâmetro correspondente da população.

Um exemplo da distribuição amostral de uma 'estatística'  $\hat{p}$  (proporção = frequência relativa) está representado no primeiro gráfico da figura 3.8.

A linha quebrada é a que une os pontos médios dos topos das barras do histograma de frequências. Este gráfico pode ser aproximado por uma curva *suave* especial, como a representada no 2º gráfico, da mesma figura e é conhecida por **curva normal**.

Existe uma família de curvas normais. Todas elas têm as mesmas características: são simétricas, decrescem rapidamente para os extremos e têm uma forma de sino.

As curvas normais são importantes em estatística, pois as distribuições amostrais de muitas 'estatísticas' podem ser razoavelmente bem descritas por curvas normais.

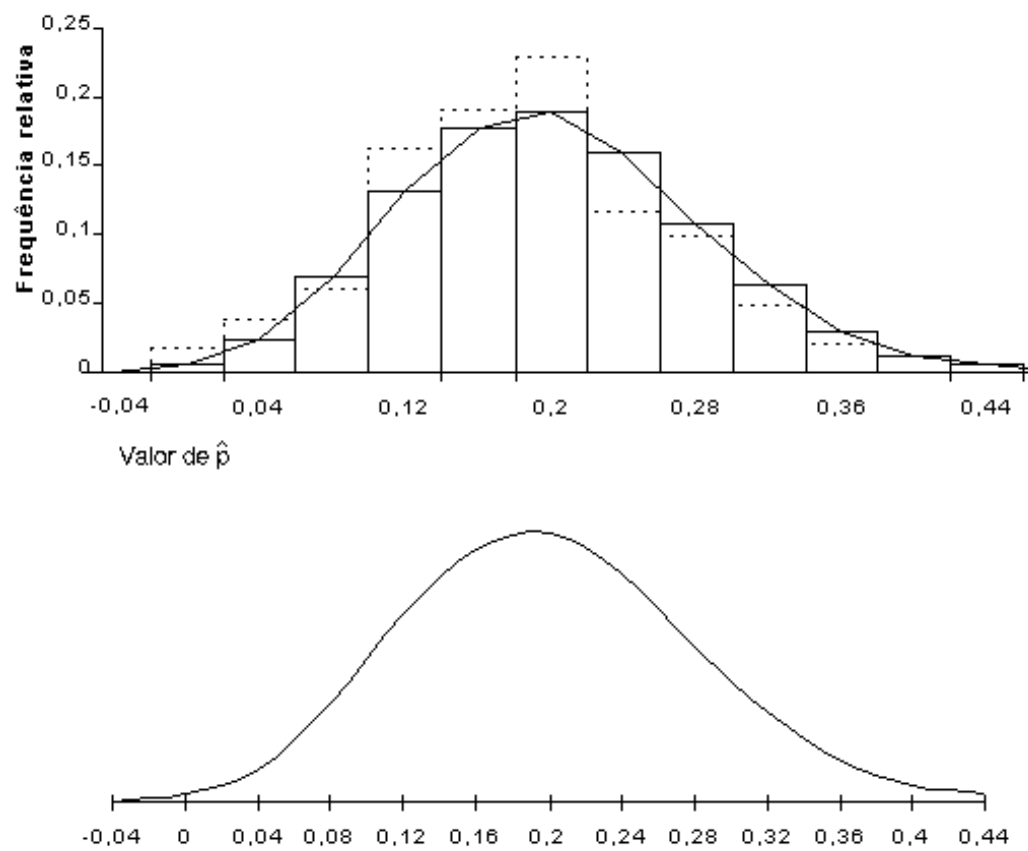
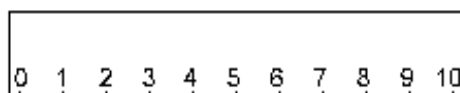


Figura 3.8: Distribuição amostral [12]

## 3.4 Exercícios

1. O número de pessoas mortas em acidentes de bicicleta aumentou de 600, em 1967, para um pouco acima dos 1100, em 1973. Serão estes números indicativos de que andar de bicicleta está a tornar-se mais perigoso? Isto é:
  - (a) Será que o número total de mortos por ano é uma medida válida do perigo que representa andar de bicicleta? Justifique.
  - (b) Se questionou a validade do número total de mortes como uma medida do perigo, sugira uma variável que seja mais válida. Explique.
2. Faça, com a ajuda de uma cartolina, uma régua como mostra a figura e marque (só) os centímetros 0,1,2,...,10.



Meça o segmento indicado, com essa régua, registrando o comprimento até às centésimas, (por exemplo 5,78 ou 5,82 cm).



Para medir este comprimento, teve de estimar a proporção da distância entre as marcas 5 e 6 cm. Medir uma variável, normalmente envolve uma incerteza como a que teve neste caso.

- (a) Qual foi o resultado da sua primeira medida?
- (b) Meça o segmento 5 vezes e registre esses resultados.  
Que margem de erro pensa que tem uma medição feita com a sua régua? (Isto é, que confiança lhe dá a medição?)
- (c) Suponha que alguém vai medir o segmento, colocando o seu extremo esquerdo, na ponta da régua, em vez de colocar na marca 0. Isto origina uma tendência. Explique porquê. Acha que a confiança da medição também é afectada?

N.B. O que fez para a alínea (b), pode não ser uma boa indicação da variação das medições, uma vez que as tentativas não são independentes. (Lembra-se sempre da medição anterior e isto vai afectar a medição seguinte).

Para melhor obter o grau de confiança, seria mais conveniente registar as medições feitas, na alínea (a), por todos os seus colegas da turma.

3. Identifique a escala de cada uma das seguintes variáveis, como nominal, ordinal ou intervalar/proporcional:

- (a) A concentração de DDT numa amostra de leite, em miligramas por litro.
- (b) As espécies de cada insecto encontrado numa amostra de terreno durante a colheita de um cereal.
- (c) O tempo de reacção de um sujeito, em milisegundos, após a exposição a um estímulo.
- (d) A resposta de um sujeito à seguinte questão, de um teste de personalidade: ”  
É natural que as pessoas de uma raça queiram viver afastadas das pessoas de outras raças,  
Perfeitamente de acordo  
De acordo  
Indeciso  
Em desacordo  
Fortemente em desacordo ”.
- (e) O código para fazer corresponder a um questionário enviado pelo correio.
- (f) A posição do Atlético Clube de Braga no campeonato nacional de andebol.
- (g) A pressão, em  $Kg/cm^2$ , necessária para partir um tubo de cobre.

4. Que tipo de escala é a ilustrada,

- (a) pelos números das camisolas dos jogadores de uma equipa de basquetebol?
- (b) pelos números de endereço das casas de uma rua de uma cidade?

5. Uma série de medições, de um peso em gramas, foram registadas: 11,25 13,73 12,00  
13,25 10,75 12,50 12,25 11,00 13,25 11,75

Com são dadas duas casas decimais, podemos pensar que as medições são precisas até à segunda casa decimal. No entanto, se olharmos bem, verificamos que a precisão é muito menor. Qual a precisão que os dados têm? Justifique.

6. Considere a tabela de frequências ([12]):

Fazendas por tamanho (1969)		
Tamanho	Número de	Percentagem
em acres	fazendas (milhares)	de fazendas
Menos de 40	162	5.9
10-49	473	17.3
50-99	460	16.8
100-179	542	19.9
180-259	307	11.2
260-499	419	15.3
500-999	216	7.9
1000-1999	91	3.3
Mais de 2000	60	2.2
Total	2730	99.8

- (a) Que percentagem dos campos agrícolas tinham, em 1969, pelo menos 500 acres?
- (b) Quantos campos agrícolas existiam em 1969? Quantos campos agrícolas têm quando muito 180 acres? Que percentagem dos campos têm entre 10 e 500 acres?
- (c) Porque razão o total das percentagens dá 99.8 e não 100?
7. A partir da tabela seguinte ([12]) determine a percentagem de graus obtidos pelas senhoras, para cada um dos níveis: bacharelato, mestrado e doutoramento.

Que conclusões tira, em termos relativos, dos padrões educativos dos homens e senhoras, em 1976?

Graus obtidos, por grau e sexo (1976)			
	Bacharelato	Mestrado	Doutoramento
Homens	508.549	167.745	26.273
Mulheres	425.894	145.256	7.803
Total	934.443	313.001	34.076

8. Considere a tabela bivariável ([12]):

Milionários, por idade e sexo (1972, em milhares)			
	Abaixo de 50 anos	50-64 anos	65 e mais
Mulheres	24	34	31
Homens	39	26	25

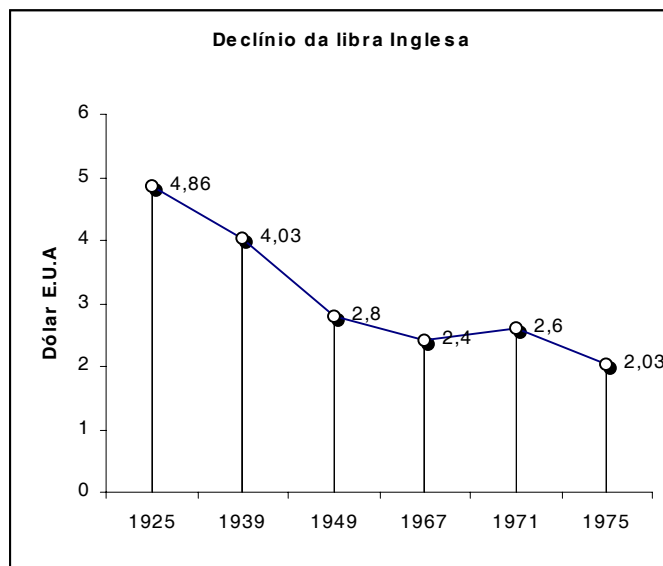
- (a) Quantos milionários existiam em 1972?

- (b) Que percentagem desses milionários eram senhoras?
  - (c) Que percentagem dos milionários tinham menos de 50 anos?
  - (d) Que percentagem dos milionários do sexo feminino, tinham 65 ou mais anos?
  - (e) Que percentagem dos milionários com menos de 50 anos, eram do sexo masculino?
9. A razão de mortes por cancro tem aumentado, desde 1925, como se pode ver pela tabela ([12]):

Número de mortes por cancro por 100 000 habitantes	
Ano	Taxa de mortes
1925	92.0
1930	97.4
1935	108.2
1940	120.3
1945	134.0
1950	139.8
1955	146.5
1960	149.2
1965	153.5
1970	162.8

- (a) Suponha que pretende influenciar o Ministério da Saúde, com o objectivo de obter mais dinheiro para um laboratório de investigação no combate ao cancro. Represente um gráfico em linha, a partir dos dados da tabela, por forma a evidenciar o aumento da razão de mortes por cancro.
  - (b) Desenhe outro gráfico em linha, a partir do mesmo conjunto de dados, que mostre um aumento moderado dessa razão.
10. A figura que se segue ([12]):





mostra um gráfico, que apareceu num semanário inglês. Diga porque razão ele não está correcto.

11. Os dados seguintes apresentam as percentagens de elementos doutorados, do sexo feminino, em 1976, em vários domínios do saber:

todos os domínios	21,9 por cento
psicologia	31,8 por cento
ciências biológicas	23,7 por cento
ciências sociais	20,4 por cento
ciências físicas	8,3 por cento
engenharia	1,7 por cento

Represente estes dados num gráfico de barras bem etiquetado.



# Capítulo 4

## Estatística descritiva

### 4.1 Medidas centrais

Além das tabelas e dos gráficos, que têm com objectivo organizar e dar uma imagem visual dos dados, existem certas características de uma distribuição, como o valor central e a dispersão dos valores, que podem ser resumidas por meio de certas quantidades.

Exemplos destas quantidades, conhecidas por 'estatísticas' descritivas, são: a mediana, a média, o desvio padrão e a correlação.

Medidas centrais:

- A **média** de um conjunto de  $n$  observações é a média aritmética; é a soma das observações dividida pelo seu número. Se  $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$  forem as  $n$  observações, então a média deste conjunto é:

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}.$$

Quando os dados estão agrupados numa tabela de frequências, a soma de observações idênticas é equivalente a multiplicar esse valor,  $X_i$ , pela sua frequência  $f_i$ . Assim, a média pode ser calculada através de:

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^k f_i X_i}{n}$$

em que  $n = \sum_{i=1}^k f_i$  e  $k$  é o número de valores distintos de  $X$ . Quando cada grupo é representado por um intervalo de valores, o  $X_i$  é o valor que representa esse intervalo que é o valor médio ( (limite inferior+limite superior do intervalo)/2 ). Se os intervalos dos extremos são caracterizados por  $\leq$  e  $\geq$ , os valores médios são calculados do mesmo modo, supondo que esses intervalos têm amplitudes iguais aos restantes.

- A **mediana** é o *valor típico*, isto é, é o ponto central das observações quando elas estão colocadas por ordem crescente.

Quando o número de observações é ímpar, o valor do meio é a mediana; quando o número de observações é par, existe um par de valores no centro e a mediana passa a ser a média aritmética desse par. Para o cálculo da mediana podemos usar a regra:

- Se existem  $n$  observações, calcule a quantidade  $(n + 1)/2$ . Coloque as observações por ordem crescente e conte do início  $(n + 1)/2$  observações. Se  $n$  for ímpar a última contabilizada será a mediana da lista; se  $n$  for par, a quantidade  $(n + 1)/2$  não é inteira, e tomamos a semi-soma das duas observações contíguas a esta quantidade (a anterior e a posterior) da lista.

Quando os  $n$  dados estão agrupados por  $k$  classes/intervalos, podemos usar o seguinte processo para o cálculo da mediana:

- calcular  $\frac{n}{2}$ ,
- calcular as frequências absolutas acumuladas das classes,
- determinar o intervalo que contém a mediana. Seja  $M$  o número desse intervalo ( $M$  é um inteiro de 1 a  $k$ ). A frequência acumulada dos intervalos anteriores ao do da mediana é  $F_{M-1}$ . A frequência absoluta do intervalo da mediana é  $f_M$  e a acumulada é  $F_M$ , e  $F_{M-1} < \frac{n}{2} < F_M$ ,
- calcular o número de observações que devemos tomar do intervalo da mediana e que é igual a  $\frac{n}{2} - F_{M-1}$ ,
- como existem  $f_M$  observações no intervalo da mediana e considerando-as uniformemente distribuídas, o valor da mediana está a  $\frac{\frac{n}{2} - F_{M-1}}{f_M}$  de distância do início do intervalo da mediana que tem amplitude igual a  $A$  e cujo limite inferior é  $l_{iM}$ . Assim,

$$\text{mediana} = l_{iM} + \frac{\frac{n}{2} - F_{M-1}}{f_M} A.$$

Como num histograma as áreas dos rectângulos são proporcionais às frequências dos respectivos intervalos, a linha vertical traçada no valor da mediana *divide* o histograma em duas áreas iguais.

- A **moda** é o valor mais *frequente*, isto é, o valor com maior frequência entre as observações.

Para o cálculo da moda convém colocar as observações por ordem crescente para se ver qual delas ocorre mais vezes. Pode até haver mais do que uma moda.

Destas medidas centrais, a média e a mediana são as mais usadas. A mediana utiliza informação relativa à ordem, não usando os valores numéricos das observações. A média, por sua vez, usa esses valores numéricos, sendo por isso a mais usada. Para distingui-las melhor e verificar as sensibilidades à variação de valores extremos, considere a figura 4.1. e tente responder ao seguinte:

- Qual será mais vantajoso, anunciar ao adversário a *média* ou a *mediana* das alturas destes jogadores de basquetebol?



Figura 4.1: Valor central das alturas [12]

As diferentes sensibilidades da média e da mediana a valores extremos podem ser mais visíveis usando a curva das frequências desse conjunto de dados. A moda é o valor onde a curva é mais alta. A mediana é o valor que divide a área, compreendida entre o eixo e a curva, em duas partes iguais; metade fica à esquerda da mediana e a outra metade à direita. A mediana é ponto central de uma distribuição simétrica.

Numa curva *normal*, o ponto mais alto está no centro e a moda coincide com a mediana, e também com a média. A figura 4.2 apresenta dois casos de distribuições não simétricas e dois gráficos de distribuições simétricas.

## 4.2 Medidas de dispersão

As medidas centrais são importantes mas não fornecem a informação completa sobre o conjunto de valores. Falta, pois, indicação sobre a dispersão desses valores.

Quando se usa a mediana para medir o centro de uma distribuição, é conveniente fornecer elementos sobre a variação ou dispersão da distribuição, através dos *percentis*.

O **percentil de ordem  $p$**  de um conjunto de valores (observações de uma variável) é o valor abaixo do qual estão  $p$  por cento dos valores, estando os restantes acima dele.

A mediana é o percentil de ordem 50, também conhecido por segundo quartil.

O percentil de ordem 25 chama-se primeiro quartil.

O percentil de ordem 75 chama-se terceiro quartil.

Um quarto das observações são menores do que o 1º quartil, metade são menores do que o 2º e um quarto são maiores do que o 3º quartil.

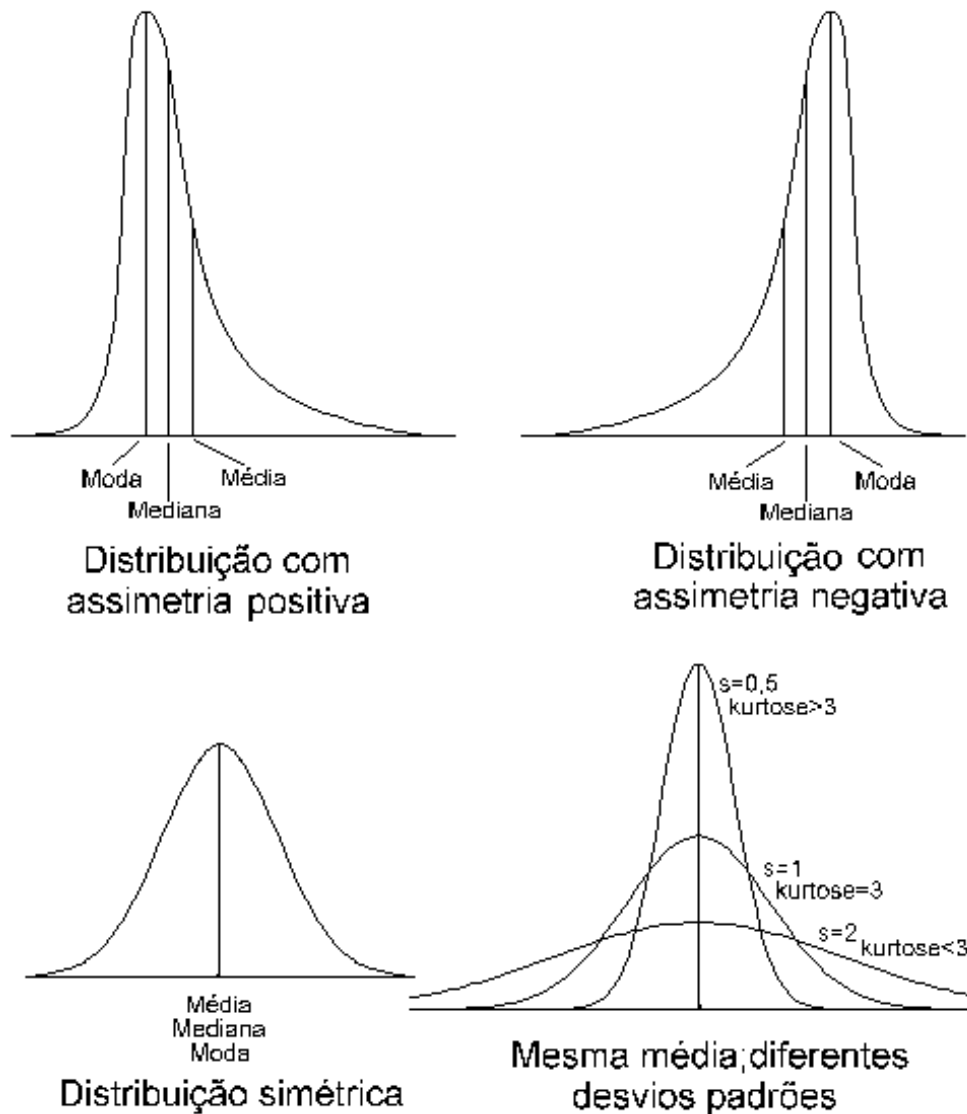


Figura 4.2: Distribuições não simétricas e simétricas [2]

A **amplitude** de um conjunto de valores é definida como a diferença entre a maior e a menor das observações e mede a dispersão total dos valores do conjunto.

As medidas de dispersão mais usadas são: a variância e o desvio padrão. Devem ser usadas quando a medida de tendência central usada for a média, pois elas medem a dispersão em relação à média, como *centro* da distribuição.

A **variância** é a média dos quadrados dos desvios das observações em relação à média. Assim, se  $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$  forem  $n$  observações e se  $\bar{X}$  for a sua média, a variância é

calculada a partir de:

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n}$$

Quando os dados estão agrupados numa tabela de frequências, a variância pode ser calculada a partir de:

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^k (f_i X_i^2)}{n} - \bar{X}^2$$

em que  $n = \sum_{i=1}^k f_i$ ,  $k$  é o número de classes (ou intervalos),  $f_i$  é a frequência da classe  $i$  e  $X_i$  o valor que representa a classe  $i$ .

**Quando as observações formam uma amostra aleatória simples de tamanho  $n$ , a variância da amostra deve ser calculada usando  $n - 1$  no denominador do primeiro termo da expressão, em vez de  $n$ , e deve-se multiplicar o segundo termo por  $\frac{n}{(n-1)}$ .**

Existem razões para esta escolha e têm a ver com o facto de esta 'estatística' poder ser um estimador não tendencioso da variância da população. Voltaremos a esta questão mais à frente, onde falaremos de estimadores.

O **desvio padrão** é a raiz quadrada da variância.

Utiliza-se  $s$  para designar o desvio padrão.

Alguns comentários sobre estas medidas:

1. A variância é uma quantidade positiva ou nula. Será nula se todos os desvios forem nulos e isto acontece quando todos os  $X_i$  forem iguais a  $\bar{X}$  (sendo todos iguais). Neste caso, não existe dispersão.
2. Se as observações estão dispersas, existem de um e de outro lado da média. Os desvios das observações à esquerda da média são negativos e os desvios das observações à direita são positivos. Estes desvios serão tanto maiores, em valor absoluto, quanto mais afastadas as observações estiverem da média. Os quadrados dos desvios são quantidades positivas e tanto maiores quanto maiores forem os desvios. Assim, se os valores estão juntos, a variância é pequena; se eles estão dispersos, a variância é grande.
3. Quando as observações são medidas numa unidade (por exemplo, centímetros, segundos, gramas), a variância vem nessa medida ao quadrado. No entanto, o desvio padrão já vem na mesma unidade das observações.

## 4.3 Distribuição normal

Quando um conjunto de dados tem uma distribuição descrita por uma das curvas normais, a média é facilmente detectada. Esta distribuição é simétrica, a média coincide com a mediana e também com a moda. É o valor que corresponde ao pico. Veja o 3º gráfico da figura 4.2.

O desvio padrão também é facilmente detectável da curva normal. Os pontos onde a curvatura muda, de ambos os lados em relação ao centro, estão localizados a *um desvio padrão* de cada lado da média. O 4º gráfico da figura 4.2. apresenta três exemplos de distribuições normais com a mesma média mas com diferentes desvios padrões.

A média fixa o centro da curva, enquanto que o desvio padrão determina a forma.

Alterando a média de uma distribuição normal não altera a forma, apenas altera a sua localização nos eixos. No entanto, alterando o desvio padrão, a forma da curva é alterada.

Em todos os casos, temos a curva normal das frequências com uma amplitude igual a seis desvios padrões.

Considere a figura 4.3. Em qualquer distribuição normal,

1. metade das observações são menores do que a média e a outra metade maiores;
2. 68 por cento das observações pertencem ao intervalo limitado por um desvio padrão para cada lado da média; destas, metade (34 por cento) estão entre a média e um desvio padrão para além da média;
3. 95 por cento das observações pertencem ao intervalo limitado por dois desvios para cada lado da média;
4. 99.7 por cento das observações pertencem ao intervalo limitado por três desvios em relação à média.

Em qualquer distribuição normal, o percentil de ordem 84 de uma distribuição normal está localizado a um desvio padrão acima da média. Do mesmo modo o percentil de ordem 16 é o ponto localizado a menos um desvio padrão em relação à média.

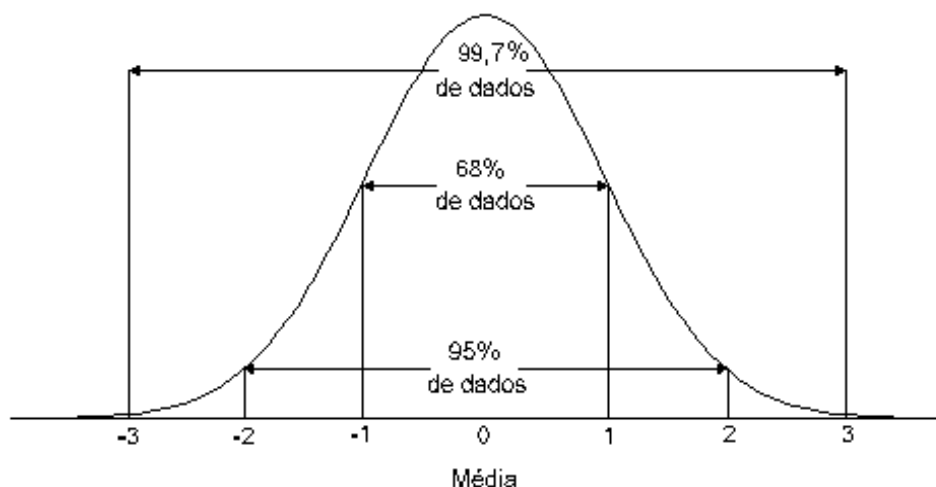


Figura 4.3: Distribuição normal [12]



As observações retiradas de diferentes distribuições normais podem ser comparadas, colocando-as em *unidades de desvio padrão acima ou abaixo da média*. Observações expressas em unidades de desvio padrão em relação à média, chamam-se **pontuações es-**  
**tandardizadas** ('standard'). Esta pontuação é calculada da seguinte maneira:

$$\text{pontuação estandardizada} = \frac{\text{observação} - \text{média}}{\text{desvio padrão}}.$$

Por exemplo, uma pontuação de 24 unidades num teste, cuja média foi de 18 e o desvio padrão de 6, é equivalente a  $(\frac{24-18}{6} =) 1$  unidade de pontuação estandardizada. Uma pontuação estandardizada de 1 corresponde sempre ao percentil de ordem 84, qualquer que seja a distribuição normal original.

## 4.4 Medidas de associação

As medidas centrais e de dispersão fornecem informação básica relativa a dados univariados, embora não completa. No entanto, se os dados forem bivariados, as medidas referidas nos parágrafos 4.1, 4.2 e 4.3 não são suficientes para resumi-los. Normalmente estamos interessados numa possível ligação entre as variáveis: - as variáveis aumentam simultaneamente, como a altura e o peso das pessoas, ou variam em sentidos opostos, como o número de cigarros fumados por dia e a esperança de vida do fumador?

Estudámos tabelas de frequências de duas entradas, respeitantes a duas variáveis, no parágrafo 3.2, no entanto, da tabela da figura 3.2. não é possível (mesmos com as frequências marginais) concluir sobre a associação entre as variáveis. Para isto, é necessário trabalhar simultaneamente com os valores das duas variáveis.

A **associação** em dados bivariados significa que existe uma ligação directa entre as variações nas variáveis:

- quando o aumento de uma variável tende a acompanhar o aumento de outra variável, diz-se que a associação é positiva;
- quando o aumento de uma variável tende a acompanhar a diminuição de outra variável, então as variáveis dizem-se associadas negativamente.

A associação é medida em termos *médios*.

A associação faz sentido para variáveis medidas em qualquer tipo de escala. Por exemplo, considerando o caso da tabela da figura 3.2, podemos ver que existe uma associação entre sexo e nível de graus atribuídos: às senhoras foram atribuídos 46 por cento dos graus de bacharelato e de mestre, mas apenas metade destes foram graus de doutoramento.

Associação positiva ou negativa já só faz sentido quando as variáveis forem medidas numa escala ordinal ou intervalar/proporcional.

### 4.4.1 Coeficiente de correlação

Uma das medidas de associação é o **coeficiente de correlação**.

Dadas  $n$  observações bivariadas nas variáveis  $X$  e  $Y$ ,  $X_1, X_2, \dots, X_n$  e  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ , o coeficiente de correlação  $r$  é definido por

$$r = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{s_X s_Y}$$

em que  $\bar{X}$  e  $\bar{Y}$  são as médias dos valores de  $X$  e de  $Y$  respectivamente e  $s_X$  e  $s_Y$  os desvios padrão das mesmas variáveis.

O numerador da expressão é a média dos produtos dos desvios de  $X$  e de  $Y$ , em relação às correspondentes médias. O denominador é o produto dos desvios padrões de  $X$  e de  $Y$ .

Interpretação de  $r$ :

1. o coeficiente de correlação  $r$  mede a associação entre duas variáveis; é positivo quando a associação é positiva e negativo quando a associação for negativa (o valor de  $r$  é tanto maior quanto mais forte for a associação);
2. o coeficiente de correlação toma sempre valores entre -1 e +1 (os desvios padrões no denominador standardizam o  $r$ , as unidades no numerador e denominador são as mesmas, o que significa que  $r$  é adimensional);
3. os valores extremos  $r = -1$  e  $r = 1$  indicam uma associação perfeita ( $r = -1$  significa que os pontos pertencem a uma linha recta de declive negativo, isto é, quando  $x$  aumenta,  $y$  diminui;  $r = 1$  significa que os pontos pertencem a uma linha recta com declive positivo, isto é, quando  $x$  aumenta,  $y$  também aumenta);
4. o coeficiente de correlação mede a proximidade da mancha de pontos em relação a uma linha recta ( $r$  mede uma **associação linear**).

A figura 4.4 mostra seis casos com diferentes valores de  $r$ .

### 4.4.2 Coeficiente de determinação

Existe uma maneira de medir a associação linear através de uma quantidade  $r^2$ , chamada **coeficiente de determinação**. Este coeficiente é a proporção da variância de uma variável, que pode ser explicada pela dependência *linear* na outra variável.

Para compreender melhor o seu significado, considere os dois gráficos da figura 4.5. No primeiro, existe uma associação perfeita *linear* com  $r = -1$ . A variável  $y$  está totalmente *ligada* à variável  $x$ ; quando  $x$  varia,  $y$  também varia e o ponto  $(x, y)$  move-se ao longo da linha. O conjunto dos 8 valores de  $y$  tem uma grande variância; mas esta variância é devida (explicada) à ocorrência dos diferentes valores de  $x$ , levando consigo os valores de  $y$ . A dependência *linear* em  $x$  explica toda a variação em  $y$  e  $r^2 = 1$ .

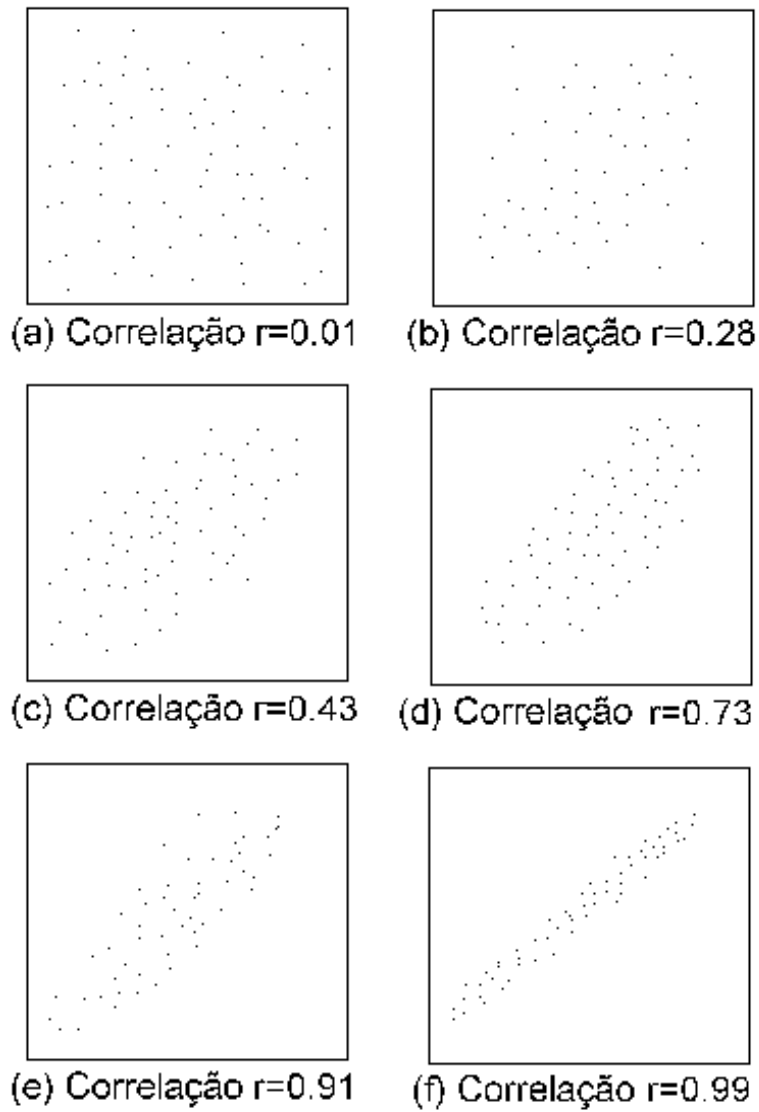


Figura 4.4: Diferentes associações entre variáveis [12]

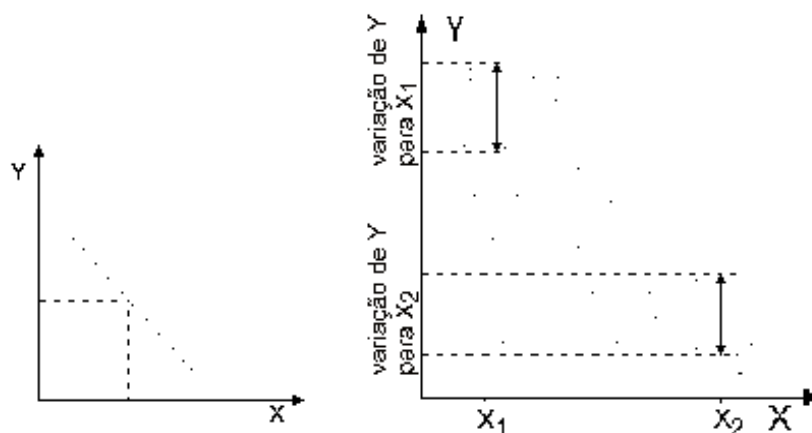


Figura 4.5: Casos com diferentes coeficientes de determinação [12]

No segundo gráfico, o conjunto dos 21 valores de  $y$  também tem uma grande variância. Alguma desta variância pode ser explicada pelo facto de a variação em  $x$  levar consigo uma variação (em média) em  $y$ .

O gráfico apresenta esta situação, mostrando os diferentes valores de  $y$  que acompanham os dois valores de  $x$ . Neste caso,  $r^2 \neq \pm 1$  pois a associação entre  $x$  e  $y$  explica apenas parte da variação em  $y$ . Esta parte é a fracção  $r^2$  da variância dos valores de  $y$ . Neste exemplo,  $r^2 = 0.49$  e diz-se que 49 por cento da variância de  $y$  é explicada pela dependência *linear* de  $y$  em relação a  $x$ .

O coeficiente  $r^2$  mede apenas a intensidade da associação e não nos diz nada sobre se ela é positiva ou negativa.

### 4.4.3 Associação, predição e causa

- "Quando existe uma forte associação entre duas variáveis, será que isso significa que uma das variáveis origina (causa) o aparecimento da outra?"

- "Se existir uma correlação moderada entre duas variáveis, será que isso significa que uma variável não origina a ocorrência da outra?"

A associação entre duas variáveis pode ser devida a três factores:

- **causa;**
- **razão comum,** quando existe(m) outra(s) variável(eis) que origina(m) o aparecimento das duas (ou, cuja variação causa variações nas duas) variáveis em estudo;
- **mistura,** quando as variações numa variável são causadas pelas variações da outra variável bem como de uma terceira variável que não se encontra em estudo.

A figura 4.6 mostra os três casos referidos.

A questão da *causa* não é simples. Embora se tenha sugerido no Capítulo 2 que experiências bem planeadas são o meio mais eficaz para resolver a questão da *causa*, muitas experiências não podem ser realizadas por razões práticas e morais.

Para concluir que a associação entre duas variáveis é devida à *causa*, é necessário que se verifiquem uma clara evidência e uma boa 'dose' de bom senso, além dos conhecimentos estatísticos. Assim, poder-se-á pensar num caso de *causa* se:

- a associação se repete em diferentes circunstâncias, reduzindo a probabilidade de ser consequência da mistura entre variáveis;
- se conhece uma explicação plausível, mostrando como uma variável pode causar variações noutra variável;
- não parecem existir outros factores que possam causar variações nas duas variáveis.

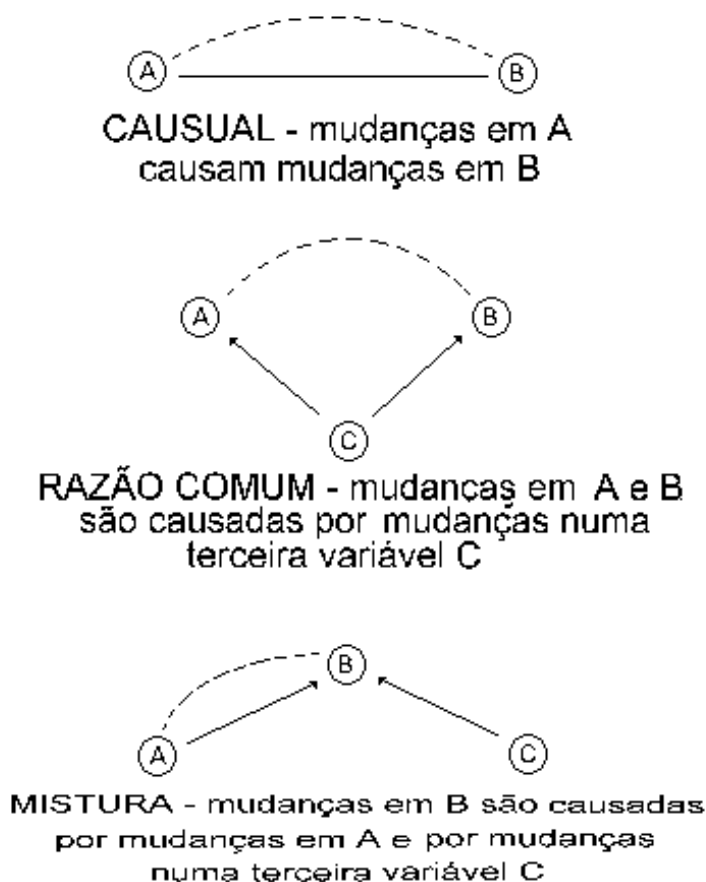


Figura 4.6: Factores que originam associação entre duas variáveis A e B [12]

A associação que se deve a *razões comuns* pode ser utilizada para prever uma das variáveis, como função da outra.

Correlação e *predição* estão muito relacionadas. Por exemplo, se uma variável independente  $x$  e uma variável dependente  $y$  têm um  $r^2 = 1$ , isto significa que as observações em  $x$  e  $y$  estão sobre uma linha recta. Este modelo pode ser usado para prever  $y$  a partir de um valor de  $x$  (lendo na recta o correspondente valor de  $y$ ).

Se o valor de  $r^2$  é pequeno, a predição é menos precisa porque os pontos não estão sobre uma linha recta e  $y$  varia muito, para um valor fixo de  $x$ .

A linha que deve ser usada para prever a partir de uma mancha de pontos é a seguinte: a **linha de regressão** para prever  $y$  a partir de  $x$ , baseada em observações bivariadas  $X_1, X_2, \dots, X_n$  e  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$  é a recta que torna a *soma dos quadrados dos desvios na direcção  $y$*

$$(Y_1 - \hat{Y}_1)^2 + (Y_2 - \hat{Y}_2)^2 + \dots + (Y_n - \hat{Y}_n)^2$$

menor possível. Veja a figura 4.7

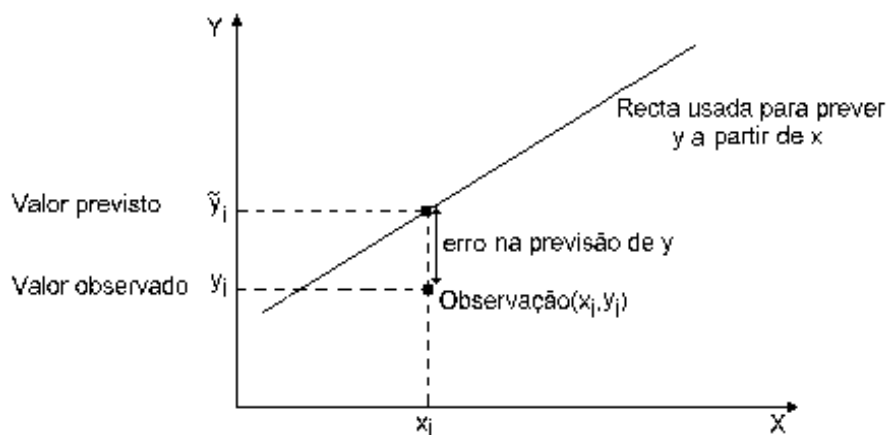
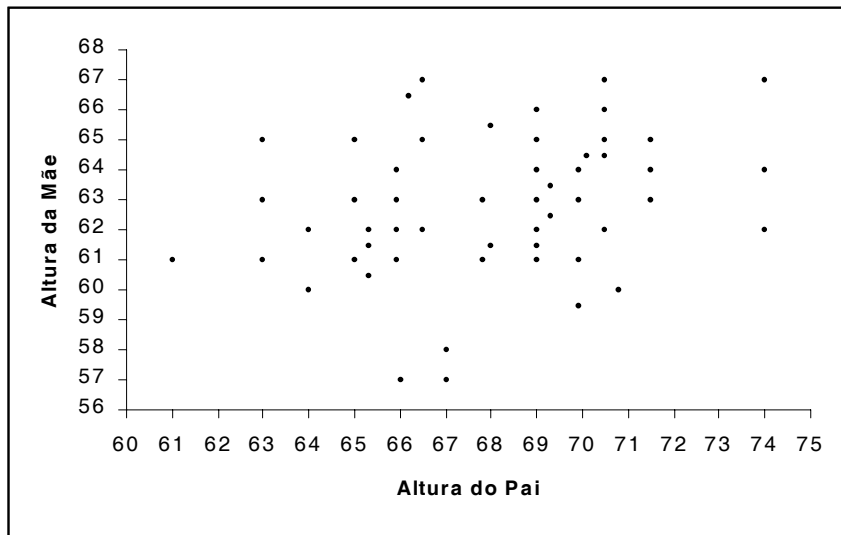


Figura 4.7: Regressão

Voltaremos a este assunto no Capítulo 10 sobre Regressão linear, múltipla e não linear.

## 4.5 Exercícios

1. A figura que se segue ([12]):



representa um gráfico de pontos relativo às duas variáveis, altura da mãe e altura do pai, retiradas de uma amostra.

- (a) Qual é a menor das alturas das mães usadas nesta amostra?  
Quantas senhoras tinham esta altura?  
Quais as alturas dos respectivos maridos destas senhoras?
  - (b) Qual a maior das alturas dos homens desta amostra?  
Quantos homens têm esta altura?  
Quais as alturas das suas respectivas esposas?
  - (c) Acha que o gráfico mostra alguma ligação entre as alturas das mães e dos pais? (isto é, será que as senhoras mais baixas têm tendência para casar com homens altos, ou o contrário, ou ...?).
2. Uma dona de casa está interessada em conhecer como as necessidades de aquecimento, no inverno, afectam a quantidade de gás natural consumida em sua casa. A necessidade de calor é medida em *graus diários*. (Para determinar o número de graus diários num certo dia, registam-se as temperaturas mais alta e mais baixa daquele dia e calcula-se a temperatura média. Se for menor do que  $65^{\circ}F$ , então existe um grau diário por cada grau abaixo dos  $65^{\circ}F$ ).

A dona de casa registou o consumo diário de gás em  $cm^3$ , bem como o número médio de graus diários. Os dados obtidos durante nove meses consecutivos foram ([12]):

	Dias								
Graus	15.6	26.8	37.8	36.4	35.5	18.6	15.3	7.9	0
$cm^3$	5.2	6.1	8.7	8.5	8.8	4.9	4.5	2.5	1.1

- (a) Faça um gráfico de pontos, a partir destes dados. Qual é a variável independente?
  - (b) A partir do gráfico, dê uma estimativa do consumo de gás num dia em que se verifique 20 graus diários.
3. Um engenheiro agrônomo desenvolveu uma variedade de milho com percentagens mais elevadas de amino-ácidos do que o milho normal. Esta variedade tem melhores qualidades proteicas que a normal e por isso é muito valiosa em regiões do mundo em que o milho é a componente principal da alimentação.

Para testar as qualidades proteicas desta nova variedade, usaram-se 20 pintos de um dia, no grupo experimental, que foram alimentados com a nova variedade de milho. Um grupo de controlo, com 20 pintos de um dia, foi também utilizado. A estes, deu-se-lhes milho normal. Os pesos, em gramas, dos pintos, após a experiência de 21 dias, foram os seguintes ([12]):

Grupo de controlo				Grupo experimental			
380	321	366	356	361	447	401	375
283	349	402	462	434	403	393	426
356	410	329	399	406	318	467	407
350	384	316	272	427	420	477	392
345	455	360	431	430	339	410	326

- (a) Esta experiência foi planeada de acordo com os princípios descritos no Capítulo 2. Discuta o planeamento de experiência apropriado.
  - (b) Faça duas tabelas de frequências separadas dos pesos dos pintos, nos grupos experimental e de controlo. Use as classes:  
270-299   300-329   330-359   360-389   390-419   420-449   450-479
  - (c) Desenhe dois histogramas de frequências para cada grupo. Como é que os histogramas mostram o efeito da maior percentagem de amino-ácidos no peso dos pintos?
4. As entradas na tabela de números aleatórios, Tabela A.1, têm a propriedade de que cada valor 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 aparece o mesmo número de vezes, ao fim de muito tempo de consulta.



- (a) Faça uma tabela de frequências e desenhe um histograma das entradas nas primeiras três linhas da Tabela A.1.(ao todo 120 Algarismos).
- (b) Será esta distribuição aproximadamente normal?  
De que forma ela se desvia da normalidade?  
Será uma distribuição aproximadamente simétrica?
- (c) Desenhe uma curva que represente a distribuição de valores de um grande número de observações retiradas da tabela de números aleatórios.
5. Já a seguir vem representada uma amostra de 100 tempos de reacção, a um estímulo, em milissegundos ([12]):

10	14	11	15	7	7	20	10	14	9
8	6	12	12	10	14	11	13	9	12
13	11	12	10	8	9	14	18	12	10
10	11	7	17	12	9	9	11	7	10
14	12	12	10	9	7	11	9	18	6
12	12	10	8	14	15	12	11	9	9
11	8	11	10	13	8	11	11	13	20
6	13	13	8	9	16	15	11	10	11
20	8	17	12	19	14	17	12	18	16
15	16	10	20	11	19	20	13	11	20

- (a) Calcule a média e a mediana destes dados.
- (b) Calcule a tabela de frequências dos valores 6, 7, 8, ..., 20 e desenhe um histograma das frequências. Calcule então a média usando os valores em tabela. Comente o resultado, quando comparado com o obtido na alínea anterior.
- (c) Explique, em termos da forma da distribuição de frequências, porque razão as medidas centrais da alínea a) têm os valores obtidos (estão perto uma da outra ou separadas).
6. Identifique qual das medidas centrais (média, mediana ou moda) é a correspondente 'média', em cada uma das situações:
- A Assembleia Municipal da cidade da Praia Monte está a considerar impôr um imposto aos seus habitantes. Pretende, para isso, conhecer o rendimento 'médio' dos habitantes, por forma a poder estimar a base do imposto total.
  - Numa tentativa de estudar os padrões de vida das famílias típicas da cidade de Vila dos Corvos, um sociólogo estimou o rendimento 'médio' das famílias daquela cidade.

7. De acordo com o relatório C25, *Casas Novas Vendidas e para Venda - Unifamiliar*, da Comissão de Censos da Construção Civil, de 1988, a média e a mediana dos preços das casas novas vendidas naquele ano, foram de 4 890 contos e 5 510 contos. Qual destes valores corresponde à média e qual corresponde à mediana? Justifique.
8. Numa sala estão 5 pessoas. A média das idades é de 30 anos. Entra na sala uma pessoa de 36 anos de idade. Qual será agora a média das idades das pessoas naquela sala?
9. Suponha que pretende medir a velocidade média dos veículos que circulam na auto-estrada onde se encontra. Para isso, ajusta a velocidade do seu carro até que o número de veículos que o ultrapassam seja igual ao número de veículos que ultrapassou. Calculou, desta maneira, a velocidade média, a mediana das velocidades ou a moda das velocidades dos veículos que circulam naquela auto-estrada?
10. Calcule a média, a variância e o desvio padrão deste conjunto: 4, 0, 1, 4, 3, 6.
  - (a) Adicione 2 a cada um dos números anteriores. Obtemos, então, o conjunto: 6, 2, 3, 6, 5, 8.
    - i) Determine a média e o desvio padrão deste novo conjunto.
    - ii) Compare os resultados de i) com os obtidos para o primeiro conjunto de valores. Como alterou a média, depois de adicionar 2 a cada valor? Como foi alterado o desvio padrão?
  - (b) O que aconteceria à média e ao desvio padrão se adicionássemos 10 a cada um dos valores do conjunto inicial? (sem fazer cálculos!)
11. Isto é um concurso de *variância*!  
- Sem ler as três alíneas seguintes:  
Dê uma lista de 6 números, seleccionados a partir do conjunto 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 (podem aparecer repetições).
  - (a) Da lista seleccionada, construa uma lista de 6 números com a maior variância possível.
  - (b) Da lista seleccionada, construa uma lista de 6 números com a menor variância possível.
  - (c) Qual das duas alíneas anteriores tem mais do que uma resposta correcta?
12. Da tabela dos tempos de reacção, da questão 5, determine:
  - (a) o primeiro e o terceiro quartil do conjunto.

- (b) o 10<sup>o</sup>. e o 90<sup>o</sup>. percentis do conjunto.

Explique, em termos da forma da distribuição de frequências, porque razão o 90<sup>o</sup>. percentil está mais afastado da mediana, do que o 10<sup>o</sup>.

- (c) a amplitude do conjunto.

A amplitude raramente é usada, a não ser para amostras muito pequenas. Explique porquê?

13. As classificações num teste de aptidão pedagógica (verbal) entre candidatos a uma Universidade, seguem aproximadamente uma distribuição normal com média 11,6 e desvio padrão 2.

- (a) Que percentagem de candidatos tem classificação superior a 13,6?

- (b) Que percentagem de candidatos tem classificação inferior a 7,6?

- (c) Os 95 por cento de candidatos do meio, têm classificações entre que valores?



# Capítulo 5

## Distribuições de probabilidade

Este capítulo tem como objectivo apresentar mais alguns conceitos fundamentais em Estatística, que serão importantes para compreender as técnicas de experimentação, os métodos e procedimentos estatísticos essenciais no *planeamento, realização e análise de experiências*.

### 5.1 Teoria das probabilidades

Uma maneira de classificar as experiências recorre ao esquema **determinístico** versus **probabilístico**.

Numa experiência determinística, aos valores das variáveis independentes  $x_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  correspondem resultados previsíveis  $y$ . Por exemplo, aos valores da intensidade da corrente  $I$  e da resistência  $R$  de um circuito eléctrico, corresponde uma única diferença de potencial  $E$ , de acordo com a lei de Ohm  $E = IR$ . Assim, este modelo corresponde a uma experiência determinística.

**Embora, em teoria, se aceite esta lei, na prática devemos reconhecer que uma experiência só é determinística se os factores não controláveis pelo experimentador produzirem um efeito muito reduzido nos resultados. Se estes efeitos não se podem ignorar, verificamos que repetidas medições, ao longo do tempo, da variável  $E$ , para valores constantes de  $I$  e  $R$  produzem um conjunto de valores distintos. O modelo refere-se então a uma experiência probabilística ou aleatória.**

Este conjunto de medições repetidas forma uma distribuição de probabilidades.

Como a estatística se baseia nas leis da probabilidade, precisamos de conhecimentos fundamentais de probabilidade.

O que é fundamental em probabilidade é a noção de *experiência aleatória*. Uma experiência aleatória é um processo que numa dada tentativa, tem como resultado um de vários valores possíveis. O acaso determina o *resultado* que ocorre numa dada tentativa; não nos é possível prever, com alguma certeza, qual será o valor, a não ser que o tenhamos observado. Exemplos muito conhecidos de experiências aleatórias são os lançamentos de moedas e de dados. Exemplos que ocorrem na indústria incluem a inspecção de defeitos

numa linha de montagem e a observação do estado de funcionamento de várias linhas de comunicação, num certo instante.

### 5.1.1 Espaço da amostra

Embora não podendo prever, com toda a certeza, qual o resultado da variável aleatória (v.a.) naquela tentativa, conhecemos todos os valores possíveis. Este conjunto de  $n$  valores possíveis, chama-se **espaço da amostra** e podemos representar assim:

$$E = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\},$$

em que o  $a_i$  representa o valor possível de ordem  $i$  da variável. Por exemplo, no lançamento da moeda, podemos ter cara  $c$ , ou coroa  $C$  e  $E = \{c, C\}$ . No lançamento do dado,  $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ . Na inspecção de produtos defeituosos numa linha de montagem, temos  $E = \{d, nd\}$  ( $d$ =defeituoso,  $nd$ =não defeituoso). Num processo com três linhas de comunicação em que atribuímos o valor 0 se o canal não funciona; e o valor 1 se ele funciona, temos então  $E = \{(0, 0, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1), (1, 1, 1)\}$ .

O espaço da amostra satisfaz duas propriedades muito importantes:

- os resultados (da experiência) são **mutuamente exclusivos**, isto é, são distintos; quando ocorre um resultado, não pode ocorrer outro qualquer;
- os resultados são **exaustivos**, isto é, os resultados da experiência só podem ser os referidos no espaço  $E$ .

**Exemplo 5.1.1** *Considere um circuito eléctrico em operação, durante um período de tempo fixo  $T$ . Se o circuito está em funcionamento durante o período inteiro  $T$ , representamos o resultado da experiência por um 1; se o circuito falha numa altura em que  $t \leq T$ , representamos este resultado por um 0. O espaço da amostra é constituído por estes dois valores :  $E = \{0, 1\}$ . Este é um caso (muito particular) de um espaço **discreto**, isto é, um espaço em que o conjunto de valores possíveis para a variável (resultados da experiência) é finito e numerável.*

**Exemplo 5.1.2** *Considere, agora, este caso mais complicado. O circuito eléctrico estará em funcionamento durante um período de tempo aleatório  $t \leq T$ . O espaço da amostra, desta experiência contém, agora, um número infinito de valores possíveis, isto é,  $E = \{t_i : 0 \leq t_i \leq T\}$ .  $T$  será o valor máximo que a variável poderá tomar. Este é um exemplo de espaço **contínuo**.*

### 5.1.2 Probabilidades

Para uma dada tentativa de uma experiência aleatória, não sabemos qual o valor do espaço da amostra que será o resultado. No entanto, se repetirmos a experiência muitas vezes, é possível estimar a *frequência* (relativa) desse resultados. Isto é, se repetirmos a experiência

$M$  vezes e o resultado igual a  $a_i$  ocorrer  $m_i$  vezes, obtemos a **probabilidade de ocorrência** do valor  $a_i$ :

$$p_i = \frac{m_i}{M}.$$

A soma das frequências dos  $n$  resultados deve ser igual ao número total de tentativas da experiência, isto é:

$$m_1 + m_2 + m_3 + \dots + m_n = M.$$

Daqui resulta:

$$p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_n = 1$$

e a soma das probabilidades associadas a cada resultado da experiência deve ser igual a 1.

Se um resultado  $a_i$  nunca pode ocorrer na experiência, em  $M$  tentativas, a sua probabilidade é igual a 0. Diz-se, neste caso, que o resultado é impossível.

Se, por sua vez, o resultado  $a_i$  ocorre em todas as tentativas, a sua probabilidade é igual a

$$p_i = \frac{M}{M} = 1$$

e diz-se que o resultado é *certo*.

Podemos já enunciar as **duas leis da probabilidade**:

$$0 \leq p_i \leq 1, i = 1, 2, \dots, n$$

e

$$\sum_{i=1}^n p_i = 1.$$

Dois exemplos que ilustram casos simples de resultados igualmente prováveis são:

- o lançamento de uma moeda, com  $p(c) = \frac{1}{2}$ ,  $p(C) = \frac{1}{2}$  e  $p(c) + p(C) = 1$ ;
- lançamento do dado, com  $p(i) = \frac{1}{6}$ ,  $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$  (qualquer das faces do dado tem igual probabilidade de sair) e  $\frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{6} = 1$ .

No entanto, nem todos os casos são tão simples. O exemplo da inspeção de produtos numa linha de montagem, poderá ter, muito provavelmente, uma probabilidade muito menor para o resultado  $d$  = defeituoso, do que para o resultado  $nd$  = não defeituoso.

O conceito de probabilidade torna-se mais complicado quando se trata de uma variável (espaço da amostra) contínua, uma vez que não é possível definir um conjunto finito de resultados. Existe, agora, um conjunto infinito de valores, de um modo contínuo, normalmente limitado inferiormente por  $X_{min}$  e superiormente por  $X_{max}$ , isto é:  $X_{min} \leq x_i \leq X_{max}$ .

Em vez de falarmos na probabilidade de um valor, teremos, neste caso, a *probabilidade do resultado de uma experiência estar compreendido entre dois valores*  $r \leq x_i \leq s$ .

### 5.1.3 Operações com acontecimentos

Um outro conceito fundamental em probabilidade é o de **acontecimento**.

- Um acontecimento é um conjunto de resultados (do espaço) de uma experiência que tem uma certa característica.

Por exemplo, se tivermos dois dados, o conjunto  $E$  é definido por:

$$E = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), \dots, (2, 1), (2, 2), (2, 3), \dots, (3, 1), (3, 2), \dots, (4, 1), \dots, (4, 6), (5, 1), (5, 2), \dots, (5, 6), (6, 1), \dots, (6, 6)\}$$

ao todo 36 resultados distintos, se considerarmos que temos um dado verde e um encarnado, e por isso, o resultado  $(3, 1)$  é diferente do  $(1, 3)$ . Como cada um destes resultados é igualmente provável, essa probabilidade é igual a  $\frac{1}{36}$ .

Se estivermos interessados no *acontecimento*  $A$ , em que só um 3 aparece no conjunto dos dois dados, então

$$A = \{(1, 3), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (4, 3), (5, 3), (6, 3)\}$$

e a probabilidade de ocorrência do acontecimento  $A$  pode ser calculada da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} p(A) &= p((1, 3)) + p((2, 3)) + p((3, 1)) + \dots + p((5, 3)) + p((6, 3)) \\ &= \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \dots + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} = \frac{10}{36} \end{aligned}$$

isto é, somamos as probabilidades dos resultados, do espaço amostra, que originam o acontecimento  $A$ .

- Se  $a$  dos  $n$  resultados no espaço da amostra  $E$  dão origem ao acontecimento  $A$ , então a **probabilidade do acontecimento**  $A$  é dada por

$$p(A) = \sum_{i=1}^a p(x_i).$$

- Num espaço amostral *contínuo*, definimos **acontecimento** como sendo a ocorrência de um resultado dentro de um certo intervalo de interesse,  $r \leq x_i \leq s$ .

Por exemplo, se quisermos calcular a probabilidade de que um circuito eléctrico funcione quanto muito 200 horas, então o acontecimento é  $0 \leq t(\text{tempo}) \leq 200$  e a probabilidade seria:

$$p(0 \leq t \leq 200) = \int_0^{200} f(t) dt$$

precisando para isso de conhecer a *distribuição ou função de probabilidade*  $f(t)$ , que descreve este processo.



Existem duas operações que envolvem acontecimentos e que são de interesse fundamental na teoria das probabilidades: a *união* e a *intersecção*.

A operação **união** é representada por  $\mathbf{A} + \mathbf{B}$  e significa que pelo menos um dos acontecimentos  $A$  ou  $B$  ocorre.

A operação **intersecção** é representada por  $\mathbf{AB}$  e significa que ambos os acontecimentos  $A$  e  $B$  ocorrem.

Para calcular a probabilidade  $p(A + B)$ , suponha que  $a$  dos  $n$  resultados do espaço  $E$  formam o acontecimento  $A$ ;  $b$  dos  $n$  resultados definem o acontecimento  $B$ ; e  $c$  dos resultados originam  $A$  e  $B$ .

A probabilidade da intersecção é

$$p(AB) = \sum_{i=1}^c p(x_i)$$

e

$$p(A + B) = \sum_{j=1}^a p(x_j) + \sum_{k=1}^b p(x_k) - \sum_{i=1}^c p(x_i)$$

ou seja

$$p(A + B) = p(A) + p(B) - p(AB)$$

que é a **lei aditiva da probabilidade**.

Suponha que o acontecimento  $A$  não pode ocorrer se o acontecimento  $B$  ocorrer, ou vice-versa. Estes acontecimentos dizem-se *mutuamente exclusivos*, isto é, nunca podem ocorrer simultaneamente os dois acontecimentos e  $p(AB) = 0$ . Assim, neste caso, temos

$$p(A + B) = p(A) + p(B).$$

Em relação ao acontecimento composto  $AB$ , se, a ocorrência do acontecimento  $A$  não vai afectar de maneira nenhuma a ocorrência de  $B$  e vice versa, os acontecimentos dizem-se **independentes**. Para acontecimentos independentes

$$p(AB) = p(A)p(B).$$

Esta propriedade pode ser generalizada para qualquer número de acontecimentos independentes.

Por vezes, é necessário calcular a probabilidade de ocorrência do acontecimento  $B$ , dado que o acontecimento  $A$  ocorreu. Esta situação pressupõe que a ocorrência de  $A$  irá afectar, de alguma maneira, a ocorrência de  $B$ ; isto é, os acontecimentos  $A$  e  $B$  são **dependentes**. Neste caso

$$p(AB) = p(A)p(B/A).$$

A quantidade  $p(B/A)$  corresponde à **probabilidade condicional do acontecimento  $B$ , dado que ocorreu o acontecimento  $A$** . Esta probabilidade pode ser calculada a partir de

$$p(B/A) = \frac{p(AB)}{p(A)}$$

desde que  $p(A) \neq 0$ .

**Teorema 1** (Teorema de Bayes): Suponha que uma experiência aleatória tem  $n$  resultados possíveis mutuamente exclusivos  $A_1, A_2, \dots, A_n$  e que existe um acontecimento  $B$ , para o qual  $p(B) \neq 0$ . Então a probabilidade condicional da ocorrência de  $A_i$ , dado que o acontecimento  $B$  ocorreu, é dada por

$$p(A_i/B) = \frac{p(B/A_i)p(A_i)}{\sum_{j=1}^n p(B/A_j)p(A_j)}.$$

### 5.1.4 Funções de probabilidade

Para uma variável aleatória discreta  $X$ , que pode tomar os valores  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ , as probabilidades  $p(x_i)$  (ou  $f(x_i)$ ) formam a **distribuição das probabilidades** de  $X$ . Como já foi referido na secção 5.1.2., estas probabilidades satisfazem as leis básicas de probabilidade:

$$0 \leq f(x_i) \leq 1, i = 1, 2, \dots, n$$

e

$$\sum_{i=1}^n f(x_i) = 1.$$

Esta função  $f(x)$  é conhecida por **função de probabilidade** da v.a.  $X$ .

Considere o exemplo de um sistema com três linhas de comunicação e a experiência aleatória que consiste em verificar quais as linhas que estão a funcionar em certos instantes seleccionados aleatoriamente. O espaço amostral é

$$E = \{(0, 0, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1), (1, 1, 1)\}$$

e se as probabilidades associadas a cada um dos resultados em  $E$  forem

$$P = \{0.25, 0.15, 0.15, 0.15, 0.09, 0.09, 0.09, 0.03\},$$

a v.a.  $X$  (= número de canais a funcionar) tem a distribuição de probabilidades representada na tabela 5.2. Na 1ª coluna estão os possíveis valores de  $X$  ( $= y_j$ ), a 2ª tem as probabilidades calculadas para cada valor da variável e a última coluna tem as probabilidades acumuladas.

A figura 5.1 apresenta o gráfico da função das probabilidades.

Por vezes, interessa-nos conhecer a probabilidade de uma v.a.  $X$  tomar um valor *menor ou igual a uma certa quantidade*,  $x_i$ . Designando esta probabilidade por  $F(x_i)$ , temos

$$P(X \leq x_i) = F(x_i) = \sum_{k=1}^i f(x_k)$$

e é conhecida por **função de probabilidade acumulada** associada a  $x_i$ .

Considerando ainda, o exemplo anterior das três linhas de comunicação, se quiséssemos calcular a probabilidade de ter dois ou menos canais a funcionar, então

$$P(X \leq 2) = F(2) = f(0) + f(1) + f(2) = 0.97.$$

Probabilidades acumuladas $F_X(x_i)$		
Valor possível	Probabilidade	Probabilidades acumuladas
$x_i$	$f_X(x_i)$	$F_X(x_i)$
0	0.25	0.25
1	0.45	0.70
2	0.27	0.97
3	0.03	1.00

Figura 5.1: Probabilidades [5]

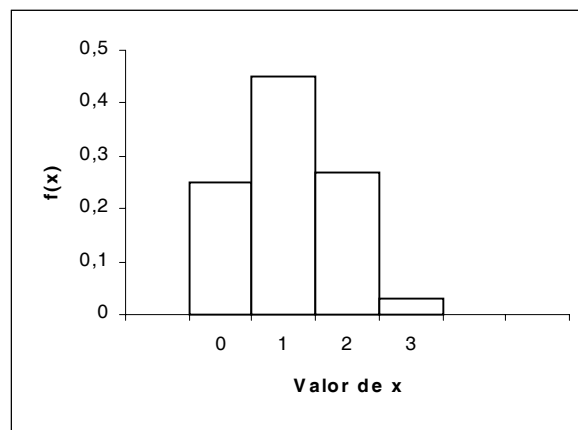


Figura 5.2: Gráfico da função das probabilidades [5]

Ou, se quiséssemos a probabilidade de ter mais do que um canal a funcionar, então

$$P(X > 1) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - [f(0) + f(1)] = 0.30.$$

A figura 5.3 mostra o gráfico das probabilidades acumuladas.

Se a v.a.  $X$  for contínua, a probabilidade de  $X$  tomar um valor específico é igual a zero, em virtude de

$$P(a \leq x \leq a) = \int_a^a f(t)dt = 0$$

sendo  $f(t)$  a função de probabilidade, que quando  $X$  é uma v.a. contínua se chama **função densidade de probabilidade**.

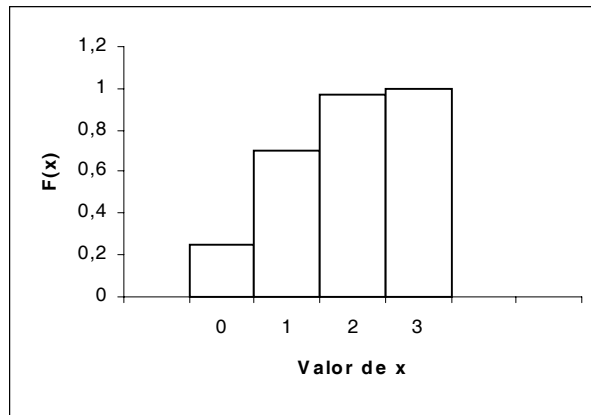


Figura 5.3: Gráfico das probabilidades acumuladas [5]

A função distribuição *acumulada* de uma v.a. contínua é definida por

$$P(X \leq s) = F(s) = \int_{-\infty}^s f(x)dx$$

e

$$\begin{aligned} P(r \leq X \leq s) &= F(s) - F(r) \\ &= \int_r^s f(x)dx. \end{aligned}$$

Daqui se tira que

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx}.$$

Na figura 5.4 apresentamos um exemplo de uma função distribuição acumulada de uma variável contínua.

A função distribuição acumulada goza das seguintes propriedades:

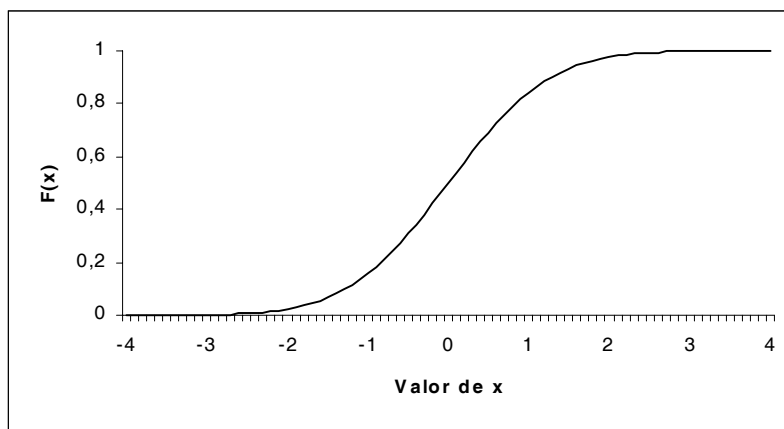


Figura 5.4: Exemplo de função de distribuição acumulada

1.  $F(-\infty) = 0$
2.  $F(\infty) = 1$
3.  $F(x)$  é uma função não decrescente, de  $x$
4.  $F(x)$  é uma função contínua à direita de cada valor de  $x$ .

Resumindo, as relações existentes entre as duas funções *de (densidade de) probabilidade* e *de distribuição acumulada*, respectivamente para os casos discreto e contínuo são:

- $f(x_i) = P(X = x_i)$
- $F(x) = \sum_{x_i \leq x} f(x_i)$
- $P(A) = \sum_{x_i \in A} f(x_i)$
- $\sum_{all\ i} f(x_i) = 1$
- $f(x_i) = F(x_i) - F(x_{i-1})$ ;

e

- $f(x)dx = P(x < X < x + dx)$
- $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt$
- $P(A) = \int_A f(t)dt$
- $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

- $f(x) = F'(x)$ .

Considere a função densidade de probabilidade  $f(x_1, x_2)$  de duas v.a.  $X_1$  e  $X_2$ . A partir de agora chamar-lhe-emos **função densidade de probabilidade conjunta** de  $X_1$  e  $X_2$ , quando ela envolver, em conjunto, *mais do que uma variável*.

Considere o acontecimento,

A1:  $a < X_1 < b, a < b$

e um equivalente a ele,

A2:  $a < X_1 < b, -\infty < X_2 < \infty$ ,

no sentido de que o acontecimento A1 pode ocorrer se e só se o acontecimento A2 ocorrer.

Para conhecer a probabilidade da ocorrência de A1 podemos calcular  $P(A2)$ , pois os conjuntos são equivalentes. Assim,

$$P(A2) = p(a < X_1 < b, -\infty < X_2 < \infty) = \int_a^b \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2) dx_2 dx_1$$

para o caso contínuo, ou

$$P(A2) = \sum_a^b \sum_{-\infty}^{\infty} f(x_{1i}, x_{2j})$$

para o caso discreto.

Em ambos os casos:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2) dx_2$$

e

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, x_{2j})$$

são funções só de  $x_1$ ,  $f_1(x_1)$  e são funções densidade de probabilidade de  $X_1$ , conhecidas por **funções densidade de probabilidade marginais** de  $X_1$  e obtêm-se calculando o integral (no caso contínuo), ou o somatório (no caso discreto) de  $f(x_1, x_2)$ , para todos os valores possíveis de  $x_2$ , conservando  $x_1$  fixo.

Do mesmo modo

$$f_2(x_2) = \int_a^b f(x_1, x_2) dx_1$$

ou

$$= \sum_a^b f(x_{1i}, x_2)$$

são f.d.p. marginais de  $X_2$ .

**Teorema 2** *Duas v.a.  $X_1$  e  $X_2$  com f.d.p. conjunta  $f(x_1, x_2)$  são estocasticamente independentes se e só se  $f(x_1, x_2)$  pode ser considerado como um produto de uma função não negativa só de  $x_1$  por outra função não negativa só de  $x_2$ . Isto é,*

$$f(x_1, x_2) = f_1(x_1)f_2(x_2),$$

em que  $f_1(x_1) > 0$  e  $f_2(x_2) > 0$ .

### 5.1.5 Distribuição de funções de variáveis aleatórias

Um dos métodos mais usados para calcular a *função distribuição* de uma variável aleatória que é função de várias variáveis,  $U = u(X_1, X_2, \dots, X_n)$ , recorre à *técnica da função distribuição* e consiste em:

Se  $X_1, X_2, \dots, X_n$  forem as variáveis aleatórias, a função distribuição da variável  $U = u(X_1, X_2, \dots, X_n)$  calcula-se usando a definição

$$F(u) = P[u(X_1, X_2, \dots, X_n) \leq u].$$

Embora pareça uma expressão muito simples, este processo, por vezes, torna-se muito trabalhoso.

Um método alternativo, para o cálculo da função distribuição de uma função de várias variáveis, é o que recorre à *mudança de variáveis*.

- **Transformação de variáveis - caso discreto**

O método que recorre à *mudança de variáveis* consiste no seguinte:

Seja  $X$  uma variável aleatória do tipo discreto, com função de probabilidade igual a  $f_X(x)$ .

Seja  $A$  o conjunto discreto de valores, para os quais  $f_X(x) > 0$  e seja a variável aleatória  $U$ , definida por  $U = u(x)$  uma transformação unívoca que *aplica*  $A$  em  $B$ .

Se resolvermos  $U = u(x)$  em ordem a  $x$ , como função de  $u$ , isto é, se  $x = w(u)$ , então, para cada

$$u \in B \text{ temos } x = w(u) \in A.$$

Os acontecimentos  $U = u$  (ou  $u(X) = u$ ) e  $X = w(u)$  são equivalentes.

A função de probabilidade de  $U$  é então:

$$f_U(u) = P[U = u] = P[X = w(u)] = f_X[w(u)], \quad u \in B.$$

Se estendermos esta técnica ao caso bidimensional, teremos:

Seja  $f_X(x_1, x_2)$  a função de probabilidade conjunta de duas variáveis aleatórias discretas  $X_1$  e  $X_2$ , em que o conjunto  $A$  é definido pelos valores (a duas dimensões) para os quais  $f_X(x_1, x_2) > 0$ .

Sejam  $u_1 = U_1(x_1, x_2)$  e  $u_2 = U_2(x_1, x_2)$  duas transformações unívocas que *aplicam*  $A$  em  $B$ . A *função de probabilidade conjunta* das duas novas variáveis  $u_1$  e  $u_2$  é dada por:

$$f_U(u_1, u_2) = f_X[w_1(u_1, u_2), w_2(u_1, u_2)]$$

para  $(u_1, u_2) \in B$  sendo,

$$x_1 = w_1(u_1, u_2)$$

e

$$x_2 = w_2(u_1, u_2)$$

as funções inversas (únicas) de  $u_1 = U_1(x_1, x_2)$  e  $u_2 = U_2(x_1, x_2)$ .

A partir da função de probabilidade conjunta  $f_U(u_1, u_2)$  podemos calcular as *funções de probabilidade marginais* de  $U_1$ , somando em relação a  $u_2$  ou a de  $U_2$ , somando em relação a  $u_1$ .

Interessa ainda assinalar que esta técnica da mudança de variáveis envolve a *introdução* (definição) de tantas variáveis *novas* como as antigas.

### • Transformação de variáveis - caso contínuo

Este processo de transformação de variáveis do tipo contínuo tem algumas semelhanças com o processo descrito para as variáveis discretas. Assim:

Considere a variável aleatória  $U = u(X)$  em que  $u = u(x)$  define uma transformação unívoca que *aplica* o conjunto  $A$  em  $B$ . Seja a inversa de  $u = u(x)$  a função:  $x = w(u)$ ; e seja ainda a derivada  $\frac{dx}{du} = w'(u)$  uma função contínua e não nula para todos os pontos  $u$  de  $B$ . Então a *função densidade de probabilidade* da variável aleatória  $U = u(X)$  é dada por

$$f_U(u) = f_X[w(u)]|w'(u)|, u \in B,$$

em que  $|w'|$  representa o valor absoluto de  $w'$ . A derivada  $J = w'$  é conhecida como o Jacobiano da transformação.

A extensão da técnica da mudança de variáveis ao caso de duas variáveis aleatórias contínuas é semelhante à adoptada para as variáveis discretas.

A definição anterior é estendida a duas variáveis:

Se  $U_1 = u_1(X_1, X_2)$  e  $U_2 = u_2(X_1, X_2)$ , e como os acontecimentos

$$(X_1, X_2) \in A \text{ e } (U_1, U_2) \in B$$

são equivalentes, temos

$$P[(U_1, U_2) \in B] = P[(X_1, X_2) \in A] = \int_A \int f_X(X_1, X_2) dx_1 \, dx_2.$$

A mudança de variáveis envolve o cálculo das funções inversas:

$$x_1 = w_1(u_1, u_2) \text{ e } x_2 = w_2(u_1, u_2)$$

e

$$\int_A \int f_X(x_1, x_2) dx_1 \, dx_2 = \int_B \int f_X(w_1(u_1, u_2), w_2(u_1, u_2)) |J| du_1 \, du_2$$



sendo  $|J|$  o determinante do Jacobiano,

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u_1} & \frac{\partial x_1}{\partial u_2} \\ \frac{\partial x_2}{\partial u_1} & \frac{\partial x_2}{\partial u_2} \end{pmatrix}$$

e

$$f_X(w_1, w_2) = f_U(u_1, u_2)$$

a função densidade de probabilidade conjunta de  $u_1$  e  $u_2$ .

## 5.2 Esperança Matemática

O conceito de **valor esperado** ou **esperança matemática** é importante para o cálculo de certas quantidades, conhecidas por *parâmetros* de uma distribuição.

O valor esperado de uma função  $g(X)$  da v.a.  $X$  é definido por:

- no caso discreto

$$E[g(X)] = \sum_{i=1}^n g(x_i) f(x_i)$$

em que  $f(x_i)$  é a probabilidade (da distribuição de probabilidades) associada ao valor  $x_i$ ;

- no caso contínuo

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x) dx$$

em que  $f(x)$  é a função densidade de probabilidade de  $X$ . Desta definição, podemos calcular:

1. o **valor médio** ou **média** da distribuição, ou esperança matemática da v.a.  $X$ ,

$$\mu = E[X] = \sum_{i=1}^n x_i f(x_i)$$

se  $X$  for discreta, ou

$$\mu = E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

se for contínua.

2. a **variância** da distribuição de  $X$ ,

$$\sigma^2 = var[X] = \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 f(x_i)$$

se  $X$  for uma variável discreta, ou

$$\sigma^2 = \text{var}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f(x) dx$$

se for contínua.

Uma forma mais conveniente para o cálculo da variância pode ser deduzida a partir das fórmulas anteriores:

$$\text{var}[X] = E[X^2] - (E[X])^2.$$

Alguns resultados elementares que envolvem os conceitos de média e variância:

- (a)  $E[c] = c$
- (b)  $\text{var}[c] = 0$
- (c)  $E[cX] = cE[X]$
- (d)  $\text{var}[cX] = c^2 \text{var}[X]$
- (e)  $E[X_1 + X_2 + \dots + X_n] = E[X_1] + E[X_2] + \dots + E[X_n]$
- (f)  $\text{var}[X_1 \pm X_2] = \text{var}[X_1] + \text{var}[X_2] \pm 2\text{cov}[X_1, X_2]$

em que

$$\begin{aligned} \text{cov}[X_1, X_2] &= E[(X_1 - \mu_1)(X_2 - \mu_2)] \\ &= E[X_1 X_2] - \mu_1 \mu_2 \end{aligned}$$

é a *covariância* das duas v.a.  $X_1$  e  $X_2$ ;  $\mu_1$  e  $\mu_2$  são respectivamente as médias de  $X_1$  e  $X_2$  e  $c$  é uma constante.

Existem ainda mais três resultados muito importantes:

- (g)  $\text{var}[X_1 X_2] = (E[X_1])^2 \text{var}[X_2] + (E[X_2])^2 \text{var}[X_1] + \text{var}[X_1] \text{var}[X_2]$
- (h)  $E[X_1 X_2 \dots X_n] = E[X_1] E[X_2] \dots E[X_n]$
- (i)  $\text{var}[X_1 + X_2 + \dots + X_n] = \text{var}[X_1] + \text{var}[X_2] + \dots + \text{var}[X_n]$   
que só se verificam se as v.a. envolvidas forem *estocasticamente independentes*.

3. a **função geradora de momentos**,  $M(t)$ , de um v.a.  $X$  é definida por:

$$E[\exp(tX)] = \sum_{i=1}^n \exp(tx_i) f(x_i)$$

se a v.a. for discreta, ou

$$E[\exp(tX)] = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(tx) f(x) dx$$

se  $X$  for uma v.a. contínua, sendo  $t$  uma quantidade real, com  $-h < t < h$ , para  $h$  positivo.

Se  $t = 0$  então  $M(0) = 1$ .

A função geradora de momentos (f.g.m.) é única e define completamente a distribuição da v.a.  $X$ . No entanto, nem todas as distribuições têm f.g.m.. A sua existência implica que todas as suas derivadas existam para  $t = 0$ .

Assim

$$\frac{dM(t)}{dt} = M'(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x \exp(tx) f(x) dx$$

para variáveis contínuas, ou

$$\frac{dM(t)}{dt} = M'(t) = \sum_{i=1}^n x_i \exp(tx_i) f(x_i)$$

para as discretas.

Fazendo  $t = 0$ , em ambos os casos, temos

$$M'(0) = E[X].$$

Também chegaríamos a que

$$M''(0) = E[X^2]$$

e

$$\text{var}[X] = M''(0) - (M'(0))^2.$$

Se  $m$  é uma quantidade inteira e positiva e se  $M^{(m)}(t)$  representa a derivada de ordem  $m$  de  $M(t)$  em ordem a  $t$ , então

$$M^{(m)}(0) = E[X^m]$$

sendo conhecido por *momento de ordem  $m$* , centrado na origem, da distribuição.

4. Em virtude de muitas distribuições não terem f.g.m. define-se uma nova esperança matemática  $E[\exp(itX)]$ , conhecida por **função característica** (f.c.)  $\phi(t)$ .  $t$  é uma quantidade real e  $i$  é a unidade imaginária.

Esta esperança matemática existe para todas as distribuições e é única, isto é, toda a distribuição tem uma única f.c. e a cada f.c. corresponde uma única distribuição de probabilidades.

Se  $X$  é uma v.a. com f.c.  $\phi(t)$  e se existirem  $E[X]$  e  $E[X^2]$  então

$$\phi'(0) = iE[X]$$

$$\phi''(0) = i^2 E[X^2].$$

Podemos ainda usar a seguinte igualdade  $\phi(t) = M(it)$ .

### 5.3 Funções de distribuição discretas

Definida uma variável aleatória  $X$  e enumerando os resultados do *espaço amostral*  $E$ , que originaram aquele valor particular  $x_i$  e somando as probabilidades daqueles resultados, podemos calcular (por enumeração) a probabilidade de  $X$  tomar o valor  $x_i$ .

É possível atingir o mesmo objectivo, construindo um *modelo matemático*, a partir do qual se determinam essas probabilidades.

Veremos a seguir alguns destes modelos probabilísticos.

#### 5.3.1 Tentativas de Bernoulli

Uma **tentativa de Bernoulli** é um acontecimento aleatório que pode tomar apenas dois valores. Estes dois valores, resultados de uma experiência, são normalmente representados por *sucesso* e *falha*; usa-se o 1 para codificar sucesso e o 0 para codificar falha. São exemplos, o lançamento de uma moeda e a inspecção de componentes defeituosos numa linha de montagem.

O modelo probabilístico que representa este acontecimento, é

$$p(X = x) = f(x) = p^x q^{1-x},$$

para  $x = 0, 1$ , em que  $p$  é a probabilidade de ocorrência de um sucesso e  $q = 1 - p$  é a probabilidade de insucesso ou falha.

A variável aleatória  $X$  toma precisamente os valores do acontecimento  $x$ . A função  $f(x)$  é conhecida por *função de probabilidade* (f.p.) de  $X$ .

Adoptaremos a notação simplificada  $X \sim B(p)$  para representar que a variável  $X$  segue a distribuição de Bernoulli, com parâmetro  $p$ .

A figura 5.5 mostra um histograma para uma distribuição deste tipo, em que  $f(0) = 0.9$  e  $f(1) = 0.1$ :

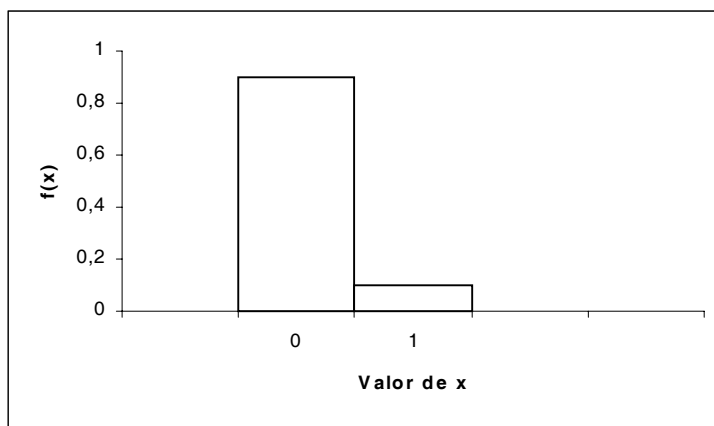


Figura 5.5: Histograma de uma distribuição de Bernoulli [5]

### 5.3.2 Distribuição binomial

Uma v.a.  $X$  diz-se **binomial** se representa o número de sucessos ocorridos em  $n$  tentativas independentes de Bernoulli.

O termo *independente* significa que o resultado de uma tentativa da experiência aleatória de nenhuma maneira afecta o resultado de outra tentativa qualquer.

O modelo probabilístico binomial é representado por

$$p(X = x) = f(x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x},$$

para  $x = 0, 1, \dots, n$ , em que  $p$  é a probabilidade de sucesso e  $p + q = 1$ .

A expressão  $\binom{n}{x}$  representa a *combinação de  $n$  coisas tomadas  $x$  de cada vez* e é dada por

$$\binom{n}{x} = \frac{n!}{x!(n-x)!}.$$

Este termo no modelo dá o número de valores do conjunto inteiro (espaço da amostra) que são iguais a  $x$ . Valores de  $\binom{n}{x}$  podem ser retirados da tabela A.2 do Apêndice. O termo  $p^x q^{n-x}$  dá a probabilidade de ocorrência de cada um daqueles valores.

Considerando um exemplo, em que  $n = 4$  e  $p = 0.1$ , a distribuição das probabilidades binomiais de  $x$ , bem como as probabilidades acumuladas estão representadas na tabela da figura 5.6, o respectivo histograma encontra-se na figura 5.7.

A média da distribuição binomial é

$$\mu = np$$

e a variância

$$\sigma^2 = npq.$$

Do modelo probabilístico binomial, da sua média e da sua variância conclui-se que esta distribuição fica totalmente especificada se conhecermos o número de tentativas independentes  $n$  e a probabilidade de sucesso  $p$  em cada tentativa. Estas quantidades são conhecidas por **parâmetros** da distribuição.

A notação simplificada para representar uma v.a.  $X$  que segue esta distribuição binomial é  $X \sim b(n, p)$ .

A tabela A.3 do Apêndice apresenta uma selecção de valores da distribuição de probabilidades binomial.

### 5.3.3 Distribuição binomial negativa

Considere uma sequência de experiências aleatórias repetidas com probabilidade constante de sucesso  $p$ .

Seja  $X$  uma v.a. definida pelo *número total de falhas que ocorrem, nesta sequência, antes do sucesso de ordem  $r$* , isto é,  $X + r$  representa o número de tentativas realizadas até conseguirmos  $r$  sucessos. A quantidade  $r$  é inteira e positiva.

Distribuição de probabilidade de uma binomial da inspecção de partes manufacturadas, $n = 4$ , $p = 0.1$		
Valor possível	Probabilidade	Frequência Acumulada
$x_i$	$f_X(x_i)$	$F_X(x_i)$
0	0.6561	0.6561
1	0.2916	0.9477
2	0.0486	0.9963
3	0.0036	0.9999
4	0.0001	1.0000

Figura 5.6: Distribuição das probabilidades binomiais e probabilidades acumuladas [5]

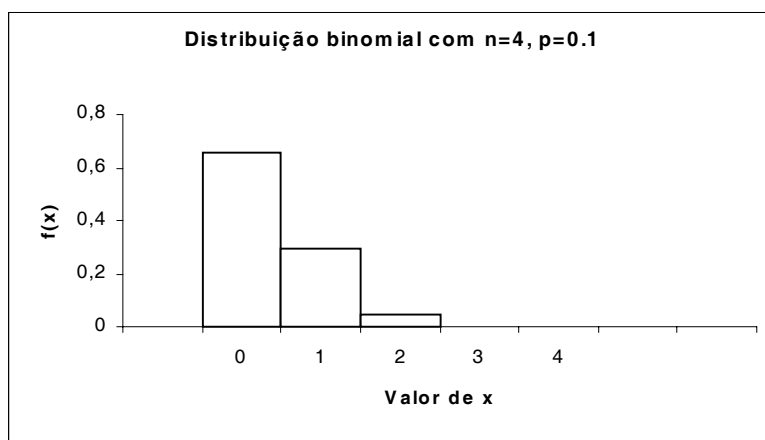


Figura 5.7: Histograma de uma distribuição binomial [5]

A f.p. da v.a.  $X$  é dada por

$$p(X = x) = f(x) = \binom{x+r-1}{r-1} p^r (1-p)^x$$

para  $x = 0, 1, 2, \dots$  e representa o produto da probabilidade de obter exactamente  $r - 1$  sucessos nas primeiras  $x + r - 1$  tentativas (distribuição binomial  $b(x + r - 1, p)$ , com  $r - 1$  sucessos) pela probabilidade  $p$  de um sucesso na  $(x + r)$ ésima tentativa.

Uma distribuição com a f.p. definida atrás chama-se **distribuição binomial negativa**, ou distribuição binomial do tempo de espera. A sua média é

$$\mu = \frac{r}{p}$$

e a variância

$$\sigma^2 = \frac{r}{p} \left( \frac{1}{p} - 1 \right).$$

Se  $r = 1$ , então a v.a.  $X$ , que representa o número de falhas que ocorrem até o aparecimento do 1º sucesso, tem f.p.

$$p(X = x) = f(x) = p(1 - p)^x$$

para  $x = 0, 1, 2, \dots$  e diz-se que segue a **distribuição geométrica**.

A notação simplificada para representar uma v.a.  $X$  que segue a distribuição binomial negativa é  $X \sim bn(p, r)$ .

### 5.3.4 Distribuição de Poisson

A **distribuição de Poisson** é uma das mais importantes na análise de experiências. O modelo matemático que descreve esta distribuição é:

$$p(X = x) = f(x) = \frac{\exp(-\lambda) \lambda^x}{x!},$$

para  $x = 0, 1, 2, \dots$  e  $\lambda > 0$ .

Este modelo descreve processos aleatórios, tais como, o número de chamadas telefónicas, que chegam a uma central, por minuto; o número de acidentes de comboio, num certo intervalo de tempo; o número de participações feitas a uma companhia de seguros, por unidade de tempo; o número de defeitos por 1000 metros de cabo eléctrico e o número de defeitos por linha de montagem.

*Sempre que a probabilidade de ocorrência de um acontecimento é grande, mas a probabilidade dessa ocorrência num dado intervalo de tempo (pequeno) é relativamente pequena, usamos o modelo de Poisson.*

A média desta distribuição é dada por

$$\mu = \lambda$$

e a variância

$$\sigma^2 = \lambda.$$

A notação simplificada para representar uma v.a.  $X$  que segue esta distribuição de Poisson é  $X \sim P(\lambda)$ .

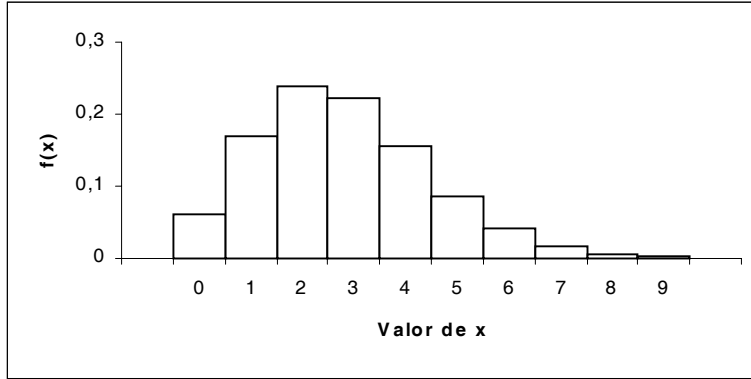


Figura 5.8: Histograma da distribuição de Poisson com  $\lambda = 2.8$  [5]

A tabela A.4 do Apêndice A apresenta uma selecção de valores da distribuição de probabilidades de Poisson.

**Exemplo 5.3.1** *Considere um processo em que a média da razão de ocorrência do acontecimento é 2.8; assim, a média e a variância desta distribuição são 2.8.*

*A figura 5.8 mostra o histograma relativo a este processo.*

### 5.3.5 Aproximação de Poisson à distribuição binomial

A distribuição de Poisson pode também ser usada para aproximar probabilidades binomiais quando a distribuição é nitidamente não simétrica.

Considere um processo de Poisson caracterizado pelo parâmetro  $\lambda$ , que representa o número médio de acontecimentos, por unidade de tempo. Seja  $Y$  uma variável aleatória que representa o número de chegadas num intervalo  $(0, t)$  e divida-se este intervalo em  $n$  partes iguais, de comprimento  $h = t/n$ . Considere  $n$  tentativas de Bernoulli correspondentes aos  $n$  subintervalos - "o sucesso" corresponde à ocorrência de um acontecimento no subintervalo e "a falha" corresponde à não ocorrência.

Quando  $n$  aumenta indefinidamente, o  $h$  aproxima-se de 0; e assim, para pequenos valores de  $h$  é aproximadamente verdadeiro que um ou nenhum acontecimento ocorre no intervalo de comprimento  $h$ , com probabilidades respectivamente iguais a:

$$p = P[1 \text{ acontecimento em } h] = \lambda h$$

$$1 - p = P[\text{nenhum acontecimento em } h] = 1 - \lambda h.$$



Haverá  $k$  chegadas no intervalo  $(0, t)$  se ocorrer uma em cada um dos  $k$  subintervalos. A probabilidade desta ocorrência é binomial:

$$P[\text{ } k \text{ "sucessos" em } n \text{ tentativas}] = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Substituindo  $p = \lambda h$  por  $\lambda t/n$ , temos

$$P[\text{ } k \text{ acontecimentos em } (0, t)] = \binom{n}{k} \left(\frac{\lambda t}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda t}{n}\right)^{n-k}$$

que, quando  $n$  tende para infinito, tende para

$$P[Y = k] = P[\text{ } k \text{ acontecimentos em } (0, t)] = \frac{(\lambda t)^k}{k!} \exp(-\lambda t).$$

Assim, para valores grandes de  $n$  e pequenos de  $p$ , podemos aproximar a probabilidade binomial caracterizada pelos parâmetros  $n$  e  $p$ , pela probabilidade de Poisson, em que  $m = \lambda t = np$  é a média das duas distribuições.

## 5.4 Funções de distribuição contínuas

Existem várias distribuições contínuas que surgem de processos físicos e que nos interessam do ponto de vista experimental. Estas são as distribuições *uniforme*, *exponencial*, *gama* e *normal*.

Outras distribuições contínuas de interesse prioritário na análise de resultados de experiências, pelo facto de estarem envolvidas com certas 'estatísticas' no processo de amostragem, são: *Qui-quadrado*, *t de Student* e *F de Fisher/Snedecor*.

### 5.4.1 Distribuição uniforme

Considere uma v.a.  $X$  que pode tomar qualquer valor do intervalo  $a \leq X \leq b$ , com igual probabilidade. Neste caso diz-se que a variável segue a **distribuição uniforme** dada por

$$f(x) = \frac{1}{(b-a)}, \quad \text{se } a \leq x \leq b$$

com  $-\infty < a < b < \infty$ .

Os parâmetros que caracterizam esta distribuição são:  $a$  e  $b$ ; a sua média é

$$\mu = \frac{(a+b)}{2}$$

e a variância

$$\sigma^2 = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

A notação simplificada para representar uma v.a.  $X$  que segue esta distribuição uniforme é  $X \sim u(a, b)$ .

A figura 5.9 ilustra esta função densidade de probabilidade.

Para abreviar, usaremos f.d.p. para designar função densidade de probabilidade de uma variável.

Do ponto de vista da experimentação, a distribuição uniforme no intervalo  $0 \leq X \leq 1$  tem um interesse especial. Ela define um conjunto de *números aleatórios* que são importantes na simulação de Monte Carlo.

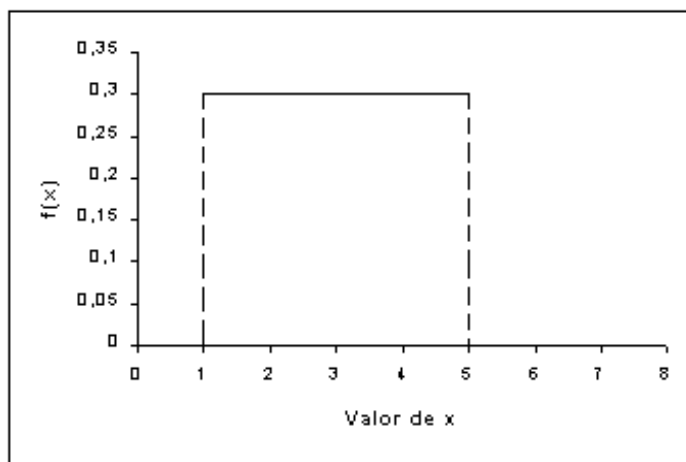


Figura 5.9: Distribuição uniforme com  $a = 1$  e  $b = 5$

### 5.4.2 Distribuição exponencial

Vimos como uma v.a. discreta que definia o número de ocorrências de um acontecimento, num intervalo de tempo, seguia uma distribuição de Poisson com parâmetro  $\lambda$ . Se considerarmos, agora, uma v.a.  $X$ , definida pelo tempo entre sucessivas ocorrências desse acontecimento, então, esta variável segue a **distribuição exponencial**, dada por

$$f(x) = \frac{1}{\beta} \exp\left(-\frac{x}{\beta}\right), \text{ para } x \geq 0$$

em que  $\beta > 0$ .

A figura 5.10 mostra a f.d.p. para a distribuição exponencial.

A função distribuição acumulada desta variável  $X$ , é

$$F(x) = 1 - \exp\left(-\frac{x}{\beta}\right).$$

A quantidade  $\beta$  é o parâmetro que caracteriza esta distribuição; a sua média é

$$\mu = \beta$$

e a variância

$$\sigma^2 = \beta^2.$$

A notação simplificada para representar uma v.a.  $X$  que segue esta distribuição exponencial é  $X \sim e(\beta)$ .

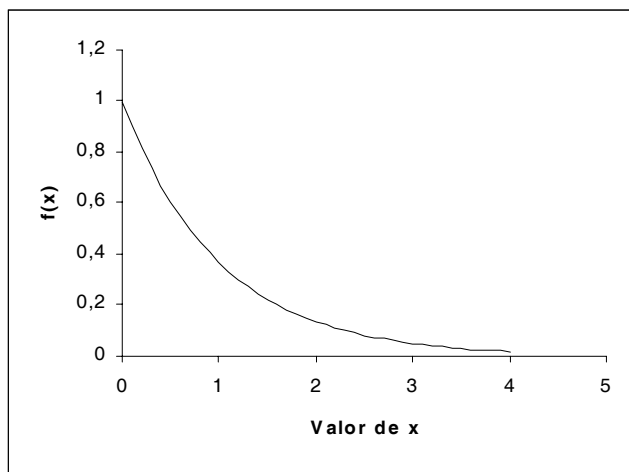


Figura 5.10: Distribuição exponencial com  $\beta = 1$

A Tabela A.5 do Apêndice apresenta valores de  $\exp(x)$  e  $\exp(-x)$ .

A distribuição exponencial é muito importante na teoria da fiabilidade, uma vez que descreve as características da 'vida' de componentes electrónicos. Um aspecto muito importante desta distribuição deve-se ao facto de ela 'não ter memória', isto é, a probabilidade de que um componente terá um tempo de vida  $X$  vezes maior do que outro, é independente da sua idade. Por outras palavras, um componente novo não é melhor do que outro que já esteja a funcionar há 1000 horas

### 5.4.3 Distribuição gama

Uma v.a.  $X$  cuja f.d.p. é dada por

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} x^{(\alpha-1)} \exp\left(-\frac{x}{\beta}\right), \text{ para } x \geq 0$$

diz-se que segue a **distribuição gama**, em que  $\alpha$  e  $\beta$  são constantes positivas. Os parâmetros que caracterizam esta distribuição são:  $\alpha$  e  $\beta$ . A média é

$$\mu = \alpha\beta$$

e a variância

$$\sigma^2 = \alpha\beta^2.$$

A notação simplificada para representar uma v.a.  $X$  que segue esta distribuição gama é  $X \sim G(\alpha, \beta)$ .

A importância desta distribuição deve-se ao facto de ela descrever a distribuição de uma v.a.  $X$ , definida como sendo a soma de  $\alpha$  variáveis aleatórias independentes e igualmente distribuídas (i.i.d.) segundo a exponencial com parâmetro  $\beta$ .

O termo  $\Gamma(\alpha)$  é a função *gama* e é definida por

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} t^{\alpha-1} \exp(-t) dt, \quad \alpha > 0$$

e se  $\alpha$  é um inteiro, a integração por partes do integral dá

$$\Gamma(\alpha) = (\alpha - 1)!$$

Uma distribuição gama com o parâmetro  $\alpha$  inteiro, chama-se *distribuição Erlang*.

Um gráfico de distribuições gama típicas está representado na figura 5.11.

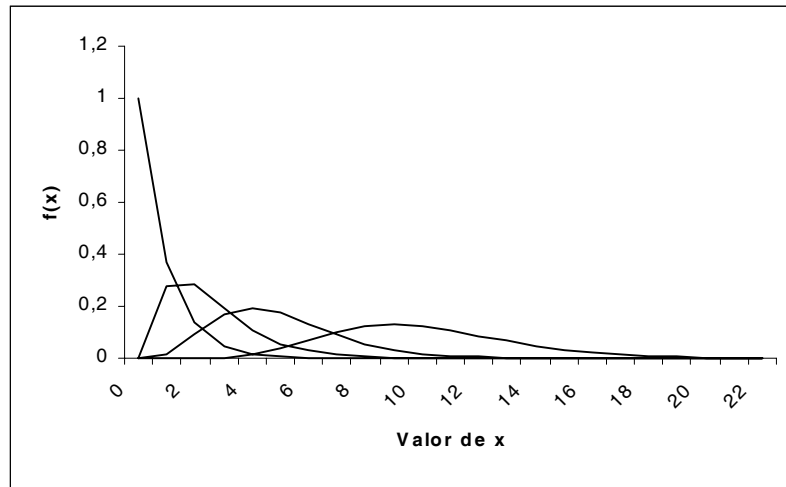


Figura 5.11: Distribuições gama com  $\beta = 1$  e  $\alpha = 1, 2.5, 5, \text{ e } 10$

#### 5.4.4 Distribuição normal

A distribuição de probabilidade contínua mais importante sob o ponto de vista da análise estatística de dados experimentais é provavelmente a **distribuição normal**.

A função densidade de probabilidade de uma v.a.  $X$  normal é definida por

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(\frac{-(x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

para  $-\infty < x < \infty$ .

A distribuição normal tem média  $\mu$  e variância  $\sigma^2$ , positiva. A figura 5.12 representa uma função de probabilidade normal típica. A figura revela uma função simétrica em relação à média  $\mu$  e com a forma de um sino. A notação simplificada para representar uma v.a.  $X$  que segue esta distribuição normal é  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ .

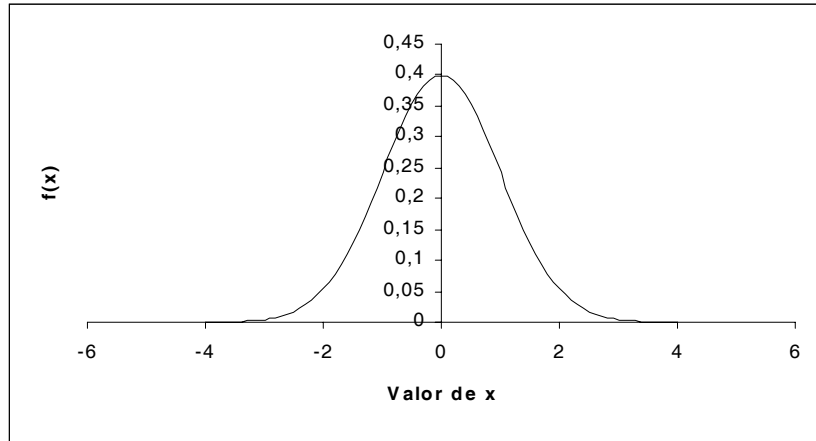


Figura 5.12: Distribuição normal

É possível obter uma forma da distribuição normal mais conveniente, usando os seus parâmetros  $\mu$  e  $\sigma$  (o desvio padrão) para transformar a v.a.  $X$  noutra  $Z$  de acordo com a seguinte relação:

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}.$$

Esta nova distribuição tem média

$$\mu = 0$$

e variância

$$\sigma^2 = 1,$$

e é conhecida por *distribuição normal padrão* ou *estandardizada* e tem como f.d.p.:

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right).$$

A notação simplificada para representar uma v.a.  $Z$  que segue esta distribuição normal padrão é  $Z \sim N(0, 1)$ .

A função distribuição acumulada é

$$F(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt$$

e podemos obter valores a partir da Tabela A.6 do Apêndice.

Para determinar a probabilidade  $P(a \leq z \leq b)$ , usamos a equação

$$P(a \leq z \leq b) = F(b) - F(a).$$

Se um dos valores é negativo podemos usar a identidade

$$F(-z) = 1 - F(z).$$

### 5.4.5 Aproximação normal à distribuição binomial

O Teorema do Limite Central (ver teorema 4) providencia um meio de aproximar as probabilidades binomiais, quando o processo que envolve computação directa se torna muito trabalhoso. Esta aplicação advém do facto de que uma variável aleatória,  $X$ , que segue uma distribuição binomial surge da soma de variáveis independentes e identicamente distribuídas de Bernoulli. Isto é, se  $Y_i = 0$  com probabilidade  $1-p$  e  $Y_i = 1$  com probabilidade  $p$  e se  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$  são independentes, a variável  $X = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n$  tem distribuição binomial com parâmetros  $n$  e  $p$ . Esta distribuição tem média igual a  $np$  e variância igual a  $np(1-p)$ . Para valores grandes de  $n$  e de acordo com o Teorema do Limite Central a variável  $X$ , com distribuição binomial, tem uma distribuição assintótica normal.

Assim, a distribuição normal é uma distribuição contínua que fornece uma aproximação à distribuição binomial, quando  $n$ , o número de tentativas (ou tamanho da amostra), é grande e a probabilidade de sucesso  $p$  é aproximadamente igual a  $1/2$ .

A figura 5.13 apresenta histogramas (gráficos de barras) de distribuições binomiais, com  $p = 1/2$  e  $n = 2, 5, 10$  e  $25$ ; donde se conclui que quanto maior é  $n$ , mais a distribuição se aproxima da forma de um sino, típica da normal.

**Teorema 3** *Se  $X$  é uma v.a. com distribuição binomial com parâmetros  $n$  e  $p$ , então a f.g.m. da v.a.*

$$Z = \frac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}}$$

*aproxima-se da f.g.m. da distribuição normal padrão, quando  $n \rightarrow \infty$ .*

A aproximação normal à binomial usa-se, na prática, mesmo quando o valor de  $n$  não é suficientemente grande, desde que  $p$  esteja próximo de  $0.5$  (normalmente exige-se que  $np$  e  $n(1-p)$  sejam maiores do que  $5$ ). Contudo, quando o valor de  $p$  está próximo de  $0$  ou  $1$ , a distribuição resultante não é simétrica, sendo então necessário um valor grande de  $n$  para que a aproximação seja aceitável.

Devemos também utilizar a *correção contínua*, de acordo com a qual cada quantidade inteira e não negativa  $k$  é representada pelo intervalo  $[k - 1/2, k + 1/2]$ . Assim, para calcular a probabilidade de  $X = k$ , determina-se a área compreendida entre  $k - 1/2$  e  $k + 1/2$ .

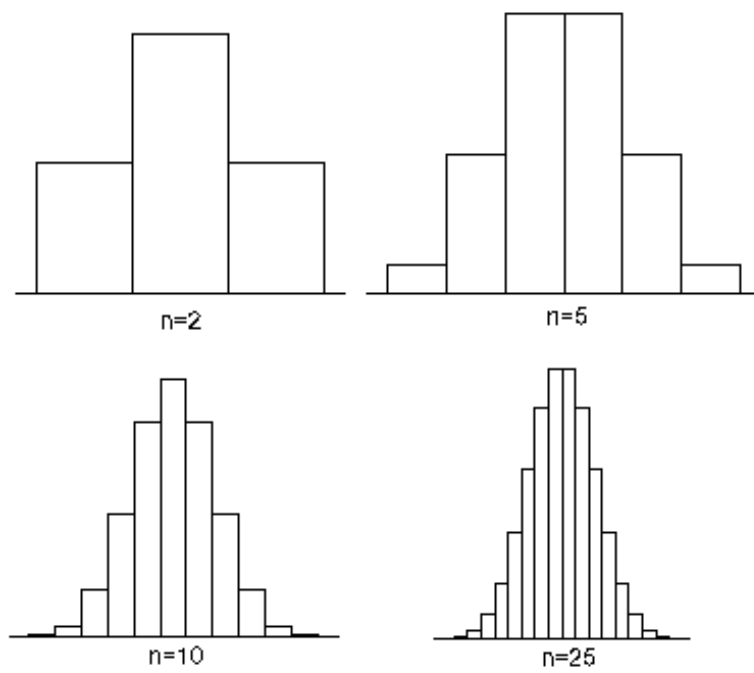


Figura 5.13: Aproximação à normal ( $p = \frac{1}{2}$ ) [8]

### 5.4.6 Distribuição normal bivariada

A **distribuição normal bivariada** é uma distribuição normal a duas dimensões das v.a.  $X_1$  e  $X_2$ . É uma generalização da distribuição normal para uma v.a.  $X$ .

A f.d.p. é dada por

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(\frac{-q}{2}\right)$$

em que  $\mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2$  e  $\rho$  são constantes e

$$q = \frac{1}{(1-\rho^2)} \left[ \left( \frac{x_1 - \mu_1}{\sigma_1} \right)^2 - \frac{2\rho(x_1 - \mu_1)(x_2 - \mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \left( \frac{x_2 - \mu_2}{\sigma_2} \right)^2 \right].$$

O parâmetro  $\rho$  é o *coeficiente de correlação* de  $X_1$  e de  $X_2$  e pode ser calculado a partir de

$$\rho = \frac{E[(X_1 - \mu_1)(X_2 - \mu_2)]}{\sigma_1\sigma_2}.$$

A figura 5.14 mostra a f.d.p. da distribuição normal bivariada.

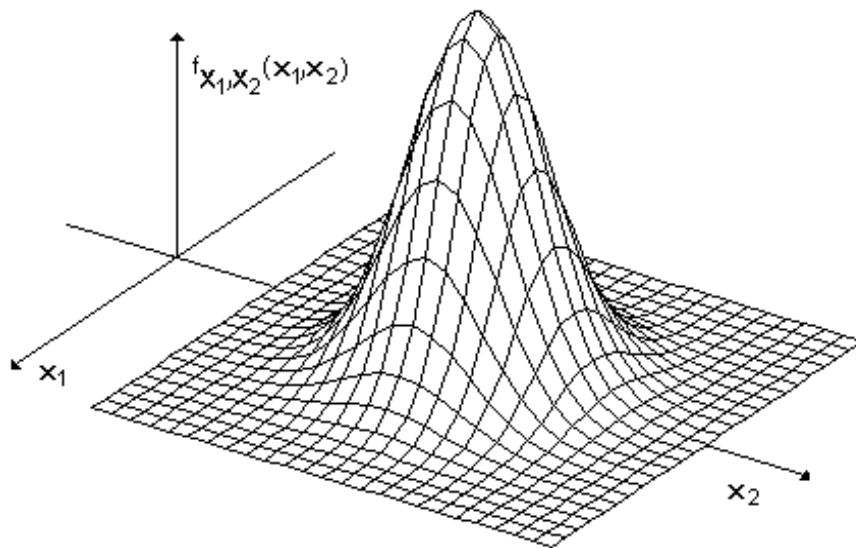


Figura 5.14: Distribuição normal bivariada

Falamos no Capítulo 1 sobre distribuição amostral e 'estatísticas'.

Para explorar o mais possível a informação fornecida pelas 'estatísticas' da amostra é essencial conhecer as distribuições dessas 'estatísticas'. Estudaremos em seguida as três distribuições amostrais mais importantes no planeamento de experiências.

Em muitos processos estatísticos supõe-se que a v.a. segue a distribuição normal. Isto é justificado pela aplicação do seguinte teorema:



**Teorema 4** (*Teorema do Limite Central*): Se  $X_1, X_2, \dots, X_n$  formam uma sequência de  $n$  v.a. independentes, com médias e variâncias respectivamente iguais a  $\mu_i$  e  $\sigma_i^2$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  e se construirmos outra v.a.  $U$ ,

$$U = X_1 + X_2 + \dots + X_n,$$

então a 'estatística'

$$Z = \frac{U - \sum_{i=1}^n \mu_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \sigma_i^2}}$$

tem uma distribuição assintótica  $N(0, 1)$  (isto é, aproxima-se da  $N(0, 1)$  quando  $n \rightarrow \infty$ ).

Deste teorema podemos retirar o seguinte resultado:

- Se  $\bar{X}$  é a média de uma amostra aleatória de tamanho  $n$ , retirada de uma população com média  $\mu$  e variância  $\sigma^2$ , então

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$$

é uma v.a. cuja função densidade de probabilidade aproxima-se da  $N(0, 1)$  quando  $n$  tende para  $\infty$ .

A quantidade  $Z$  é uma 'estatística'. Recorremos constantemente ao uso de 'estatísticas' na análise de experiências. Elas permitem-nos tirar conclusões sobre *populações* baseadas na informação extraída das *amostras* (representativas das populações). Elas são usadas naquilo a que chamamos *Estatística Inferencial*.

### 5.4.7 Distribuição Qui-quadrado

Até agora estivemos a discutir distribuições relacionadas com a 'estatística' média, mas na análise de dados das experiências também nos vai interessar a variância da amostra,  $s^2$ .

Se a população donde foi retirada a amostra é desconhecida, ou se a variância da população  $\sigma^2$  é desconhecida, pouco se sabe sobre a distribuição da 'estatística'  $s^2$ .

No entanto, se  $s^2$  é a variância de uma amostra de tamanho  $n$ , retirada de uma população *normalmente distribuída* com variância  $\sigma^2$ , então a 'estatística'

$$Q = \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2}$$

tem *distribuição Qui-quadrado* com parâmetro *g.l.* =  $n-1$ . O parâmetro desta distribuição, que para simplificar a notação usamos *g.l.*, representa os graus de liberdade.

A distribuição Qui-quadrado é um caso especial da distribuição gama. Fazendo  $\alpha = r/2$ , em que  $r$  é um inteiro positivo, e  $\beta = 2$  na f.d.p. gama, obtém-se a f.d.p.

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(r/2)2^{r/2}} x^{r/2-1} \exp(-x/2), \quad 0 < x < \infty$$

que se chama distribuição **Qui-quadrado**, com  $r$  graus de liberdade. A média desta distribuição é

$$\mu = r$$

e a variância

$$\sigma^2 = 2r.$$

A notação simplificada para representar uma v.a.  $X$  que segue a distribuição Qui-quadrado é  $X \sim \chi^2(r)$ .

A tabela A.7 do Apêndice apresenta valores de  $1 - P(Q \leq q) = 1 - \int_0^q f(x)dx$  para um conjunto seleccionado de valores de  $r$  e  $q$ .

A figura 5.15 apresenta distribuições  $\chi^2$ , para diferentes graus de liberdade.

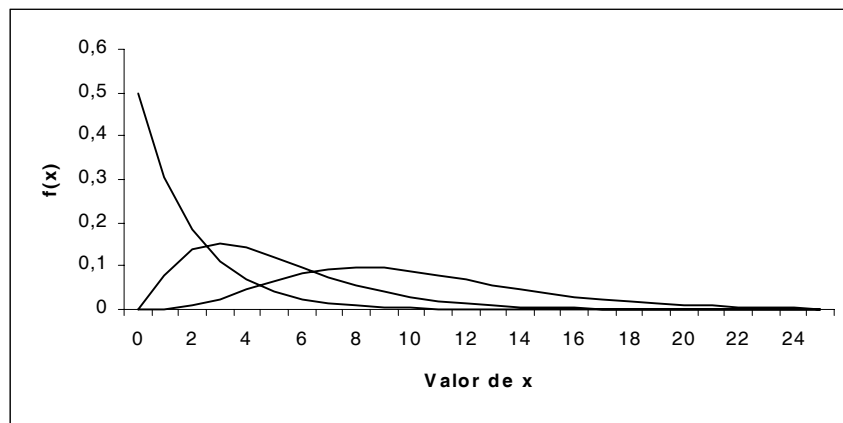


Figura 5.15: Distribuições Qui-quadrado com  $r = 2, 5$  e  $10$

### 5.4.8 Distribuição t-Student

Quando a *variância  $\sigma^2$  da população é conhecida*, a 'estatística'  $Z$  (da página anterior) é muito útil. No entanto, nem sempre se verifica esta condição.

Por exemplo:

- Se  $\sigma^2$  não é conhecido, mas o tamanho da amostra  $n$  **é grande**, podemos explorar o Teorema do Limite Central e simplesmente substituir  $\sigma$  por  $s$  (variância da amostra) e obter

$$Z_1 = \frac{\bar{X} - \mu}{s/\sqrt{n}}.$$

Assim, quando  $n$  é grande e  $\sigma$  não é conhecido esta 'estatística'  $Z_1$  tem aproximadamente uma distribuição  $N(0, 1)$ .

- Quando o desvio padrão  $\sigma$  não é conhecido, mas a amostra é pequena, isto é,  $n$  **é pequeno**, pouco se sabe sobre a distribuição da 'estatística'  $Z_1$ .

- No entanto, se adicionarmos a condição de a amostra ter sido **retirada de uma distribuição normal**, então a 'estatística'  $t$ , definida por

$$t = \frac{\bar{X} - \mu}{s/\sqrt{n}}$$

tem uma *distribuição t-Student* com parâmetro  $g.l. = n - 1$ .

É possível obter outras 'estatísticas' com distribuição t-Student.

Por exemplo:

Seja  $Z$  uma v.a. que segue a distribuição  $N(0, 1)$ . Se  $Q$  for uma v.a. com distribuição  $\chi^2(r)$  e se  $Z$  e  $Q$  forem *estocasticamente independentes*, então a variável aleatória

$$T = \frac{Z}{\sqrt{Q/r}}$$

tem uma f.d.p. dada por

$$f(x) = \frac{\Gamma[(r+1)/2]}{\Gamma(r/2)\sqrt{r\pi}} \frac{1}{(1+x^2/r)^{(r+1)/2}}, \quad -\infty < x < \infty$$

e conhecida por **distribuição t-Student**, com  $r$  graus de liberdade, precisamente o número de graus de liberdade da v.a. com distribuição Qui-quadrado.

A notação simplificada para representar uma v.a.  $X$  que segue a distribuição t-Student com  $r$  g.l. é  $X \sim t(r)$ .

Valores aproximados de

$$1 - P(T \leq t) = 1 - \int_{-\infty}^t f(x)dx$$

para alguns valores seleccionados de  $r$  e  $t$  estão representados na Tabela A.8 do Apêndice.

Tal como a distribuição normal com parâmetros 0 e 1, esta distribuição  $t$  é também simétrica em relação ao 0, isto é, a sua média é 0, mas a sua variância depende de  $g.l.$  e por esta razão do tamanho da amostra  $r$ . A distribuição aproxima-se da normal padrão, quando  $g.l. \rightarrow \infty$ .

A figura 5.16 apresenta o efeito de  $r$  na forma da distribuição t-Student.

### 5.4.9 Distribuição F. Fisher

Por vezes, na análise de dados experimentais é preciso comparar as variâncias de duas amostras aleatórias independentes, para nos certificarmos se as amostras foram retiradas de distribuições com variâncias iguais.

Se  $s_1^2$  e  $s_2^2$  são as variâncias de duas amostras independentes de tamanhos respectivamente iguais a  $n_1$  e  $n_2$ , retiradas de duas *distribuições normais com a mesma variância*, então a 'estatística'

$$F = \frac{s_1^2}{s_2^2}$$

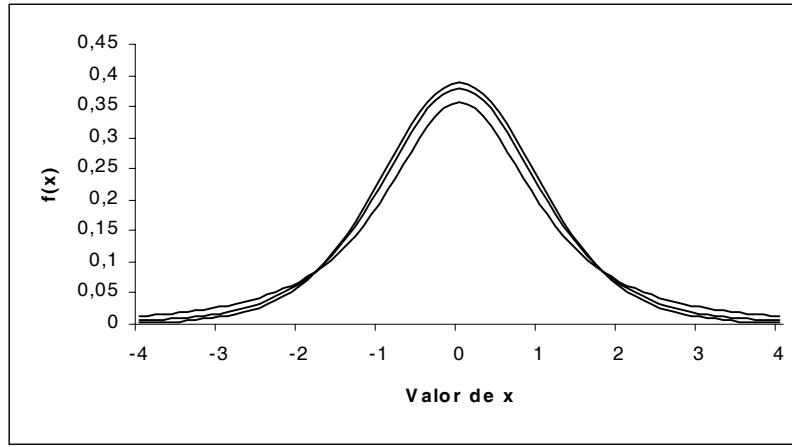


Figura 5.16: Distribuições t-student com  $r = 2, 5$  e  $10$

segue a **distribuição F de Fisher/Snedecor** com parâmetros  $g.l._1 = n_1 - 1$  e  $g.l._2 = n_2 - 1$ .

Outra 'estatística' com a mesma distribuição obtém-se da seguinte maneira:

Considere duas v.a. *estocasticamente independentes*  $Q_1$  e  $Q_2$  com distribuições Qui-quadrado e com, respectivamente,  $r_1$  e  $r_2$  graus de liberdade. Se definirmos uma nova v.a.

$$F = \frac{Q_1/r_1}{Q_2/r_2},$$

então  $F$  tem a seguinte f.d.p.

$$f(x) = \frac{\Gamma[(r_1 + r_2)/2](r_1/r_2)^{r_1/2}}{\Gamma(r_1/2)\Gamma(r_2/2)} \frac{(x)^{\frac{r_1}{2}-1}}{(1 + r_1 \frac{x}{r_2})^{(r_1+r_2)/2}}, \quad 0 < x < \infty,$$

conhecida for distribuição F-Fisher/Snedecor.

A Tabela A.9 do Apêndice apresenta valores calculados de  $1 - P(F \leq c) = 1 - \int_0^c f(x)dx$  para vários valores de  $r_1$ ,  $r_2$  e  $c$ .

A figura 5.17 mostra a distribuição F.

A notação simplificada para representar uma v.a.  $X$  que segue a distribuição F é  $X \sim F(r_1, r_2)$ .

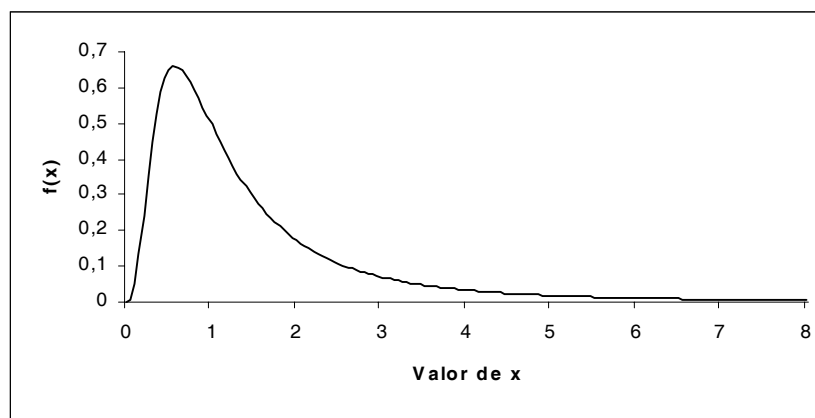


Figura 5.17: Distribuição F com  $r_1 = 10$  e  $r_2 = 5$

## 5.5 Exercícios

1. Faça um gráfico a partir dos dados

$x$  1 2 3 4 10 10

$y$  1 3 3 5 1 11

- (a) Calcule o coeficiente de correlação?
  - (b) Quais os factos relacionados com estes dados que são responsáveis por reduzir a correlação a este nível, apesar da associação forte e linear existente entre a maioria dos pontos?
- (a) Utilize os valores 0.25, 0.5 e 0.8 para completar as seguintes afirmações:
    - a correlação entre a altura do pai e a altura do filho adulto é \_\_\_\_\_
    - a correlação entre a altura de uma criança de 4 anos do sexo masculino e a sua altura aos 18 anos é de \_\_\_\_\_
    - a correlação entre as alturas do marido e da esposa é de \_\_\_\_\_
  - (b) Para cada par de variáveis, espera que exista uma correlação forte e negativa, forte e positiva ou fraca?
    - A idade de um carro em segunda mão e o seu preço.
    - O peso de um carro novo e o consumo em litros por Km.
    - O peso e a altura de uma pessoa.
    - A altura e o coeficiente de inteligência de uma pessoa.
2. Considere a afirmação: " Quando  $r=0.7$ , quer dizer que o valor da v.  $Y$  pode ser previsto a partir do valor de  $X$  para 70 por cento das unidades na amostra". Acha que ela é verdadeira ou falsa? Justifique.

3. Uma experiência aleatória consiste em retirar uma carta de um baralho normal de 52 cartas. A distribuição das probabilidades atribui a probabilidade  $\frac{1}{52}$  a cada um dos resultados possíveis. Seja  $C1$  o acontecimento definido pelo conjunto das 13 cartas de copas e  $C2$  o acontecimento definido pelo conjunto dos 4 reis. Calcule  $P(C1)$ ,  $P(C2)$ ,  $P(C1 \cap C2)$  e  $P(C1 \cup C2)$ .
4. Joga-se uma moeda, tantas vezes quantas as necessárias, até se obter uma cara. Os elementos  $a_i$  do espaço  $E$  são  $c, Cc, CCc, CCCc, CCCCc$ , etc ( $c$ =cara,  $C$ =coroa). A distribuição de probabilidades atribui àqueles elementos as seguintes probabilidades:  $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}$ , etc.
  - (a) Mostre que  $P(E) = 1$ .
  - (b) Seja  $C1$  o acontecimento definido por:  
 $C1 = \{c, Cc, CCc, CCCc, CCCCc\}$ ;  
 calcule  $P(C1)$ .
  - (c) Seja agora o acontecimento  $C2$  definido por:  
 $C2 = \{CCCCc, CCCCCc\}$  Calcule  $P(C1 \cap C2)$  e  $P(C1 \cup C2)$ ;
5. Sejam  $C1, C2$  e  $C3$  subconjuntos do espaço da amostra  $E$ . Mostre que  $P(C1 \cup C2 \cup C3) = P(C1) + P(C2) + P(C3) - P(C1 \cap C2) - P(C1 \cap C3) - P(C2 \cap C3) + P(C1 \cap C2 \cap C3)$ .  
 (Considere  $P(C1 \cup C2 \cup C3) = P(C1 \cup (C2 \cup C3))$ ).
6. Seja  $X$  uma v.a. com f.d.p.  $f(x) = 2x$ , definida para  $0 < x < 1$ .  
 Calcule  $P(\frac{1}{2} < X < \frac{3}{4})$  e  $P(-\frac{1}{2} < X < \frac{1}{2})$ .
7. Seja  $f(x, y)$  a f.d.p. conjunta de  $X$  e  $Y$ :  $f(x, y) = 6x^2y$ , definida para  $0 < x < 1, 0 < y < 1$ .  
 Calcule  $P(0 < X < \frac{3}{4}, \frac{1}{3} < Y < 2)$ .
8. Considere a f.p. conjunta:  
 $f(x, y) = \frac{9}{4^{x+y}}$ , definida para  $x = 1, 2, 3, \dots$  e  $y = 1, 2, 3, \dots$   
 Calcule  $P(X \leq 4, 3 < Y < 6)$ .
9. Para cada uma das funções, determine a constante  $c$  por forma a que a função  $f(x)$  satisfaça as propriedades de uma f.d.p. de uma v.a.  $X$ ,
  - (a)  $f(x) = c\frac{2^x}{3}$ , definida para  $x = 1, 2, 3, \dots$
  - (b)  $f(x) = cx \exp(-x)$ , definida para  $0 < x < \infty$ .
10. Seja  $f(x) = x/15$ , definida para  $x = 1, 2, 3, 4, 5$ , uma f.p. da v.a.  $X$ . Determine  $P(X = 1 \text{ ou } 2)$ ,  $P(\frac{1}{2} < X < \frac{5}{2})$  e  $P(1 \leq X \leq 2)$ .

11. Seja  $f(x, y) = 4xy$ , definida para  $0 < x < 1$  e  $0 < y < 1$  uma f.d.p. conjunta de  $X$  e  $Y$ . Determine  $P(0 < X < \frac{1}{2}, \frac{1}{4} < Y < 1)$ ,  $P(X = Y)$ ,  $P(X < Y)$  e  $P(X \leq Y)$ .
12. A *moda* de uma distribuição de uma v.a.  $X$  do tipo contínuo ou discreto é o valor de  $x$  que maximiza a f.d.p.  $f(x)$ . Quando esse valor é único, chama-se moda da distribuição. Determine as modas das distribuições:

i)  $f(x) = (\frac{1}{2})^x$ , definida para  $x = 1, 2, 3, \dots$

ii)  $f(x) = \frac{1}{2}x^2 \exp(-x)$ , definida para  $0 < x < \infty$ .

13. A *mediana* de uma distribuição de uma v.a.  $X$  do tipo contínuo ou discreto é o valor de  $x$  para o qual:

$$P(X < x) \leq \frac{1}{2} \text{ e } P(X \leq x) \geq \frac{1}{2}.$$

Se for único, chamar-se-á mediana da distribuição.

Calcule a mediana de  $f(x) = 3x^2$ , definida para  $0 < x < 1$ .

14. Para cada um dos casos seguintes, calcule a função distribuição acumulada,  $F(x)$  e represente-a graficamente:

i)  $f(x) = x/6$ , definida para  $x = 1, 2, 3$ .

ii)  $f(x) = 2/x^3$ , definida para  $1 < x < \infty$ .

iii)  $f(x) = 3(1 - x)^2$ , definida para  $0 < x < 1$

iv)  $f(x) = 1/3$ , nos intervalos  $0 < x < 1$  e  $2 < x < 4$ .

15. Dada a função de distribuição acumulada,

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < -1 \\ \frac{x+2}{4} & \text{se } -1 \leq x < 1 \\ 1 & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

calcule  $P(-\frac{1}{2} < X \leq \frac{1}{2})$ ,  $P(X = 0)$  e  $P(2 < X \leq 3)$ .

16. Seja  $X$  uma v.a. com f.d.p.  $f(x) = 2(1 - x)$ , definida para  $0 < x < 1$ . Calcule  $E[X]$ ,  $E[X^2]$  e a variância.
17. Considere as v.a.  $X$  e  $Y$  com f.d.p. conjunta  $f(x, y) = x + y$ , definida para  $0 < x < 1, 0 < y < 1$ . Calcule  $E[XY^2]$ .
18. Considere as v.a.  $X$  e  $Y$  com f.d.p. conjunta  $f(x, y) = 1/3$ , definida para  $(X, Y) = (0, 0), (0, 1), (1, 1)$ .

(a) Calcule  $E(X - \frac{1}{3})(Y - \frac{2}{3})$ .

- (b) Verifique se as variáveis são estocasticamente independentes.
19. Considere a f.d.p. conjunta  $f(x, y) = \exp(-x - y)$ , definida para  $0 < x < \infty, 0 < y < \infty$ . Mostre se  $E[XY] = E[X]E[Y]$ . Calcule a função geradora de momentos.
20. Para cada uma das f.d.p. conjuntas das v.a.  $X$  e  $Y$ , determine as f.d.p. marginais de  $X$  e de  $Y$  e a f.d.p. condicional de  $X$ , dado  $Y$ :
- $f(x, y) = \frac{x+y}{21}$ , definida para  $x = 1, 2, 3$  e  $y = 1, 2$
  - $f(x, y) = 2$ , definida para  $0 < x < y < 1$
  - $f(x, y) = 21x^2y^3$ , definida para  $0 < x < y < 1$
21. Se  $f(x, y) = x + y$ ,  $0 < x < 1, 0 < y < 1$  é a f.d.p. conjunta das v.a.  $X$  e  $Y$ ,
- calcule a covariância de  $X$  e  $Y$
  - mostra que as variáveis são estocasticamente dependentes
22. Sejam  $X$  e  $Y$  v.a. contínuas cuja f.d.p. conjunta é  $f(x, y) = \exp(-y)$ , para  $0 < x < y < \infty$ . Calcule a função geradora de momentos, e a média e a variância da distribuição a partir dela.
23. Calcule a função geradora de momentos da distribuição binomial. Calcule a média e a variância a partir da f.g.m.
24. Calcule a função geradora de momentos da distribuição da variável  $X$ :

$$P(X = x) = \frac{\lambda^x \exp(-\lambda)}{x!}, \text{ para } x = 0, 1, 2, \dots$$

Calcule a média e a variância da distribuição.

25. Determine a média e o momento de segunda ordem centrado na média de uma variável  $X$  com distribuição Gama.
26. Mostre que a função geradora de momentos de uma variável  $X$ , que segue a distribuição normal é:

$$\exp(\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}).$$

27. Num circuito, a diferença de potencial  $E$  está relacionada com a intensidade da corrente  $I$  e a resistência  $R$  da seguinte maneira:  $E = I R$ .

Suponha que a v.a.  $X_1$  representa a intensidade da corrente, a v.a.  $X_2$  representa a resistência e a v.a.  $U_1$  representa o potencial. Então  $U_1 = X_1 X_2$ . Suponha, ainda, que as v.  $X_1$  e  $X_2$  são independentes e que as funções densidade de probabilidade de cada uma delas são:

$$f_{X_1}(x_1) = 2x_1$$



para  $0 \leq x_1 \leq 1$ , e

$$f_{X_2}(x_2) = x_2^2/9$$

para  $0 \leq x_2 \leq 3$ .

Calcule a f.d.p da variável  $U_1$ .

28. Sejam  $X_1$  e  $X_2$  variáveis aleatórias independentes que representam os tempos de vida de duas lâmpadas fabricadas por processos diferentes. Suponha que as f.d.p. são, respectivamente

$$f_{X_1}(x_1) = \exp(-x_1)$$

para  $x_1 \geq 0$ , e

$$f_{X_2}(x_2) = 2\exp(-2x_2)$$

para  $x_2 \geq 0$ . Calcule a f.d.p da variável  $U_1$  definida pelo quociente entre dois tempos de vida ,

$$U_1 = \frac{X_1}{X_2}.$$



# Capítulo 6

## Estimação de parâmetros

### 6.1 Introdução

O objectivo principal da análise estatística consiste em *inferir sobre a população, tendo como base a informação parcial fornecida pela amostra aleatória representativa e retirada dessa população*.

Antes da fase de obtenção dos dados, é conveniente escolherem-se

- i) o valor de  $n$ , tamanho da amostra, e
- ii) o tipo de amostragem a usar.

As fases seguintes, não menos importantes, correspondem:

- 1. à escolha do tipo de inferência a usar, e
- 2. à verificação da exactidão dos resultados obtidos.

A escolha do tipo de inferência depende do que se pretende analisar. Assim, os **tipos de inferência** mais comuns, são,

- i) **estimação pontual** do valor de um parâmetro da distribuição,
- ii) **estimação de um intervalo de valores** prováveis para o parâmetro, ou
- iii) **teste de hipóteses estatísticas**, através da rejeição ou não rejeição de uma afirmação (hipótese), que define um conjunto de valores prováveis para o parâmetro.

## 6.2 Estimação pontual de parâmetros

O objectivo da **estimação pontual** de parâmetros consiste em tentar encontrar uma 'estatística', cujo valor numérico, obtido a partir dos dados da amostra, esteja próximo do valor do parâmetro da distribuição da população, que é constante mas desconhecido.

A 'estatística', variável aleatória, função dos elementos  $X_1, X_2, \dots, X_n$  da amostra e que será usada para estimar o valor do parâmetro  $\phi$ , chamar-se-á **estimador pontual** e pode designar-se por  $\hat{\phi}$ . Uma vez observados os valores dos elementos da amostra,  $X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n$ , o valor numérico da 'estatística' pode ser calculado, passando então a chamar-se **estimativa pontual** do parâmetro  $\phi$ .

Parece impossível verificar a qualidade de uma estimativa, uma vez que não é possível dizer-se se a estimativa está perto ou não do verdadeiro valor de  $\phi$  (desconhecido).

Como função das observações numa amostra, um estimador pode dar um valor que está perto do valor de  $\phi$  ou um que está longe. Depende da amostra. A '*distância*' entre a função (estimador) e a constante (valor verdadeiro do parâmetro) pode ser definida de muitas maneiras. Ao estimar o parâmetro  $\phi$ , através de uma 'estatística', por exemplo,  $T$ , chama-se **erro** à diferença  $T - \phi$ . Uma simples média aritmética dos erros não é muito útil como medida, uma vez que as componentes positivas e negativas do erro podem cancelar, mesmo tendo valores absolutos grandes. Uma medida, que não 'sofre' deste inconveniente será a média da distância (ou valor esperado da distância)  $E[|T - \phi|]$ , ou, no caso geral,  $E[|T - \phi|^k]$ .

Quando  $T$  e  $\phi$  são unidimensionais, a '**distância**' entre  $T$  e  $\phi$  é simplesmente o *valor absoluto da diferença*, e a medida usada é definida por (no caso geral)

$$E[|T - \phi|^k] = \int_{-\infty}^{+\infty} |T - \phi|^k f_T(t) dt \quad (6.1)$$

ou

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} |t(x_1, x_2, \dots, x_n) - \phi|^k f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n$$

uma vez que  $T = t(x_1, x_2, \dots, x_n)$ .

### 6.2.1 Média do quadrado do erro

A medida, do desempenho de um estimador, mais usada é a **média do quadrado do erro** (m.q.e.)

$$m.q.e. = E[(T - \phi)^2]. \quad (6.2)$$

A m.q.e., não é mais do que o 2º momento da variável aleatória  $T$  centrado no parâmetro  $\phi$  e pode ser decomposto em duas partes; uma, refere-se à variância do estimador, e a outra, é um termo não negativo. Assim,

$$E[(T - \phi)^2] = var[T] + (E[T] - \phi)^2. \quad (6.3)$$

### 6.2.2 Tendência

A quantidade  $E[T] - \phi$  da relação (6.3) mede a distância do centro da distribuição da ‘estatística’  $T$  ao valor  $\phi$ , (do parâmetro) e chama-se **tendência** em  $T$  (como um estimador de  $\phi$ ),

$$t_T(\phi) = E[T] - \phi. \quad (6.4)$$

É impossível fazer a m.q.e. igual a zero, no entanto, através de uma escolha apropriada do estimador, é possível fazer  $var[T] = 0$  ou  $t_T^2(\phi) = 0$ .

Não há grandes vantagens em tornar um destes termos igual a zero, pois o que conta é a soma das duas componentes. Isto é, a m.q.e. será pequena se tanto a variância de  $T$  como a tendência em  $T$  forem pequenas.

Um estimador cuja tendência seja nula, chama-se **não tendencioso** (ou não enviesado).

A figura 6.1 mostra um estimador tendencioso  $T$ , em relação ao parâmetro  $\phi$ , com tendência positiva. Diz-se então que o estimador tem tendência em sobre - estimar o parâmetro.

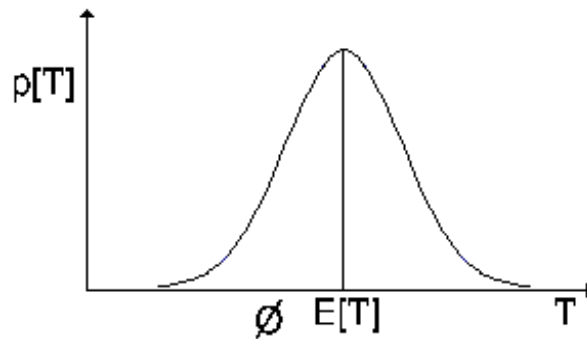


Figura 6.1: Estimador  $T$  tendencioso

Quando se procuram estimadores, acontece, por vezes, encontrar uma ‘estatística’  $T$ , cujo valor médio é proporcional ao valor do parâmetro  $\phi$ . Isto é  $E[T] = c\phi$ . Nesta situação é costume usar-se  $\frac{T}{c}$  como estimador de  $\phi$ . Este seria, pelo menos, não tendencioso. No entanto, pode acontecer que, sendo  $T$  já ‘quase’ não tendencioso e forçando-o a ser ‘exactamente’ não tendencioso, a média do quadrado do erro aumente.

A m.q.e. depende, normalmente, de um ou vários parâmetros desconhecidos, havendo dificuldade em usá-lo para ordenar vários estimadores. Mesmo assim, é muito útil para conhecer o desempenho de um estimador. Esta dependência é ultrapassada no caso de grandes amostras, uma vez que, qualquer parâmetro desconhecido pode ser ‘substituído’ pela sua estimativa amostral. Os erros introduzidos na m.q.e. não são significativos. Com este tipo de ‘substituição’, o desvio padrão de um estimador passa a chamar-se **erro padrão**. Este erro é muito importante para estimadores com tendência nula, ou quase nula, e que seguem aproximadamente a distribuição normal.

### 6.2.3 Eficiência

Se um estimador  $T$  tem uma m.q.e. menor do que a m.q.e. de outro estimador  $T'$ , ao estimar o parâmetro,  $\phi$ , a partir de uma amostra, diz-se que  $T$  faz um uso mais 'eficiente' das observações. Assim, diz-se que o estimador  $T$ , de  $\phi$ , é **mais eficiente** do que  $T'$  se

$$E[(T - \phi)^2] \leq E[(T' - \phi)^2], \quad (6.5)$$

com a desigualdade estrita para algum  $\phi$ .

A **eficiência relativa** de  $T'$  em relação a  $T$  é definida por

$$c(T, T') = \frac{E[(T - \phi)^2]}{E[(T' - \phi)^2]}, \quad (6.6)$$

geralmente depende de  $\phi$ , embora, por vezes, seja independente de  $\phi$ . No caso de estimadores não tendenciosos, a eficiência relativa é o quociente entre as variâncias dos dois estimadores. O que tiver *menor variância é o estimador mais eficiente*. A figura 6.2 mostra dois estimadores não tendenciosos em  $\phi$ , sendo  $T$  o mais eficiente.

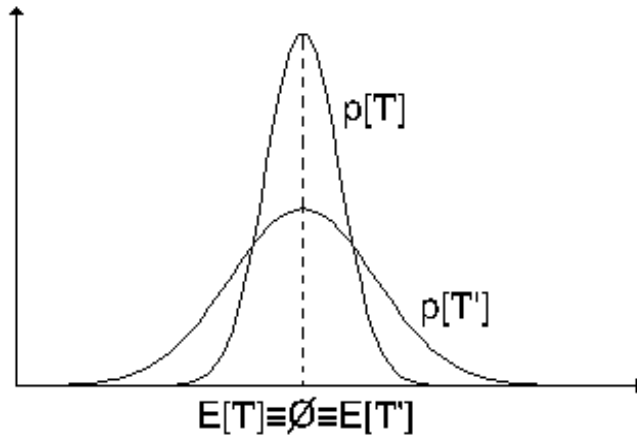


Figura 6.2: Estimadores  $T$  e  $T'$  para o parâmetro  $\phi$

### 6.2.4 Consistência

Um estimador fica muitas vezes, automaticamente, definido para qualquer tamanho da amostra. Por exemplo, os momentos da amostra são definidos para qualquer  $n$ . Assim, estes momentos formam, de facto, uma 'sequência' de estimativas.

Parece ser razoável pensar-se que, quanto maior for a amostra, melhor será a inferência. Seguindo este raciocínio, um bom estimador  $T_n$  (baseado numa amostra de tamanho  $n$ ) deve satisfazer a propriedade de que, a *média do quadrado do seu erro diminui e tende para*

zero, à medida que se aumenta o número de observações a incorporar nos seus cálculos, isto é,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E[(T_n - \phi)^2] = 0. \quad (6.7)$$

Se esta condição se verifica, diz-se que o estimador  $T_n$  (a sequência  $\{T_n\}$ ) é **consistente em média quadrática**. A condição verificar-se-á se e só se a variância de  $T_n$  e a tendência tenderem ambas para zero, quando  $n$  tende para infinito.

Uma vez que a convergência em média quadrática, para uma constante, implica convergência em probabilidade, então,  $T_n$  diz-se consistente (em probabilidade) se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|T_n - \phi| \geq \varepsilon) = 0, \quad \forall \varepsilon > 0, \quad (6.8)$$

pois a sequência  $T_n$  tende para  $\phi$ , em probabilidade.

Esta condição é tradicionalmente mais usada para definir consistência, uma vez que não necessita da existência do momento de 2ª ordem.

Se uma 'estatística'  $T_n$  tem variância que tende para zero, mas a sua média (esperança matemática) converge para  $k$ , valor diferente de  $\phi$ , então  $T_n$  diz-se que converge em probabilidade, mas para o valor errado,  $k$ . Embora pareça ter sido minimizada a importância da tendência, um estimador tendencioso, cuja tendência não desaparece quando  $n$  tende para infinito, deve ser modificado, por forma a que a tendência resultante tenda para zero, originando, assim, um estimador consistente.

## 6.3 Estimador de máxima verosimilhança

Passaremos à descrição de um método, de aplicação geral, para calcular estimadores de parâmetros, ao qual se dá o nome de **método da máxima verosimilhança**.

Se  $x_1, x_2, \dots, x_n$  forem os elementos de uma amostra aleatória, tirada de uma distribuição com f.d.p.  $f(x; \phi)$  (função do parâmetro  $\phi$  que se pretende estimar), então a f.d.p. conjunta de  $x_1, x_2, \dots, x_n$  é

$$f(x_1; \phi)f(x_2; \phi) \dots f(x_n; \phi)$$

uma vez que as variáveis são estocasticamente independentes. A esta função, dá-se o nome de **função de verosimilhança** da amostra aleatória, e representa-se da seguinte maneira,

$$L(\phi; x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_1; \phi)f(x_2; \phi) \dots f(x_n; \phi), \quad \in \Omega \quad (6.9)$$

com  $\Omega$  o espaço do parâmetro.

Se for possível encontrar uma função  $t(x_1, x_2, \dots, x_n)$  (dos elementos da amostra  $x_1, x_2, \dots, x_n$ ), tal que, quando o parâmetro  $\phi$  é substituído pelo valor de  $t(x_1, \dots, x_n)$ , a função de verosimilhança  $L(\phi; x_1, \dots, x_n)$  atinge um valor máximo, então a 'estatística' correspondente  $t(x_1, \dots, x_n)$  chama-se **estatística de máxima verosimilhança** para  $\phi$ . É costume designá-la por  $\tilde{\phi} = t(x_1, x_2, \dots, x_n)$ .

Na maior parte dos casos, existe uma única 'estatística' de máxima verosimilhança  $\tilde{\phi}$ , para o parâmetro  $\phi$ , sendo quase sempre calculada por diferenciação - o valor da variável que maximiza esta função  $L$ , também maximiza o  $\ln(L)$  e anula a sua primeira derivada.

Nalguns casos, a função de verosimilhança não tem derivada contínua e noutros a 'estatística' que maximiza a função  $L$  (ou o  $\ln(L)$ ) não é um zero da 1ª derivada.

### 6.3.1 Estimador da média

Para estimar a média da população, usando os elementos de uma amostra aleatória, parece lógico usar-se a média da amostra,  $\bar{X}$ .

O parâmetro da população  $\phi$  é agora a média  $\mu$  e o estimador  $\tilde{\phi}$  é  $\bar{X}$ .

Os momentos de  $\bar{X}$  são:

i)

$$E[\bar{X}] = E\left[\frac{X_1 + \dots + X_n}{n}\right] = \frac{1}{n}(E[X_1] + \dots + E[X_n]) = \mu$$

ii)

$$\text{var}[\bar{X}] = \text{var}\left[\frac{X_1 + \dots + X_n}{n}\right] = \frac{1}{n^2}(\text{var}[X_1] + \dots + \text{var}[X_n]) = \frac{\sigma^2}{n}$$

Se a v.a.  $X$  segue a distribuição normal, também  $\bar{X}$  segue a mesma distribuição.

Quando o tamanho  $n$  da amostra é considerado suficientemente grande, a variável  $\bar{X}$  tem uma distribuição assintótica normal (Teorema do Limite Central) com média  $\mu$  e desvio padrão  $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ . Já se viu que  $\bar{X}$  é um estimador não tendencioso para  $\mu$ .

De acordo com a figura 6.3, que dá a distribuição aproximadamente normal da variável  $\bar{X}$ , pode concluir-se que, com probabilidade 0.954, o erro da estimativa  $|\bar{X} - \mu|$  não excede  $\frac{2\sigma}{\sqrt{n}}$ .

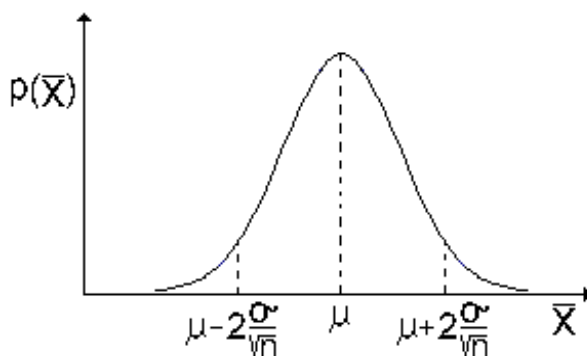


Figura 6.3: Distribuição do estimador  $\bar{X}$

Não sendo conhecido o valor da variância da população,  $\sigma^2$ , pode usar-se a variância da amostra  $s^2$  (desvio padrão =  $s$ ). Assim o erro padrão do estimador  $\bar{X}$  é  $\frac{s}{\sqrt{n}}$ .



### 6.3.2 Estimador da variância

O estimador mais usado para a variância da população, é a variância da amostra,  $s^2$ . Usando a seguinte definição

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \quad (6.10)$$

obtemos um estimador não tendencioso, uma vez que

$$E[s^2] = \sigma^2 .$$

A variância deste estimador é, para uma distribuição normal,

$$\text{var}[s^2] = \frac{2\sigma^4}{n-1} . \quad (6.11)$$

No entanto, se usarmos, como definição de variância da amostra, a 'estatística',

$$\hat{s}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 = \frac{(n-1)}{n} s^2 \quad (6.12)$$

é possível determinar os momentos:

$$E[\hat{s}^2] = \sigma^2 \left(1 - \frac{1}{n}\right) \quad (6.13)$$

e

$$\text{var}[\hat{s}^2] = \frac{\mu_4 - \mu_2^2}{n} - \frac{2(\mu_4 - 2\mu_2^2)}{n^2} + \frac{\mu_4 - 3\mu_2^2}{n^3} \quad (6.14)$$

em que  $\mu_k$  é o momento de ordem  $k$  centrado na média da distribuição. Quando a distribuição é normal, verifica-se  $\mu_4 = 3\mu_2^2$  e a variância de  $\hat{s}^2$  reduz-se a,

$$\text{var}[\hat{s}^2] = \frac{2\sigma^4(n-1)}{n^2}. \quad (6.15)$$

Comparando os dois estimadores da variância  $\sigma^2$ ,  $s^2$  e  $\hat{s}^2$  em termos da m.q.e., conclui-se que:

$$\begin{aligned} m.q.e.(\hat{s}^2) &= \frac{2\sigma^4(n-1)}{n^2} + \left(-\frac{\sigma^2}{n}\right)^2 = \frac{2n-1}{n^2} \sigma^4 , \\ m.q.e.(s^2) &= \frac{2\sigma^4}{(n-1)} \end{aligned}$$

e a m.q.e. de  $s^2$  é maior do que a do estimador  $\hat{s}^2$  (para qualquer inteiro positivo  $n$ ) e para o caso da população ser normal.

Apesar disto, é mais comum a utilização de  $n-1$  no denominador do estimador, do que de  $n$ . As razões para o uso de  $n-1$  no denominador, na definição do estimador para  $\sigma^2$ , são:

1.  $s^2$  é um estimador não tendencioso da variância da população;
2. faz sentido quando  $n = 1$ ; para amostras de tamanho 1 não há informação acerca da variação dos elementos da amostra e a variância não é definida;
3. estimativas, testes e as tabelas associadas baseiam-se no denominador  $n - 1$ .
4. a soma dos quadrados  $\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$  vem expressa como uma soma de quadrados de  $n - 1$  variáveis independentes, isto é, a forma quadrática tem  $n - 1$  graus de liberdade.

Em relação ao desvio padrão da população, tem-se que  $E[s] < \sigma$ , donde se conclui que o desvio padrão da amostra é um estimador tendencioso para  $\sigma$ , embora, para amostras grandes a tendência possa ser ignorada.

O desvio padrão da amostra pode ser definido como

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{a(n)}}$$

sendo  $a(n)$  uma função de  $n$ . O método da máxima verosimilhança dá  $a(n) = n$ , enquanto que o valor de  $a(n)$  que faz  $s^2$  um estimador não tendencioso em relação a  $\sigma^2$  é  $(n - 1)$ . Tanto  $n$  como  $(n - 1)$  fazem de  $s$  um estimador tendencioso de  $\sigma$ . Para amostras de tamanho  $n \geq 2$  a escolha  $a(n) = n - \frac{3}{2}$  produz um estimador de  $\sigma$  que é 'quase' não tendencioso.

Uma vez que a distribuição do estimador  $s^2$  não é simétrica, o cálculo dos limites simétricos, usando o erro padrão como medida de concentração da probabilidade, não é correcto.

### 6.3.3 Estimador para a proporção binomial

O parâmetro  $\phi$ , que se pretende estimar, é agora a proporção  $p$  de unidades da população que possuem uma certa propriedade (característica). Como estimador pode usar-se a proporção de elementos da amostra que verificam a tal propriedade

$$\hat{p} = \frac{X}{n}, \quad (6.16)$$

em que  $n$  é o tamanho da amostra e  $X$  o número de elementos da amostra com a propriedade indicada.

A variável  $X$  segue a distribuição binomial com parâmetros  $n$  e  $p$ . A média desta distribuição é dada por  $np$  e a variância por  $npq$  ( $q = 1 - p$ ).

Assim, para o cálculo da média do estimador  $\hat{p}$  faz-se

$$E[\hat{p}] = E\left[\frac{X}{n}\right] = \frac{1}{n}E[X] = p, \quad (6.17)$$

concluindo-se que o estimador é não tendencioso. O desvio padrão de  $\hat{p}$  é

$$\sqrt{\text{var}[\hat{p}]} = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}.$$

Não sendo conhecido o valor de  $p$ , este pode ser substituído, na fórmula, pelo estimador  $\hat{p}$ , sendo o erro padrão deste estimador dado por,

$$\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}. \quad (6.18)$$

Quando  $n$  é grande, a distribuição assintótica de  $\hat{p}$  é normal, com média  $p$  e variância  $\frac{p(1-p)}{n}$ . Esta aproximação assegura que, antes de observada a amostra, se tem uma probabilidade de 0.954 de que o erro desta estimativa,  $|\hat{p} - p|$ , não excede  $2\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$ .

## 6.4 Estimação por intervalos de confiança

Uma técnica alternativa para estimar o valor de um parâmetro  $\phi$  consiste em estender o conceito de *limite do erro da estimativa* e gerar um intervalo de valores prováveis para o parâmetro. Este intervalo deve conter o verdadeiro valor do parâmetro, com uma certa probabilidade. Isto é, se  $x_1, x_2, \dots, x_n$  forem os elementos de uma amostra aleatória, retirada da população, que depende do parâmetro  $\phi$ , desconhecido, um **intervalo de confiança** com  $100(1-\alpha)\%$  de probabilidade de conter o parâmetro  $\phi$ , é um intervalo de valores prováveis para  $\phi$ , calculado a partir das observações  $x_1, x_2, \dots, x_n$  da amostra, definido por  $(L, U)$ , sendo  $L$  o limite inferior e  $U$  o limite superior do intervalo, de tal forma que, antes da amostragem, contém o valor de  $\phi$  com a probabilidade  $100(1-\alpha)\%$ . Assim, se  $(1-\alpha)$  for a probabilidade,

$$P[L < \phi < U] = 1 - \alpha \quad (6.19)$$

e  $(1-\alpha)$  é o nível de confiança associado ao intervalo. Ao valor de  $\alpha$  dá-se o nome de nível de significância associado ao teste de hipóteses (ver Capítulo 7).

### 6.4.1 Intervalo para a média

i) Intervalo de confiança para  $\mu$ , com  $\sigma$  conhecido.

Se  $\bar{X}$  é a média aritmética de uma amostra aleatória de tamanho  $n$ , retirada de uma população normal com média  $\mu$  e variância  $\sigma^2$ , um intervalo de confiança  $100(1-\alpha)\%$  para  $\mu$  é dado por

$$\bar{X} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

sendo  $z_{\frac{\alpha}{2}}$  o ponto crítico da distribuição normal, de parâmetros 0 e 1, à direita do qual se encontra uma área de  $\frac{\alpha}{2}$  (isto é, uma probabilidade de  $\frac{\alpha}{2}$ ).

A construção deste intervalo é baseada na 'estatística'

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

que segue a distribuição  $N(0, 1)$ .

Em virtude do Teorema do Limite Central, este resultado também pode ser estendido a amostras aleatórias de populações não normais com variância conhecida  $\sigma^2$ , desde que essa amostra tenha um tamanho,  $n$ , considerado suficientemente grande.

ii) Intervalo de confiança para  $\mu$ , com  $\sigma$  desconhecido.

Se  $\bar{X}$  e  $s$  são, respectivamente, os valores da média e desvio padrão de uma amostra aleatória de tamanho  $n$ , retirada de uma população normal, com variância desconhecida,  $\sigma^2$ , então um intervalo de confiança  $100(1 - \alpha)\%$  para  $\mu$  é dado por

$$\bar{X} - t_{\frac{\alpha}{2}, n-1} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + t_{\frac{\alpha}{2}, n-1} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}$$

sendo  $t_{\frac{\alpha}{2}, n-1}$  o ponto crítico da distribuição  $t$ -Student, com  $n - 1$  graus de liberdade, à direita do qual se encontra uma probabilidade (área) de  $\frac{\alpha}{2}$ .

A construção deste intervalo é baseada na 'estatística'

$$T = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$$

que segue a distribuição  $t$ -Student com  $n - 1$  graus de liberdade.

### 6.4.2 Intervalo para a diferença entre duas médias

i) Intervalo de confiança para  $\mu_1 - \mu_2$ , com  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$  conhecidos.

Se  $\bar{X}_1$  e  $\bar{X}_2$  são as médias aritméticas de duas amostras aleatórias independentes de tamanhos respectivamente iguais a  $n_1$  e  $n_2$  provenientes de duas populações normais com variâncias  $\sigma_1^2$  e  $\sigma_2^2$  conhecidas, então um intervalo de confiança  $100(1 - \alpha)\%$  para  $\mu_1 - \mu_2$  é dado por

$$(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} < \mu_1 - \mu_2 < (\bar{X}_1 - \bar{X}_2) + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

Em virtude do Teorema do Limite Central, este resultado também pode ser estendido a amostras aleatórias independentes retiradas de duas populações não normais com variâncias  $\sigma_1^2$  e  $\sigma_2^2$  conhecidas, desde que  $n_1$  e  $n_2$  sejam suficientemente grandes.

A construção deste intervalo baseia-se na 'estatística'

$$Z = \frac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

que segue a distribuição  $N(0, 1)$ .

- ii) Intervalo de confiança para  $\mu_1 - \mu_2$ , com  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$  desconhecidos.

Se  $\overline{X}_1$  e  $\overline{X}_2$  são os valores das médias de duas amostras aleatórias independentes de tamanhos  $n_1$  e  $n_2$  provenientes de duas populações normais com variâncias iguais mas desconhecidas, então um intervalo de confiança  $100(1 - \alpha)\%$  para  $\mu_1 - \mu_2$  é dado por

$$(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - c \cdot s_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} < \mu_1 - \mu_2 < (\overline{X}_1 - \overline{X}_2) + c \cdot s_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}$$

onde  $s_p$  é a raiz quadrada do estimador "pooled" da variância da população,

$$s_p = \sqrt{\frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}} \quad (6.20)$$

com  $s_1^2$  e  $s_2^2$  as variâncias das duas amostras. O valor  $c = t_{\frac{\alpha}{2}, (n_1 + n_2 - 2)}$  é o ponto crítico da distribuição  $t$ -Student, com  $n_1 + n_2 - 2$  graus de liberdade, à direita do qual se encontra uma área de  $\frac{\alpha}{2}$ .

### 6.4.3 Intervalo para a variância

- i) Intervalo de confiança para  $\sigma^2$ .

Se  $s^2$  é o valor da variância de uma amostra aleatória de tamanho  $n$  de uma população normal, um intervalo de confiança para  $\sigma^2$  é dado por

$$\frac{(n - 1)s^2}{\chi_{\frac{\alpha}{2}, n-1}^2} < \sigma^2 < \frac{(n - 1)s^2}{\chi_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}^2}$$

em que os valores  $\chi_{\frac{\alpha}{2}, n-1}^2$  e  $\chi_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}^2$  são pontos críticos da distribuição  $\chi^2$ , com  $n - 1$  graus de liberdade, ficando à direita do primeiro uma área de  $\frac{\alpha}{2}$  e à esquerda do segundo ponto a mesma área.

A construção deste intervalo baseia-se na 'estatística'

$$Q = \frac{(n - 1)s^2}{\sigma^2}$$

que segue a distribuição  $\chi^2$  com  $n - 1$  graus de liberdade.

- ii) Os limites de confiança  $100(1 - \alpha)\%$  para  $\sigma$  podem ser obtidos tomando as raízes quadradas dos limites de confiança para  $\sigma^2$ .

### 6.4.4 Intervalo para a razão entre duas variâncias

Intervalo de confiança para  $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ .

Se  $s_1^2$  e  $s_2^2$  forem os valores das variâncias de duas amostras aleatórias independentes de tamanhos  $n_1$  e  $n_2$  provenientes de duas populações normais, um intervalo de confiança  $100(1 - \alpha)\%$  para  $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$  é dado por

$$\frac{s_1^2}{s_2^2} \cdot \frac{1}{F_{\frac{\alpha}{2}, n_1-1, n_2-1}} < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < \frac{s_1^2}{s_2^2} \cdot \frac{1}{F_{1-\frac{\alpha}{2}, n_1-1, n_2-1}}$$

sendo  $F_{\frac{\alpha}{2}, n_1-1, n_2-1}$  o ponto crítico da distribuição  $F$ -Fisher, com  $n_1 - 1$  e  $n_2 - 1$  graus de liberdade, à direita do qual está uma área de  $\frac{\alpha}{2}$ . O valor de  $F_{1-\frac{\alpha}{2}, n_1-1, n_2-1}$  pode ser retirado da tabela da distribuição de F-Fisher, uma vez que  $F_{1-\frac{\alpha}{2}, n_1-1, n_2-1} = \frac{1}{F_{\frac{\alpha}{2}, n_2-1, n_1-1}}$ .

### 6.4.5 Intervalo para a proporção binomial

- i) Intervalo de confiança para  $p$ , para grandes amostras.

Um intervalo de confiança  $100(1 - \alpha)\%$  para o parâmetro binomial  $p$  é dado por

$$\hat{p} - z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} < p < \hat{p} + z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$$

em que  $\hat{p} = \frac{X}{n}$  é o estimador da proporção, definido pelo quociente entre  $X$ , número de elementos da amostra que satisfazem uma certa propriedade e  $n$ , tamanho da amostra.

- ii) Intervalo de confiança para a diferença entre duas proporções,  $p_1 - p_2$ , para grandes amostras.

Um intervalo de confiança  $100(1 - \alpha)\%$  para  $p_1 - p_2$ , a diferença entre os parâmetros de duas distribuições binomiais, é dado por

$$(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot P < p_1 - p_2 < (\hat{p}_1 - \hat{p}_2) + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot P$$

em que  $P = \sqrt{\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{n_1} + \frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{n_2}}$ ,  $\hat{p}_1 = \frac{X_1}{n_1}$ ,  $\hat{p}_2 = \frac{X_2}{n_2}$ ,  $X_1$  é o número de elementos da 1ª amostra, de tamanho  $n_1$ , que verificam a propriedade e  $X_2$  é o número de elementos da 2ª amostra, de tamanho  $n_2$ , que verificam a propriedade.

## 6.5 Exercícios

1. Sabe-se que, com determinado tratamento administrado a doentes em condições bem definidas, se consegue 70% de curas. Se esse tratamento for aplicado a 20 doentes nas mesmas condições, qual a probabilidade de obter
  - (a) no máximo, 15 curas,
  - (b) 12 ou mais curas.
2. Numa empresa têxtil existem numerosos teares de um certo tipo. A experiência mostra que, o número de teares que se avaria em cada mês, é uma variável aleatória  $X$  que segue a distribuição de Poisson com média igual a 3. Calcule,
  - (a) a probabilidade de que, durante um mês, se avariem sete ou mais teares,
  - (b) a capacidade mínima que deve ter a oficina de reparação, de modo que, a probabilidade de não haver teares aguardando reparação seja pelo menos 0.9.
3. Na inspeção de um tecido produzido em rolos, o número de defeitos encontrados por 10 jardas é uma variável aleatória, cujo valor médio é igual a 2.8. Calcule a probabilidade de encontrar, em 10 jardas de tecido, 3 defeitos.
4. As chamadas telefônicas chegam a uma Central Telefônica aleatoriamente a uma média de 4 por minuto. Determine a probabilidade de que num intervalo de 15 segundos ocorram 3 ou mais chamadas.
5. Os clientes de um supermercado chegam a uma fila de espera, em que o tempo médio entre sucessivas chegadas é de 2 minutos. Qual a probabilidade do tempo de espera entre clientes ser menor do que 6 minutos?
6. Pequenos defeitos ocorrem na produção de uma fita de seda, à média de um por 300m. Supondo que o número de defeitos num dado comprimento de fita segue a distribuição de Poisson, qual a probabilidade de que
  - (a) um rolo com 720m tenha quando muito 2 defeitos?
  - (b) um rolo com 360m não tenha defeitos?
7. Somente 3% dos estudantes de uma cidade têm C.I. igual ou superior a 130. Com uma amostra aleatória de tamanho 50, use a aproximação de Poisson à distribuição binomial para calcular

$$Pr[X = 2] \text{ e } Pr[X \geq 3].$$

Nota: A variável  $X$  representa o número de estudantes com C.I. (coeficiente de inteligência) igual ou superior a 130.

8. As classificações, de um exame de admissão a um colégio, seguem uma distribuição normal com média 500 e desvio padrão 100. Determine a probabilidade de um estudante ter classificação

- (a) superior a 650,
- (b) inferior a 250,
- (c) entre 325 e 675.

9. Os eixos, produzidos por uma máquina, consideram-se não defeituosos, se o desvio do diâmetro em relação a uma dimensão especificada não é superior a 2 mm. A experiência mostra que, o desvio é uma variável aleatória  $X$ , que segue a distribuição normal com média zero e desvio padrão igual a 1.6 mm.

Qual a percentagem de eixos não defeituosos produzidos?

10. Uma empresa tem uma produção constante de 90 toneladas por mês e a procura desse produto é uma variável aleatória  $X$  que segue a distribuição normal com média 80 e desvio padrão 10.

Qual a probabilidade de haver procura excedentária?

11. De um questionário conduzido há 5 anos, concluiu-se que 30% dos adultos de uma cidade bebiam regularmente álcool. Se esta for ainda a percentagem, qual a probabilidade de, numa amostra aleatória de 1 000 adultos, o número de pessoas que bebe álcool, ser

- (a) menor que 280,
- (b) maior ou igual a 316.

12. A duração, em milhares de horas, de um componente de um tipo de aparelho de radar, é uma variável aleatória  $X$  cuja f.d.p. é

$$f(x) = \begin{cases} 0.1 \exp(-0.1x) & \text{para } x > 0 \\ 0 & \text{para } x \leq 0 \end{cases}$$

Determine a probabilidade de um componente, escolhido ao acaso, durar

- (a) menos de  $4 \times 10^3$  horas
- (b) entre  $5 \times 10^3$  e  $10 \times 10^3$  horas.

13. Uma fábrica de sapatos tem uma máquina que corta peças, de borracha comprimida, para serem usadas em solas. A espessura dessas solas é uma variável aleatória normalmente distribuída com  $\sigma = 2mm$ . O valor médio da espessura é  $\mu = 25mm$ . Para se tentar corrigir estas medidas, reajustando a máquina, é conveniente verificar



a qualidade do produto, medindo a espessura das solas de uma amostra aleatória tirada periodicamente da máquina. As espessuras das solas, de uma amostra de 5 elementos, foram registadas e a média aritmética  $\bar{X}$  foi calculada. Se  $\bar{X} < 24.8$  ou  $\bar{X} > 25.2$  diz-se que a máquina não está controlada. A máquina é então parada e reajustada.

- (a) Com a média  $\mu = 25mm$ , qual a probabilidade de a amostra indicar que a máquina não está controlada?
  - (b) Se a média mudar para  $\mu = 25.3mm$ , qual a probabilidade de a amostra indicar que a máquina não está controlada?
14. Duas amostras aleatórias independentes foram retiradas de uma população normal com média 150 e variância 28.6. As amostras têm, respectivamente, tamanhos 10 e 25 e médias aritméticas  $\bar{X}_1$  e  $\bar{X}_2$ . Determine
- (a)  $var[\bar{X}_1 - \bar{X}_2]$
  - (b)  $Prob(|\bar{X}_1 - \bar{X}_2| > 4)$
15. Para estudar o crescimento das árvores de pinheiro, um trabalhador registou 40 medições das alturas de árvores de 1 ano de idade. Os valores obtidos foram,
- |     |     |     |     |     |     |     |     |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 2.6 | 1.9 | 1.8 | 1.6 | 1.4 | 2.2 | 1.2 | 1.6 |
| 1.6 | 1.5 | 1.4 | 1.6 | 2.3 | 1.5 | 1.1 | 1.6 |
| 2.0 | 1.5 | 1.7 | 1.5 | 1.6 | 2.1 | 2.8 | 1.0 |
| 1.2 | 1.2 | 1.8 | 1.7 | 0.8 | 1.5 | 2.0 | 2.2 |
| 1.5 | 1.6 | 2.2 | 2.1 | 3.1 | 1.7 | 1.7 | 1.2 |
- Dê uma estimativa pontual da média das alturas da população dos pinheiros e diga, com 95.4% de certeza, qual o limite do erro cometido.
16. Determine uma condição que os coeficientes  $a_i$  devem verificar de modo que a combinação linear  $\sum_{i=1}^n a_i X_i$  defina um estimador não tendencioso para a média da população  $\mu$ .
17. Um clube de compras pelo correio, oferece mensalmente produtos que podem ser adquiridos pelos sócios. É feito um teste de aceitação do produto, mandando o produto para 250 sócios, escolhidos ao acaso dentre os 9 000 membros. Baseada nesta amostra, somente 70 sócios decidiram comprar o produto. Dê uma estimativa pontual da proporção de sócios que se espera comprem o produto. Calcule com 95.4% de certeza, um limite do erro cometido.
18. Um engenheiro pretende estimar a média do resultado de um processo químico, baseada em três medições,  $X_1, X_2$  e  $X_3$ , resultantes de 3 experiências.

Considere os seguintes estimadores para a média  $\mu$ ,

$$T_1 = \frac{X_1 + X_2 + X_3}{3} \text{ e } T_2 = \frac{X_1 + 2X_2 + X_3}{4}$$

Qual dos dois estimadores deve preferir?

19. Suponha que é necessário que a resistência à ruptura de um certo tipo de fita seja de 83.9 Kg e que 5 peças aleatoriamente seleccionadas de diferentes rolos têm uma resistência média de 83.05 Kg com um desvio padrão de 3.72 Kg. Assumindo que os dados provêm de uma amostra aleatória de uma população normal, teste a hipótese nula  $\mu = 83.9$  contra a hipótese alternativa  $\mu < 83.9$  a um nível de significância de  $\alpha = 0.05$ .

20. Represente as funções de verosimilhança, baseadas em amostras aleatórias de tamanho  $n$ , das seguintes distribuições,

(a) exponencial,  $e(\beta)$

(b) Poisson,  $P(\lambda)$ .

21. Se  $X_1, X_2, \dots, X_n$  representam os elementos de uma amostra aleatória de uma distribuição com f.d.p.,

$$f(x; \theta) = \begin{cases} \theta x^{\theta-1} & \text{para } 0 < x < 1 \text{ e } 0 < \theta < \infty \\ 0 & \text{nos outros casos} \end{cases}$$

determine a 'estatística' de máxima verosimilhança para o parâmetro  $\theta$ .

22. Se  $X_1, X_2, \dots, X_n$  são os elementos de uma amostra aleatória tirada da distribuição  $N(\theta_1, \theta_2)$  em que  $-\infty < \theta_1 < \infty$  e  $0 < \theta_2 < \infty$ , determine as 'estatísticas' de máxima verosimilhança para os parâmetros  $\theta_1$  e  $\theta_2$ .

23. Suponha que  $X$  segue uma distribuição de Weibull, com f.d.p.

$$f(x; \theta) = \theta \alpha x^{\alpha-1} e^{-\theta x^\alpha} \text{ para } x > 0.$$

(sendo  $\alpha$  conhecido). Determine uma 'estatística' de máxima verosimilhança para estimar o parâmetro da distribuição, baseada numa amostra de tamanho  $n$ .

24. A função densidade de probabilidade da v.a.  $X$  é

$$f(x; \theta_1, \theta_2) = \frac{1}{\theta_2} \exp\left[-\frac{(x - \theta_1)}{\theta_2}\right] \text{ para } \begin{cases} \theta_1 \leq x < \infty \\ -\infty < \theta_1 < \infty \\ 0 < \theta_2 < \infty \end{cases}.$$

(a) Calcule estimadores de máxima verosimilhança para  $\theta_1$  e  $\theta_2$ .

- (b) Calcule a média da distribuição.
- (c) A partir dos estimadores já obtidos em a), determine um estimador para a média da distribuição.

25. Seja  $X$  uma variável aleatória, cuja f.d.p.  $f(x)$  é a seguinte:

$$f(x; \theta_1, \theta_2) = \begin{cases} \frac{1}{\theta_2 - \theta_1} & \text{se } \theta_1 < x < \theta_2 \\ 0 & \text{nos outros casos} \end{cases}.$$

Determine estimadores de máxima verosimilhança para  $\theta_1$  e  $\theta_2$ .

26. Um relojoeiro pretende conhecer as variações do produto que fabrica. Para construir um intervalo de confiança para  $\sigma$  baseou-se numa amostra aleatória de 10 relógios escolhidos dentre os relógios que passaram o último teste de qualidade. Os valores dos desvios dos 10 relógios, em relação a um relógio "padrão", foram registados ao fim de um mês. Considere  $\bar{X} = 7$  seg. e  $s = 4$  seg.. Supondo que a distribuição dessas medidas pode ser aproximada por uma distribuição normal, determine um intervalo de confiança que tenha 90% de probabilidade de conter  $\sigma$ .
27. Quarenta e uma pessoas, de uma amostra aleatória de 500 trabalhadores, estão desempregadas. Calcule um intervalo de confiança que tenha 95% de probabilidade de conter a percentagem de desempregados no País.
28. Sejam  $\bar{X}_1$  e  $\bar{X}_2$ , as médias aritméticas de duas amostras aleatórias e independentes de tamanho  $n$ , tiradas respectivamente das distribuições  $N(\mu_1, \sigma^2)$  e  $N(\mu_2, \sigma^2)$ .

Determine  $n$ , de modo que

$$Pr[\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - \frac{\sigma}{5} < \mu_1 - \mu_2 < \bar{X}_1 - \bar{X}_2 + \frac{\sigma}{5}] = 0.90$$

29. Sejam  $s_1^2$  e  $s_2^2$ , as variâncias de duas amostras aleatórias, de tamanhos respectivamente  $n$  e  $m$ , tiradas de duas distribuições estocasticamente independentes,  $N(\mu_1, \sigma^2)$  e  $N(\mu_2, \sigma^2)$ . Use o facto de que a 'estatística'

$$\frac{(n-1)s_1^2 + (m-1)s_2^2}{\sigma^2} \text{ é } \chi^2(n+m-2)$$

para determinar um intervalo de confiança para a variância comum  $\sigma^2$ , que é desconhecida.



# Capítulo 7

## Testes às médias das distribuições

### 7.1 Hipóteses estatísticas

Existe uma relação entre o teste da hipótese estatística e o intervalo de confiança. O que acontece, na generalidade, é que qualquer hipótese, relativa a um parâmetro, que 'cai fora' do intervalo de confiança, construído para o parâmetro, pode ser considerada rejeitada. Por outro lado, se o valor formulado na hipótese 'cai dentro' do intervalo de confiança, ela é considerada não rejeitada. Assim, um **intervalo de confiança pode ser tomado como um conjunto de hipóteses não rejeitáveis**.

Quando se fala de um intervalo de confiança com probabilidade de 95%, usa-se 5% (= 100 $\alpha$ %), o seu complementar como **nível de significância** para o teste de hipóteses.

Uma maneira de testar qualquer hipótese, consiste em focar a atenção numa *única hipótese*, conhecida por **hipótese nula**,  $H_0$ .

O **teste** da hipótese nula é uma 'regra' que especifica o conjunto de valores de uma variável aleatória  $T$ , para os quais a decisão a tomar é a de rejeitar  $H_0$ .

A variável aleatória  $T$ , cujos valores servem para determinar a *acção que se toma*, chama-se '**estatística**' do teste.

Ao conjunto de valores que levam à rejeição de  $H_0$ , é costume dar o nome de **região de rejeição** do teste e representa-se por  $C$ .

Um teste fica completamente especificado pela definição da sua '**estatística**' e da **região de rejeição**.

Qualquer que seja a regra que se escolha, deve-se ter sempre em conta a probabilidade de se tomar uma decisão errada. As situações que se nos deparam, são:

Conclusão do teste:	$H_0$ verdadeira	$H_0$ falsa
não rejeitar $H_0$	decisão correcta	<b>decisão errada</b>
rejeitar $H_0$	<b>decisão errada</b>	decisão correcta

As decisões erradas que se tomam, chamam-se:

- **erro do tipo I**, quando se rejeita  $H_0$ , embora  $H_0$  fosse verdadeira, e

- **erro do tipo II**, quando se não rejeita  $H_0$  embora  $H_0$  fosse falsa (ou  $H_1$  fosse verdadeira).

$H_1$  é a **hipótese alternativa** e normalmente define um conjunto de valores complementar ao conjunto definido pela hipótese nula.

### 7.1.1 Função potência. Nível de significância.

A **probabilidade de se cometer um erro do tipo I**, depende do valor do parâmetro  $\phi$  da distribuição, desconhecido (que se pretende estimar) e, para valores *restritos ao conjunto definido por  $H_0$* , é a função

$$\begin{aligned}\alpha(\phi) &= \text{Prob} [\text{rejeitar } H_0, \text{ quando } H_0 \text{ é verdadeira}] \\ &= \text{Prob} [\text{rejeitar } H_0; H_0].\end{aligned}\tag{7.1}$$

A **probabilidade de se cometer um erro do tipo II**, para valores do parâmetro  $\phi$ , *definidos pela hipótese alternativa  $H_1$* , é a função de  $\phi$ ,

$$\begin{aligned}\beta(\phi) &= \text{Prob} [\text{não rejeitar } H_0, \text{ quando } H_1 \text{ é verdadeira}] \\ &= \text{Prob} [\text{não rejeitar } H_0; H_1].\end{aligned}\tag{7.2}$$

Define-se **função potência do teste**,  $k(\phi)$ , por

$$\begin{aligned}k(\phi) &= \text{Prob} [\text{rejeitar } H_0, \text{ para valores do parâmetro } \phi \text{ cobertos pelas hipóteses}] \\ &= \text{Prob} [\text{rejeitar } H_0; \phi]\end{aligned}\tag{7.3}$$

e é também uma função do parâmetro  $\phi$ .

Quando  $H_0$  é verdadeira,  $\alpha(\phi) \equiv k(\phi)$  e quando  $H_1$  é verdadeira ( $H_0$  falsa), temos  $\beta(\phi) \equiv 1 - k(\phi)$ .

O valor máximo da função  $\alpha(\phi)$ , para o teste, chama-se **nível de significância** do teste e designa-se por  $\alpha$ . Se a hipótese nula for simples,  $\alpha \equiv \alpha(\phi)$ .

Ao valor de  $\alpha$  também se chama **tamanho** da região de rejeição  $C$  e corresponde à área da região de rejeição.

### 7.1.2 Hipóteses simples e composta

Uma hipótese estatística pode ser precisa e específica, definindo completamente o modelo probabilístico que descreve a variável aleatória. Neste caso a hipótese diz-se **simples**.

No entanto, se a variável aleatória  $Y$  é descrita por uma propriedade ou satisfaz uma certa condição que é verdadeira para mais do que um modelo probabilístico, a hipótese diz-se **composta**.

Por exemplo, a afirmação de que  $Y$  segue uma distribuição normal, dá origem a uma hipótese composta, pois a propriedade da normalidade não define completamente a distribuição da variável  $Y$ . A hipótese, de que  $Y$  é distribuída normalmente com  $\mu = 2$  e  $\sigma^2 = 8$ , já é simples.

Um outro exemplo de hipótese composta, é a hipótese da variável  $Y$  ter média 2 e variância 8, já que estes dois parâmetros sózinhos não definem a distribuição.

### 7.1.3 Testes unilaterais e bilaterais

Nos **testes unilaterais**, a hipótese alternativa, e consequentemente a região de rejeição, está apenas de *um dos lados da hipótese nula*. Um teste unilateral pode ser reconhecido através de referências como: *mais do que, menos do que, melhor do que, pior do que, ao menos, ....*

No entanto, há situações em que é mais aconselhável usar um **teste bilateral**, cuja região de rejeição está definida *de ambos os lados da hipótese nula* e pode ser reconhecido por expressões do tipo: *diferente, modificação para melhor ou pior, ...*

## 7.2 Teste à média de uma distribuição

Seja  $Y$  uma variável aleatória normalmente distribuída, com média igual a  $\mu$  e variância igual a  $\sigma^2$ .

Para testar a hipótese nula de que a média da distribuição é igual ao valor  $K$  considere:

Caso A:

$$H_0 : \mu = K$$

contra a hipótese alternativa *bilateral*

$$H_1 : \mu \neq K.$$

Caso B:

$$H_0 : \mu = K$$

contra a hipótese alternativa *unilateral*

$$H_1 : \mu > K.$$

Sejam

$$Y_1, Y_2, \dots, Y_n$$

os elementos de uma amostra de tamanho  $n$  retirada da população  $N(\mu, \sigma^2)$ ; a média da amostra é  $\bar{Y}$

i) Se for conhecida a variância da população,  $\sigma^2$ , a 'estatística' do teste será:

$$Z = \frac{\bar{Y} - \mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}}$$

e o teste:

Caso A:

Se  $|Z| > c$ , *rejeita-se*  $H_0$ .

Caso B:

Se  $Z > c'$ , *rejeita-se*  $H_0$ ,

com  $c$  e  $c'$  os pontos críticos da distribuição da 'estatística' - normal com parâmetros 0 e 1 (Tabela A.6) - que definem a região de rejeição de tamanho (área)  $\alpha$ . O valor  $\alpha$

será o nível de significância do teste, isto é,

$$\alpha = \text{Prob}(\text{rejeitar } H_0; H_0).$$

No caso A, a região de rejeição está dividida pelos extremos da distribuição, e no caso B, a região encontra-se apenas no extremo do lado direito da distribuição. Veja-se a figura 7.1.

- ii) Se a variância da população não for conhecida, usa-se a variância da amostra,  $s^2$  e a 'estatística' do teste passa a ser:

$$T = \frac{\bar{Y} - \mu}{\sqrt{\frac{s^2}{n}}}$$

sendo o teste,

Caso A:

Se  $|T| > c$ , rejeita-se  $H_0$ .

Caso B:

Se  $T > c'$ , rejeita-se  $H_0$ ,

com  $c$  e  $c'$  os pontos críticos da distribuição da 'estatística'  $T$ , com distribuição t-Student com  $n - 1$  graus de liberdade (Tabela A.8), que definem a região de rejeição de tamanho (área)  $\alpha$ . O valor  $\alpha$  será o nível de significância do teste.

- iii) O resultado de i) pode ser estendido a problemas, em que a distribuição não seja normal, desde que a amostra retirada da população seja considerada suficientemente grande ( $n$  suficientemente grande), pela aplicação do Teorema do Limite Central.

### 7.3 Teste à diferença de duas médias

Sejam  $Y_1$  e  $Y_2$  duas variáveis aleatórias normalmente distribuídas, respectivamente, com médias e variâncias iguais a  $\mu_1$ ,  $\sigma_1^2$  e  $\mu_2$ ,  $\sigma_2^2$ .

Para testar a hipótese nula de que não existem diferenças entre as médias das duas distribuições, considere:

Caso A:

$$H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0$$

contra a hipótese alternativa *bilateral*

$$H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq 0.$$

Caso B:

$$H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0$$

contra a hipótese alternativa *unilateral*

$$H_1 : \mu_1 - \mu_2 > 0.$$



Sejam

$$Y_{11}, Y_{12}, Y_{13}, \dots, Y_{1n_1} \text{ e } Y_{21}, Y_{22}, Y_{23}, \dots, Y_{2n_2}$$

duas amostras de tamanhos  $n_1$  e  $n_2$ , retiradas respectivamente das duas populações  $N(\mu_1, \sigma_1^2)$  e  $N(\mu_2, \sigma_2^2)$ ; as médias aritméticas das amostras são:

$$\bar{Y}_1 \text{ e } \bar{Y}_2 ,$$

- i) Se forem conhecidas as variâncias das duas populações,  $\sigma_1^2$  e  $\sigma_2^2$ , a 'estatística' do teste será:

$$Z = \frac{(\bar{Y}_1 - \bar{Y}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

e o teste:

Caso A:

Se  $|Z| > c$ , rejeita-se  $H_0$ .

Caso B:

Se  $Z > c'$ , rejeita-se  $H_0$ ,

com  $c$  e  $c'$  os pontos críticos da distribuição da 'estatística' - normal com parâmetros 0 e 1 (Tabela A.6) - que definem a região de rejeição de tamanho (área)  $\alpha$ . O valor  $\alpha$  será o nível de significância do teste, isto é,

$$\alpha = Prob(\text{rejeitar } H_0; H_0).$$

No caso A, a região está dividida pelos extremos da distribuição, e no caso B, a região encontra-se apenas no extremo do lado direito da distribuição. Veja-se a figura 7.1.

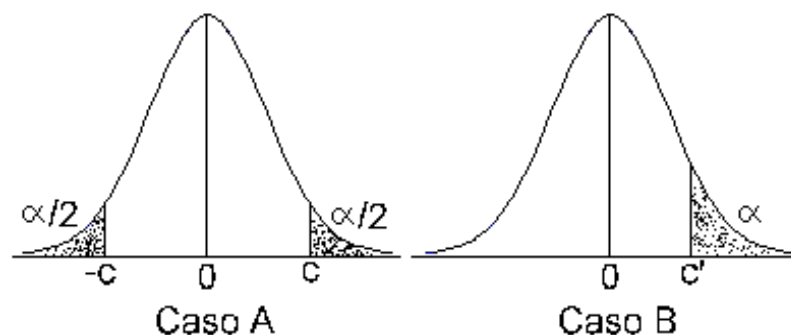


Figura 7.1: Pontos críticos da distribuição da 'estatística'  $Z$ . Região de rejeição do teste.

- ii) Se as variâncias das populações não forem conhecidas, embora se considerem iguais, usam-se as variâncias das duas amostras,  $s_1^2$  e  $s_2^2$ , e a 'estatística' do teste passa a ser:

$$T = \frac{(\bar{Y}_1 - \bar{Y}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{s_p^2 \left( \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right)}}$$

sendo o teste,

Caso A:

Se  $|T| > c$ , *rejeita-se*  $H_0$ .

Caso B:

Se  $T > c'$ , *rejeita-se*  $H_0$ ,

com  $c$  e  $c'$  os pontos críticos da distribuição da 'estatística'  $T$  -  $t$ - Student com  $n_1 + n_2 - 2$  graus de liberdade (Tabela A.8) - que definem a região de rejeição de tamanho (área)  $\alpha$ . O valor  $\alpha$  será o nível de significância do teste.

A variância,  $s_p^2$ , é a variância 'pooled' das duas amostras. Ver equação (6.20).

- iii) O resultado de i) pode ser estendido a problemas, em que as duas distribuições não sejam normais, desde que as amostras retiradas das duas populações sejam consideradas suficientemente grandes ( $n_1$  e  $n_2$  suficientemente grandes), pela aplicação do Teorema do Limite Central.

## 7.4 Teste às médias de $k$ distribuições

Se o investigador está perante um conjunto de unidades experimentais e pretende **identificar** e **analisar os efeitos** causados na variável resposta, por um certo número de factores (variáveis independentes), cria as condições necessárias para a realização de uma experiência.

A partir dessa experiência, o investigador vai obter um conjunto de observações experimentais, que serão posteriormente analisadas estatisticamente.

As condições necessárias para a execução da experiência estão directamente relacionadas com o que o investigador pretende identificar e analisar.

Para que uma experiência seja realizada eficientemente, deve usar-se uma técnica científica para o planeamento dessa experiência. Os dois objectivos principais no planeamento estatístico dessa experiência são:

1. o **planeamento** em si das etapas **da experiência** que inclui a *selecção* dos valores das *variáveis independentes* (tipo e número de factores que influenciam os resultados);  
Ao *planear a experiência* o investigador deverá ter ideias claras sobre o que pretende *identificar*.
2. a **análise estatística** dos resultados experimentais obtidos da experiência.

É conveniente, também, proceder-se de uma maneira sistemática ao desenrolar do processo experimental. Recomenda-se assim,

- em primeiro lugar, a formulação do problema,
- seguida, do **planeamento da experiência**;
- da sua realização e
- da análise estatística dos resultados (usando técnicas de inferência estatística baseadas em amostragem);
- finalmente, poder-se-á tirar conclusões e inferir sobre os resultados.

No planeamento de uma experiência, os termos mais usados são:

1. a **unidade experimental** que é a unidade básica, a partir da qual são obtidos os resultados,
2. os **factores** que são as diferentes condições que são manipuladas com as unidades,
3. os **níveis** do factor que são os diversos modos de presença desse factor,
4. os **tratamentos** que são as diferentes combinações dos níveis dos diferentes factores a analisar,
5. a **replicação** que define o número de unidades experimentais aplicadas a um certo tratamento,

- Se os níveis do factor correspondem a diferentes intensidades medidas numa escala, o factor diz-se **quantitativo**;

- Se os níveis de um factor diferem apenas em algumas características, o factor diz-se **qualitativo**.

Sempre que for necessário *comparar simultaneamente dois ou mais factores*, comparando e identificando os seus efeitos, devemos usar técnicas estatísticas do planeamento de experiências.

Os aspectos principais do planeamento da experiência são:

1. a **escolha adequada dos factores** que pretendemos investigar e a **determinação dos diferentes níveis** presentes em cada um dos factores. Esta selecção define os tratamentos;
2. a escolha do **número total de unidades** a utilizar na experiência e as unidades a testar com cada um dos tratamentos, tendo em conta o custo da experiência e a precisão dos resultados que se pretendem obter; estas escolhas definem respectivamente o número de observações (tamanho da amostra) e a replicação;
3. a **escolha do modo** como cada tratamento vai ser aplicado às unidades experimentais.

### 7.4.1 Análise da variância

A técnica da **análise da variância** consiste na *análise da variação total* dos valores das observações em relação à média calculada desses valores, e engloba a '*partição*' dessa *variação total em componentes*. A cada uma das componentes é atribuída uma causa identificável também chamada **fonte de variação**.

Se o conjunto de dados consiste em  $n$  resultados  $y_1, y_2, \dots, y_n$  e se a média é  $\bar{Y}$ , a *variação total* das observações em relação à média, *soma dos quadrados das variações*, é

$$STQ = \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{Y})^2 \quad (7.4)$$

e chama-se **soma total dos quadrados** ( $STQ$ ) das variações.

A técnica da análise da variância decompõe esta soma total em componentes, por exemplo,

**Soma Total dos Quadrados**

soma dos quadrados	soma dos quadrados	soma dos quadrados	...	soma dos quadrados
(devida à fonte 1)	(devida à fonte 2)	(devida à fonte 3)		dos resíduos (devida aos erros)

O *número* de fontes de variação e as *fórmulas* para as componentes estão relacionados com o *tipo de planeamento* escolhido e com o modelo estatístico mais apropriado para a análise.

### 7.4.2 Planeamento completamente aleatório

Relativamente aos custos e ao tempo gasto na análise dos resultados, é mais vantajoso comparar vários tratamentos simultaneamente, do que fazer comparações tomando dois tratamentos de cada vez.

Os princípios básicos, no planeamento da experiência são:

1. Replicação:

- é conveniente usar duas ou mais unidades experimentais para cada tratamento.

2. Aleatoriedade:

- os tratamentos devem ser aplicados às unidades experimentais através de um processo aleatório, sujeito à restrição de que, deve haver um número pré-especificado de unidades a receber um dado tratamento.

A um planeamento baseado apenas nestes dois princípios dá-se o nome de **planeamento completamente aleatório** ou **análise de um factor**, sinónimo de (comparação entre) **amostras aleatórias independentes** retiradas de várias populações.

Cada população é identificada pela população das respostas que seriam obtidas após a aplicação de um tratamento. Um planeamento completamente aleatório é aquele em que dois ou mais tratamentos são aplicados aleatoriamente a um certo número de unidades experimentais. Normalmente, existe para cada tratamento um número igual de unidades, embora não seja necessário.

Assim, durante o planeamento da experiência e pressupondo que temos  $k$  tratamentos para estudar, o tratamento 1 é aplicado, por um processo aleatório, a  $n_1$  unidades, o tratamento 2 é aplicado aleatoriamente a  $n_2$  unidades,..., e, finalmente, o tratamento  $k$  é aplicado às restantes  $n_k$  unidades. Das  $n$  unidades ( $n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$ ),  $n_1$  unidades experimentais são seleccionadas aleatoriamente para receber tratamento 1. Das restantes  $n - n_1$  unidades seleccionam-se aleatoriamente  $n_2$  unidades para receber tratamento 2, etc.

Os resultados da experiência formam uma tabela, em que  $y_{ij}$ , representa o resultado da observação (proveniente da unidade)  $i$  do tratamento  $j$ ,

	tratamento 1	tratamento 2	...	tratamento k	
	$y_{11}$	$y_{12}$	...	$y_{1k}$	
	$y_{21}$	$y_{22}$	...	$y_{2k}$	
	.	.		.	
	.	.		.	
	.	.		.	
	$y_{n_1,1}$				
			...	$y_{n_k,k}$	grande média
		$y_{n_2,2}$			
média do tratamento	$\bar{y}_{.1}$	$\bar{y}_{.2}$	...	$\bar{y}_{.k}$	$\bar{Y}$

*Pretende-se, então, saber se existem diferenças significativas entre os efeitos (em média) dos tratamentos e se é possível construir intervalos de confiança para as diferenças entre as médias de dois dos tratamentos.*

A análise da variância dos resultados da tabela é baseada no seguinte:

- Como o desvio, de uma observação individual relativamente à grande média,  $y_{ij} - \bar{Y}$ , é devido não só às diferenças entre as médias dos tratamentos como também às variações casuais das medições observadas de cada tratamento, a *decomposição do desvio* é a seguinte,

$$y_{ij} - \bar{Y} = (\bar{y}_{.j} - \bar{Y}) + (y_{ij} - \bar{y}_{.j})$$

observação -	desvio devido	resíduo (desvio
- grande média	ao tratamento	devido à
		variação casual
		da medição)

**Nota 7.4.1** *Se não existirem diferenças significativas entre os efeitos dos tratamentos (entre as médias dos tratamentos), espera-se que as diferenças  $\bar{y}_{.j} - \bar{Y}$  sejam aproximadamente zero.*

A medida da variação total, devida às diferenças nas médias dos tratamentos é a **soma dos quadrados dos tratamentos** (SQT),

$$SQT = \sum_{j=1}^k n_j (\bar{y}_{.j} - \bar{Y})^2. \quad (7.5)$$

Os desvios  $y_{ij} - \bar{y}_{.j}$  reflectem as variações no material usado na experiência e as variações nos esquemas de medição. É costume chamar-lhes resíduos.

Esta variação total ou **soma dos quadrados dos resíduos** (SQR) é dada por

$$SQR = \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^{n_j} (y_{ij} - \bar{y}_{.j})^2. \quad (7.6)$$

A variação total presente nos resultados é medida pela soma dos quadrados dos desvios das observações relativamente à grande média e representa-se por

$$STQ = \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^{n_j} (y_{ij} - \bar{Y})^2, \quad (7.7)$$

**soma total dos quadrados.** Pode também provar-se que

$$STQ = \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^{n_j} (y_{ij} - \bar{Y})^2 = \sum_{j=1}^k n_j (\bar{y}_{.j} - \bar{Y})^2 + \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^{n_j} (y_{ij} - \bar{y}_{.j})^2$$

ou seja,  $Q = Q_4 + Q_3$  e se  $\sigma^2$  for a variância da distribuição normal das variáveis, desconhecida,  $\frac{Q_4}{\sigma^2}$  é uma variável aleatória, distribuída segundo o Qui-quadrado com  $k - 1$  graus de liberdade,  $\frac{Q}{\sigma^2}$  é distribuída segundo o Qui-quadrado com  $\sum_{j=1}^k n_j - 1$  graus de liberdade, e de acordo com o seguinte teorema,

**Teorema 5** (*Teorema das Formas Quadráticas*): *Se  $Q = Q_1 + Q_2 + \dots + Q_k$  e se tanto a 'estatística'  $Q$  como as  $Q_1, Q_2, \dots, Q_{k-1}$  forem formas quadráticas nas  $n$  variáveis aleatórias independentes  $y_{ij}$ , normalmente distribuídas com médias iguais a  $\mu_{ij}$  e variância comum igual a  $\sigma^2$ ;*

*se as 'estatísticas'*  
 $\frac{Q}{\sigma^2}, \frac{Q_1}{\sigma^2}, \frac{Q_2}{\sigma^2}, \dots, \frac{Q_{k-1}}{\sigma^2}$

*forem distribuídas segundo o  $\chi^2$ , com graus de liberdade, respectivamente iguais a  $r, r_1, r_2, \dots, r_{k-1}$ , e se a 'estatística'  $Q_k$  é não negativa, então*

*i)  $Q_1, Q_2, \dots, Q_k$  são variáveis aleatórias estocasticamente independentes, e*

ii)  $\frac{Q_k}{\sigma^2}$  tem distribuição  $\chi^2$  com  $r - (r_1 + r_2 + \dots + r_{k-1})$  graus de liberdade.

A 'estatística'  $\frac{Q_3}{\sigma^2}$  segue a distribuição Qui-quadrado com  $\sum_{j=1}^k n_j - k$  graus de liberdade.

A decomposição da soma total dos quadrados e dos graus de liberdade é costume ser apresentada numa tabela, chamada **tabela da análise da variância**, ANOVA,

fonte	soma dos quadrados	graus de liberdade	média dos quadrados	v.a. F
tratamentos	SQT	$k - 1$	$MQT = \frac{SQT}{k-1}$	$F = \frac{MQT}{MQR}$
erros	SQR	$\sum_{j=1}^k n_j - k$	$MQR = \frac{SQR}{\sum_{j=1}^k n_j - k}$	
TOTAL	STQ	$\sum_{j=1}^k n_j - 1$		

### Modelo populacional e inferências do planeamento:

Iremos construir o modelo populacional que descreve este planeamento.

Suponha que os resultados obtidos da aplicação do tratamento  $j$  formam uma amostra aleatória retirada da população cuja distribuição é normal com média  $\mu_j$  e variância  $\sigma^2$  (comum para todos os  $j = 1, \dots, k$ ). As amostras são estocasticamente independentes. Se  $\mu = \sum_{j=1}^k \mu_j / k$  é a média das médias das populações e se  $\beta_j = \mu_j - \mu$  é o efeito da aplicação do tratamento  $j$ , o modelo usado para comparar os  $k$  tratamentos é

$$y_{ij} = \mu + \beta_j + e_{ij} \quad \begin{array}{l} j = 1, \dots, k \\ i = 1, \dots, n_j \end{array}$$

e os  $e_{ij}$  são os erros casuais das observações com distribuições normais de médias iguais a zero e desvios padrões iguais a  $\sigma$ .

Para se verificar se existem diferenças significativas entre os tratamentos, formula-se a seguinte hipótese nula:

$$H_0 : \beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_k = 0$$

isto é, os efeitos da aplicação dos  $k$  tratamentos não são estatisticamente significativos (ou não existem diferenças entre as médias das  $k$  populações).

e a hipótese alternativa é então:

$H_1$  : os efeitos da aplicação dos tratamentos são significativos  
( ou existem diferenças entre os tratamentos).

### Critério usado para testar $H_0$ contra $H_1$ :

Se a média dos quadrados dos tratamentos, MQT, for pequena, então as médias das populações são aproximadamente iguais e a hipótese nula seria rejeitada. A média dos quadrados dos resíduos MQR, serve de estimador não tendencioso da variância desconhecida  $\sigma^2$ , e pode ser usada na determinação da grandeza da média dos quadrados dos tratamentos.

Quando  $H_0$  é verdadeira, a variável aleatória ('estatística')

$$F = \frac{\text{média dos quadrados dos tratamentos}}{\text{média dos quadrados dos resíduos}} = \frac{\frac{SQT}{k-1}}{\frac{SQR}{\sum_{j=1}^k n_j - k}} \quad (7.8)$$

segue a distribuição F - Fisher com  $(k-1, \sum_{j=1}^k n_j - k)$  graus de liberdade (Tabela A.9).

Tendo em conta o que se disse anteriormente - a hipótese nula não seria rejeitada se MQT tivesse valores baixos - o teste a usar para este problema consiste em:

- Rejeitar  $H_0$  se  $F > c$

em que  $c$  (ponto crítico da distribuição da 'estatística' F que define a região de rejeição) é determinado por forma a  $\alpha = P[F > c; H_0]$ .

**Nota 7.4.2**  $\alpha$  é o nível de significância escolhido para o teste.

### Intervalos de confiança para diferenças entre pares de médias de tratamentos

Se deste teste se concluir que existem diferenças significativas entre os tratamentos, é possível detectar as diferenças existentes entre os tratamentos, tomando dois de cada vez, através da construção de um intervalo de confiança para a diferença das duas médias. Por exemplo, em relação às médias dos tratamentos 1 e 2,  $\mu_1 - \mu_2$ , usa-se a 'estatística'  $T$ , baseada em  $\bar{y}_{.1} - \bar{y}_{.2}$ , que é uma variável aleatória normalmente distribuída com média  $\mu_1 - \mu_2$  e desvio padrão  $\sigma\sqrt{(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2})}$ . Como  $\frac{SQR}{\sigma^2}$  segue a distribuição  $\chi^2$  com  $\sum_{j=1}^k n_j - k$  graus de liberdade e é independente das variáveis  $\bar{y}_{.j}$ , temos

$$T = \frac{(\bar{y}_{.1} - \bar{y}_{.2}) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{SQR}{n-k}(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2})}} \quad (7.9)$$

que tem distribuição t - Student com  $n - k$  graus de liberdade ( $n = \sum_{j=1}^k n_j$ ) (Tabela A.9). Este resultado é usado para calcular o intervalo de confiança para  $\mu_1 - \mu_2$ . O mesmo raciocínio será aplicado no cálculo de intervalos de confiança para diferenças entre quaisquer pares de médias de tratamentos  $\mu_i - \mu_j$ ,  $i \neq j = 1, \dots, k$ .

### 7.4.3 Amostras relacionadas. Planeamento com blocos aleatórios

Quando se pretende comparar simultaneamente  $k$  tratamentos, e as unidades disponíveis são heterogêneas, agrupam-se essas unidades experimentais em blocos homogêneos de tamanho  $k$  (com  $k$  unidades cada). As variações casuais são então reduzidas, se cada tratamento  $j$  ( $= 1, \dots, k$ ) for aplicado a uma unidade experimental dentro de cada um dos blocos. Como os blocos são homogêneos, isto é, as unidades experimentais dentro de cada bloco têm as mesmas características, as comparações relativas aos efeitos dos tratamentos são feitas entre os resultados do mesmo bloco.



A aleatoriedade é ainda um dos princípios fundamentais neste tipo de planeamento. Do 1º bloco selecciona-se ao acaso 1 unidade experimental para receber o tratamento 1, uma das restantes  $k - 1$  unidades é seleccionada ao acaso para receber tratamento 2, etc. Repete-se o mesmo processo nos outros blocos utilizando, contudo, sequências de números aleatórios diferentes em cada bloco. É vantajosa a selecção casual da ordem de execução das experiências de bloco para bloco.

Os resultados obtidos das experiências podem ser apresentados numa tabela do tipo,

	tratamento 1	tratamento 2	...	tratamento k	média do bloco
bloco 1	$y_{11}$	$y_{12}$	...	$y_{1k}$	$\bar{y}_{1.}$
bloco 2	$y_{21}$	$y_{22}$	...	$y_{2k}$	$\bar{y}_{2.}$
.	.	.	...	.	.
.	.	.	...	.	.
bloco b	$y_{b1}$	$y_{b2}$	...	$y_{bk}$	$\bar{y}_{b.}$
média do tratamento	$\bar{y}_{.1}$	$\bar{y}_{.2}$	...	$\bar{y}_{.k}$	$\bar{Y}$

em que  $y_{ij}$  é resultado de aplicar tratamento  $j$  no bloco  $i$ . As médias são dadas por

$$\bar{y}_{i.} = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k y_{ij} \quad \text{para } i = 1, \dots, b$$

$$\bar{y}_{.j} = \frac{1}{b} \sum_{i=1}^b y_{ij} \quad \text{para } j = 1, \dots, k$$

#### A análise da variância:

As observações de uma tabela de duas entradas incluem variações devidas aos tratamentos e variações devidas aos blocos. A decomposição total é neste caso,

$$\begin{array}{llll}
 y_{ij} - \bar{Y} & = & (\bar{y}_{.j} - \bar{Y}) & + & (\bar{y}_{i.} - \bar{Y}) & + & (y_{ij} - \bar{y}_{i.} - \bar{y}_{.j} + \bar{Y}) \\
 \text{observação-} & & \text{variação} & & \text{variação} & & \text{resíduo (variação} \\
 \text{-grande} & & \text{devida ao} & & \text{devida ao} & & \text{devida aos erros)} \\
 \text{média} & & \text{tratamento} & & \text{bloco} & & 
 \end{array}$$

A soma dos quadrados dos tratamentos (SQT), a variação total devida às diferenças nas médias dos tratamentos é

$$\begin{aligned}
 SQT &= \sum_{i=1}^b \sum_{j=1}^k (\bar{y}_{.j} - \bar{Y})^2 \\
 &= b \sum_{j=1}^k (\bar{y}_{.j} - \bar{Y})^2 .
 \end{aligned} \tag{7.10}$$

A **soma dos quadrados dos blocos** (SQB), a variação total devida às diferenças nas médias das observações dentro dos blocos é dada por

$$\begin{aligned} SQB &= \sum_{i=1}^b \sum_{j=1}^k (\bar{y}_{i.} - \bar{Y})^2 \\ &= k \sum_{i=1}^b (\bar{y}_{i.} - \bar{Y})^2 . \end{aligned} \quad (7.11)$$

A **soma dos quadrados dos resíduos** (SQR), a variação total devida aos erros casuais é dada por

$$SQR = \sum_{i=1}^b \sum_{j=1}^k (y_{ij} - \bar{y}_{i.} - \bar{y}_{.j} + \bar{Y})^2 . \quad (7.12)$$

Finalmente, a variação total das observações em relação à grande média, a **soma total dos quadrados** (STQ) é dada

$$STQ = \sum_{i=1}^b \sum_{j=1}^k (y_{ij} - \bar{Y})^2 \quad (7.13)$$

e é igual a

$$b \sum_{j=1}^k (\bar{y}_{.j} - \bar{Y})^2 + k \sum_{i=1}^b (\bar{y}_{i.} - \bar{Y})^2 + \sum_{i=1}^b \sum_{j=1}^k (y_{ij} - \bar{y}_{i.} - \bar{y}_{.j} + \bar{Y})^2 .$$

Assim,

$$Q = Q_4 + Q_2 + Q_5 .$$

Se considerarmos as variáveis  $y_{ij}$  normalmente distribuídas com variância  $\sigma^2$  desconhecida, então  $\frac{SQT}{\sigma^2} = \frac{Q_4}{\sigma^2}$  é uma v.a. distribuída segundo o Qui-quadrado com  $k - 1$  graus de liberdade e  $\frac{SQB}{\sigma^2} = \frac{Q_2}{\sigma^2}$  é  $\chi^2(bk - 1)$ . Aplicando o Teorema das Formas Quadráticas tira-se que  $\frac{Q_5}{\sigma^2}$  ou  $\frac{SQR}{\sigma^2}$  é  $\chi^2$  com  $(b - 1)(k - 1)$  graus de liberdade e que as variáveis  $Q_4$ ,  $Q_2$  e  $Q_5$  são estocasticamente independentes. Assim podemos formar a tabela ANOVA com,

fonte	soma dos quadrados	graus de liberdade	média dos quadrados	v.a. F
tratamentos	$SQT$	$k - 1$	$MQT = \frac{SQT}{k-1}$	$F_1 = \frac{MQT}{MQR}$
blocos	$SQB$	$b - 1$	$MQB = \frac{SQB}{b-1}$	$F_2 = \frac{MQB}{MQR}$
erros	$SQR$	$(b - 1)(k - 1)$	$MQR = \frac{SQR}{(b-1)(k-1)}$	
TOTAL	$STQ$	$bk - 1$		

**Modelo populacional e inferências do planeamento:**

Para testar a *hipótese de que não existem diferenças significativas entre tratamentos*, neste planeamento, usamos o modelo,

$$y_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j + e_{ij} \quad \text{para } i = 1, \dots, b \text{ e} \\ j = 1, \dots, k .$$

com  $\mu$  a média total da distribuição,  $\alpha_i$  representa o efeito devido ao bloco  $i$ ,  $\beta_j$  o efeito devido ao tratamento  $j$  e  $e_{ij}$  é o erro casual com distribuição normal com média 0 e desvio padrão  $\sigma$ .

Para o teste, a hipótese nula de que não existem diferenças significativas entre os tratamentos é

$$H_{01} : \beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_k = 0$$

contra a hipótese alternativa  $H_{11}$ : de que existem efeitos devidos aos tratamentos.

Para testar esta hipótese baseamo-nos no seguinte:

Comparamos a média dos quadrados dos tratamentos com a média dos quadrados dos resíduos. Quando o numerador tiver valores elevados, ou a razão

$$\frac{MQT}{MQR} = F_1 > c, \text{ rejeita-se } H_0$$

pois, nestas condições, as diferenças das médias  $\bar{y}_{.j}$ , em relação à grande média  $\bar{Y}$  são grandes, significando que existem diferenças entre os tratamentos. A constante  $c$  é determinada da condição

$$P_r[\text{rejeitar } H_{01}; H_{01}] = \alpha$$

$$P_r[F_{1,((k-1),(b-1)(k-1))} > c; H_{01}] = \alpha ,$$

sendo  $\alpha$  o nível de significância escolhido para o teste. A variável  $F_1$  segue a distribuição F - Fisher com  $k - 1$  e  $(b - 1)(k - 1)$  graus de liberdade (Tabela A.9).

Pode também testar-se a *hipótese de que não existem diferenças significativas entre os efeitos dos blocos*, com

$$H_{02} : \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k = 0$$

contra a hipótese alternativa  $H_{12}$ : de que existem diferenças entre os efeitos dos blocos. O teste baseia-se na 'estatística'

$$F_2 = \frac{MQB}{MQR}$$

que tem uma distribuição de F - Fisher com  $(b - 1)$  e  $(b - 1)(k - 1)$  graus de liberdade. Assim,

$$\text{rejeita-se } H_{02} \text{ se } F_2 > c$$

com  $c$  determinado da condição de

$$\alpha = P_r[F_2 > c; H_0] .$$

**Intervalos de confiança para diferenças entre pares de médias de tratamentos:**

Quando o teste baseado em  $F_1$  leva à rejeição da hipótese nula  $H_{01}$ , significando pois que existem diferenças significativas entre tratamentos, podemos construir intervalos de confiança, para comparar pares de médias de tratamentos.

A diferença

$$\beta_{j1} - \beta_{j2}$$

das duas médias, dos resultados da aplicação dos tratamentos  $j1$  e  $j2$ , pode ser estimada por  $\bar{y}_{.j1} - \bar{y}_{.j2}$ . Esta 'estatística' é normalmente distribuída com média  $\beta_{j1} - \beta_{j2}$  e variância  $\sigma^2(\frac{2}{b})$ . Assim, a variável

$$T = \frac{\bar{y}_{.j1} - \bar{y}_{.j2} - (\beta_{j1} - \beta_{j2})}{\sqrt{MQR(\frac{2}{b})}} \quad (7.14)$$

é distribuída segundo t - Student com  $(b-1)(k-1)$  graus de liberdade (Tabela A.8). Este resultado pode ser usado para calcular intervalos de confiança para a diferença  $\beta_{j1} - \beta_{j2}$  entre as média dos tratamentos  $j1$  e  $j2$ .

#### 7.4.4 Amostras relacionadas. Planeamento com blocos incompletos

As propriedades mais simples e importantes dos planeamentos com blocos incompletos, são as seguintes:

1. Cada bloco tem o mesmo número de unidades experimentais;
2. Cada tratamento é testado o mesmo número de vezes;
3. Se considerarmos dois tratamentos e contarmos o número de vezes que são testados no mesmo bloco, esse número é igual para qualquer par de tratamentos seleccionados.

Qualquer planeamento que satisfaça estas três propriedades chama-se **planeamento ajustado com blocos incompletos**.

Num planeamento deste tipo, interessa analisar as seguintes quantidades:

- i) número de tratamentos,  $k$  ;
- ii) número de vezes que cada tratamento aparece (replicação),  $r$  ;
- iii) número de blocos,  $b$  ; e
- iv) número de unidades experimentais por bloco,  $t$  .

Nesta situação, o número total de unidades experimentais usadas na experiência é igual a  $n$ , sendo

$$n = kr = bt \quad (7.15)$$

Um exemplo de planeamento ajustado com blocos incompletos é o seguinte:

- Tendo sido definidos 4 tratamentos A, B, C e D e existindo 4 blocos (1,2,3 e 4), cada um deles com 3 unidades, temos

				tratamento				
				A    B    C    D				
bloco								
1	A	B	C	$\Leftrightarrow$	1	$y_{1A}$	$y_{1B}$	$y_{1C}$ —
2	A	B	D		2	$y_{2A}$	$y_{2B}$	— $y_{2D}$
3	A	C	D		3	$y_{3A}$	—	$y_{3C}$ $y_{3D}$
4	B	C	D		4	—	$y_{4B}$	$y_{4C}$ $y_{4D}$

Neste caso,  $k = 4$ ,  $b = 4$ ,  $r = 3$ ,  $t = 3$  e  $n = 12$ .

**Análise da variância e cálculo das médias ajustadas dos tratamentos:**

O modelo probabilístico das observações para este tipo de planeamento é

$$y_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j + e_{ij},$$

em que  $\mu$  é a média,  $\alpha_i$  o efeito devido ao bloco  $i$  ( $i = 1, \dots, b$ ),  $\beta_j$  o efeito devido ao tratamento  $j$  ( $j = 1, \dots, k$ ) e  $e_{ij}$  são os erros aleatórios de observação, independentes e normalmente distribuídos com média zero e variância comum  $\sigma^2$ .

Uma vez que, nem todos os tratamentos aparecem em todos os blocos, ter-se-á que ter cuidado na eliminação dos efeitos dos blocos, quando se introduzem os efeitos nos tratamentos.

A 'estatística'  $T_j = \sum_{i=1}^b y_{ij}$  ( $j = 1, \dots, k$ ) representa a soma total das observações para cada tratamento  $j$ .

A soma total, de todas as observações em todos os blocos onde ocorre o tratamento  $j$ , é dada por,

$$B_j = \sum_{i=1}^b k_{ij} R_i \quad \text{com} \quad R_i = \sum_{j=1}^k y_{ij} \quad (7.16)$$

para  $j = 1, \dots, k$ .

Note-se que  $k_{ij} = 1$  se o tratamento  $j$  ocorre no bloco  $i$  e  $k_{ij} = 0$  se não ocorre.

O efeito estimado do tratamento  $j$  ( $j = 1, \dots, k$ ) é dado pela 'estatística'

$$\vartheta_j = \frac{tT_j - B_j}{k\lambda} \quad (7.17)$$

onde  $\lambda$  representa o número de vezes que um par de tratamentos aparece junto, no mesmo bloco. Este valor é constante e igual a

$$\lambda = \frac{r(t-1)}{k-1}$$

e é característico do planeamento.

A partir da grande média das observações

$$\bar{Y} = \frac{\sum_{i=1}^b \sum_{j=1}^k y_{ij}}{n},$$

calculam-se as **médias ajustadas dos tratamentos**,

$$\bar{y}_{.j}(AJ.) = \bar{Y} + \vartheta_j,$$

cujas variâncias são iguais a

$$\text{var}[\bar{y}_{.j}(AJ.)] = \frac{t\sigma^2}{k\lambda}, \quad j = 1, 2, \dots, k.$$

Nesta situação a variância da diferença entre as médias ajustadas de dois tratamentos  $i$  e  $j$ , é,

$$\text{var}[\bar{y}_{.j}(AJ.) - \bar{y}_{.i}(AJ.)] = \frac{2t\sigma^2}{k\lambda} . \quad (7.18)$$

Considerando

$$S = \frac{(\sum_{i=1}^b \sum_{j=1}^k y_{ij})^2}{n} , \quad (7.19)$$

$$SQB = \frac{\sum_{i=1}^b R_i^2}{t} - S , \quad (7.20)$$

$$SQT = \frac{\sum_{j=1}^k (tT_j - B_j)^2}{\lambda tk} \quad (7.21)$$

e uma vez que a **soma total dos quadrados** é

$$STQ = \sum_{i=1}^b \sum_{j=1}^k y_{ij}^2 - S = SQT + SQB + SQR$$

temos a seguinte tabela ANOVA:

fonte de variação	soma de quadrados	g.l.	média de quadrados	v.a. F
Tratamentos ajustados para blocos	$SQT$	$k - 1$	$MQT = \frac{SQT}{k-1}$	$F_1 = \frac{MQT}{MQR}$
Blocos	$SQB$	$b - 1$	$MQB = \frac{SQB}{b-1}$	$F_2 = \frac{MQB}{MQR}$
Resíduo	$SQR$	$n - k - b + 1$	$MQR = \frac{SQR}{n-k-b+1}$	
TOTAL	$STQ$	$n - 1$		

### Testes de hipóteses

Para testar a hipótese nula

$$H_0 : \beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_k = 0$$

[não existem diferenças significativas devidas aos tratamentos],

contra

$H_1$  : existem diferenças nos resultados devidas aos tratamentos

usa-se a 'estatística'  $F_1$  que é distribuída segundo F - Fisher com  $k - 1$  e  $n - k - b + 1$  graus de liberdade (Tabela A.9).

Assim,

$$\text{rejeita-se } H_0 \text{ se } F_1 > c ,$$

em que  $c$  é determinado a partir de:

$$\begin{aligned}\alpha = \text{nível de significância} &= P_r[\text{rejeitar } H_0; H_0] \\ &= P_r[F_1 > c; H_0]\end{aligned}$$

Nos planeamentos completamente aleatório, com blocos e factorial, o erro padrão da diferença entre as médias estimadas de dois tratamentos, era

$$\sqrt{\frac{2\sigma^2}{\text{n}^\circ \text{de observações por tratamentos}}}; \quad (7.22)$$

sendo, no planeamento com blocos aleatórios, o n.º de observações por tratamento igual a  $b$ , e a variância era estimada por  $MQR$ .

No *planeamento ajustado com blocos incompletos*, este erro padrão é maior do que o erro em (7.22), devido ao ajuste aplicado para corrigir os efeitos dos blocos. De facto, o n.º de observações por tratamento é igual a  $r = \frac{bt}{k}$  sendo  $\leq b$  uma vez que  $\frac{t}{k} \leq 1$ .

É costume exprimir o erro padrão da diferença entre as médias de dois tratamentos por

$$\frac{\sqrt{\frac{2}{r} \sigma^2}}{\sqrt{\xi}} \quad (7.23)$$

sendo  $\xi = \frac{k(t-1)}{t(k-1)}$  o '**factor de eficiência**' do planeamento.

O factor de eficiência  $\xi$  representa a perda que se obtém pela aplicação do planeamento com blocos incompletos, sem se ter verificado uma redução no desvio padrão.

Para este planeamento,  $\xi$  é tanto mais pequeno quanto maior for o número de unidades por bloco e maior o número de tratamentos. Assim,  $\xi$  está perto de 1 se o número de tratamentos não excede, excessivamente, o número de unidades por bloco ou se este número for grande.

O planeamento ajustado com blocos incompletos usa-se sempre que for possível uma redução apreciável no desvio padrão. Deve obter-se uma redução da ordem dos 10% para que o uso deste tipo de planeamento possa trazer vantagens.

#### 7.4.5 Análise de dois factores. Planeamento factorial com uma replicação. Planeamento factorial com $r$ replicações

Cada vez é mais necessário estudar os efeitos de vários factores em experiências. Fazendo variar simultaneamente os factores (com diferentes níveis) durante a experiência, é possível obter informações sobre os efeitos causados por esses factores, bem como saber se eles interagem. O conjunto das medições que se obtêm, fazendo variar um dos factores é útil para se inferir acerca desse factor. No planeamento factorial, as conclusões obtidas relativamente aos efeitos de cada factor, são baseadas no conjunto inteiro das medições. Obtém-se assim uma utilização eficiente das diversas fontes.

Suponha que se pretende estudar o efeito resultante da variação de dois factores, A e B. O factor A apresenta-se com  $p$  níveis e o factor B com  $q$  níveis. Cada *combinação de um nível de A com um nível de B define um tratamento*. Existem pois  $pq$  tratamentos. Chama-se então, um **planeamento factorial**  $pq$ . Um planeamento deste tipo, com uma replicação,



consiste em usar  $pq$  unidades experimentais e atribuir aleatoriamente um tratamento a cada unidade.

A tabela, com os resultados da experiência, apresenta a seguinte forma,

níveis de A	níveis de B				média do nível de A
	$B_1$	$B_2$	...	$B_q$	
$A_1$	$y_{11}$	$y_{12}$	...	$y_{1q}$	$\bar{y}_{1.}$
$A_2$	$y_{21}$	$y_{22}$	...	$y_{2q}$	$\bar{y}_{2.}$
.					
.	.	.	...	.	.
.					
$A_p$	$y_{p1}$	$y_{p2}$	...	$y_{pq}$	$\bar{y}_{p.}$
média do nível de B	$\bar{y}_{.1}$	$\bar{y}_{.2}$		$\bar{y}_{.q}$	$\bar{Y}$

Esta estrutura é muito semelhante à estrutura do planeamento com blocos aleatórios. O factor bloco servia para reduzir a variação casual dos erros e aumentar a precisão da influência do factor principal, o tratamento.

Com o planeamento factorial, as inferências são feitas em relação aos efeitos dos dois factores e se possível, também, em relação à interacção entre factores.

### Modelo populacional aditivo

A análise do planeamento factorial com 1 replicação é baseada no modelo populacional *do tipo aditivo*, porque os efeitos devidos a cada um dos factores são adicionados,

$$y_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j + e_{ij}$$

com  $\mu$  a média total,  $\alpha_i$  o efeito devido ao nível  $i$  do factor  $A$  ( $i = 1, \dots, p$ ),  $\beta_j$  o efeito devido ao nível  $j$  do factor  $B$  ( $j = 1, \dots, q$ ) e  $e_{ij}$  são erros casuais independentes, normalmente distribuídos com médias 0 e variância comum  $\sigma^2$ .

A decomposição da variação de cada observação em relação à grande média, inclui um termo devido ao factor  $A$ , outro devido ao factor  $B$  e o resíduo,

$$y_{ij} - \bar{Y} = \underbrace{(\bar{y}_{i.} - \bar{Y})}_{\text{variação devida ao factor A}} + \underbrace{(\bar{y}_{.j} - \bar{Y})}_{\text{variação devida ao factor B}} + \underbrace{(y_{ij} - \bar{y}_{i.} - \bar{y}_{.j} + \bar{Y})}_{\text{resíduo}}$$

A **soma dos quadrados do factor A**, a variação total devida às diferenças nas médias dos níveis do factor  $A$  é dada por

$$SQF_A = q \sum_{i=1}^p (\bar{y}_{i.} - \bar{Y})^2. \quad (7.24)$$

A **soma dos quadrados do factor  $B$** , a variação total devida às diferenças nas médias dos níveis do factor  $B$  é

$$SQF_B = p \sum_{j=1}^q (\bar{y}_{.j} - \bar{Y})^2. \quad (7.25)$$

A **soma dos quadrados dos resíduos** é

$$SQR = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q (y_{ij} - \bar{y}_{i.} - \bar{y}_{.j} + \bar{Y})^2. \quad (7.26)$$

Finalmente, a **soma total dos quadrados** é dada por

$$STQ = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q (y_{ij} - \bar{Y})^2 \quad (7.27)$$

e

$$STQ = SQF_A + SQF_B + SQR$$

$$Q = Q_2 + Q_4 + Q_5$$

Se considerarmos as variáveis  $y_{ij}$  normalmente distribuídas com variância  $\sigma^2$  desconhecida, então

$$\frac{Q_2}{\sigma^2} \sim \chi^2(p-1), \quad \frac{Q_4}{\sigma^2} \sim \chi^2(q-1) \quad \text{e} \quad \frac{Q_5}{\sigma^2} \sim \chi^2(pq-1).$$

Assim  $Q_2, Q_4, Q_5$  são variáveis estocasticamente independentes e de acordo com o Teorema da Formas Quadráticas  $\frac{Q_5}{\sigma^2} \sim \chi^2((q-1)(p-1))$ .

A tabela ANOVA, mostra a decomposição da soma total dos quadrados. As variáveis casuais  $F_1$  e  $F_2$  são usadas para os testes. Assim, para o planeamento com *uma replicação*,

fonte	soma dos quadrados	graus de liberdade	média dos quadrados	v.a. F
factor $A$	$SQF_A$	$p-1$	$MQF_A = \frac{SQF_A}{p-1}$	$F_1 = \frac{MQF_A}{MQR}$
factor $B$	$SQF_B$	$q-1$	$MQF_B = \frac{SQF_B}{q-1}$	$F_2 = \frac{MQF_B}{MQR}$
erro	$SQR$	$(p-1)(q-1)$	$MQR = \frac{SQR}{(p-1)(q-1)}$	
TOTAL	STQ	$pq-1$		

### Testes de hipóteses

- i) Para testar a hipótese nula de que não existem diferenças significativas entre os níveis do factor  $A$ , a hipótese nula é

$$H_{01} : \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_p = 0$$

contra a hipótese alternativa  $H_{11}$ : de que existem diferenças entre os níveis de  $A$  e o teste consiste em

$$\text{rejeitar } H_{01} \text{ se } F_1 > c$$

com  $c$  determinado de

$$\alpha = P_r[F_1 > c; H_{01}] .$$

- ii) Para testar a hipótese nula de que não existem diferenças significativas entre os níveis do factor  $B$ ,

$$H_{02} : \beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_q = 0$$

contra a hipótese alternativa  $H_{12}$ : de que existem diferenças devidas aos efeitos de  $B$  e o teste é baseado na 'estatística'  $F_2$  e consiste em

$$\text{rejeitar } H_{02} \text{ se } F_2 > c .$$

A variável  $F_2$  é distribuída segundo  $F$  com  $(q-1)$  e  $(p-1)(q-1)$  graus de liberdade.

Para comparar as médias das populações para os níveis  $i$  e  $j$  do factor  $A$  conservando fixo um nível  $k$  do factor  $B$ , comparam-se os valores esperados,

$$\begin{array}{ccc} \text{(média do} & - & \text{(média do} \\ \text{nível } i) & & \text{nível } j) \\ \text{de } A & & \text{de } A \end{array} = \mu + \alpha_i + \beta_k - (\mu + \alpha_j + \beta_k) = \alpha_i - \alpha_j$$

para todos os níveis  $k$  de  $B$ , pois a diferença é a mesma qualquer que seja o nível de  $B$  ( $k = 1, \dots, q$ ). Esta propriedade está representada na figura 7.2 (a), em que a diferença entre duas das curvas é constante para todos os níveis de  $B$ .

Para determinar intervalos de confiança para a diferença  $\alpha_i - \alpha_j$  usa-se um processo idêntico ao que foi usado no planeamento com blocos aleatórios.

Pode acontecer, que a diferença entre as médias dos níveis  $i$  e  $j$  do factor  $A$  seja positiva para uns níveis de  $B$  e negativa para outros. O comportamento (em média) dos níveis do factor  $A$  é então dependente do nível do factor  $B$  e diz-se que os factores **interagem**. A representação gráfica desta situação está na figura 7.2.

Em geral ocorrem interacções entre factores e torna-se bastante importante o reconhecimento da sua presença. Para estes problemas, não é permitido o uso do modelo populacional do tipo aditivo para descrever o planeamento.

### Modelo populacional multiplicativo

O modelo anterior (aditivo) pode ser estendido, com a inclusão de mais um termo que representa a interacção do nível  $i$  do factor  $A$  com o nível  $j$  do factor  $B$ . Esse *termo* passa a ser o  $\gamma_{ij}$ . Assim, o modelo do *tipo multiplicativo* é:

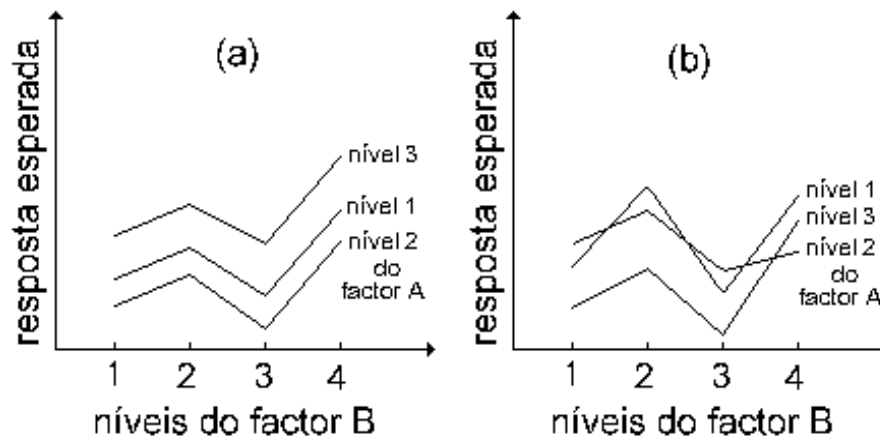


Figura 7.2: Efeitos entre níveis de factores (a) sem interacção; (b) com interacção

$$y_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_{ij} + e_{ij} .$$

para  $i = 1, \dots, p$  e  $j = 1, \dots, q$ . Um planeamento factorial  $pq$  com uma só replicação não permite fazer inferências sobre os efeitos de ambos os factores e da interacção. Portanto, quando a *componente interacção é incluída no modelo, torna-se necessário o uso de mais do que uma replicação no planeamento factorial  $pq$* . Com  $r$  replicações, o planeamento resultante chama-se **planeamento factorial  $pq$  com  $r$  replicações**. Ao todo serão necessárias  $rpq$  unidades experimentais para testar os  $pq$  tratamentos.

Se  $y_{ijk}$  for o resultado da observação número  $k$  ( $k = 1, \dots, r$ ), para  $r$  replicações, do tratamento definido pelos níveis  $i$  de  $A$  e  $j$  de  $B$ , em que  $A$  e  $B$  são os dois factores a estudar, a tabela com as observações tem a seguinte forma:

	$B_1$	$B_2$	...	$B_q$	média do nível de $A$
$A_1$	$y_{111}, y_{112}, \dots, y_{11r}$	$y_{121}, \dots, y_{12r}$	...	$y_{1q1}, \dots, y_{1qr}$	$\bar{y}_{1..}$
$A_2$	$y_{211}, y_{212}, \dots, y_{21r}$	$y_{221}, \dots, y_{22r}$	...	$y_{2q1}, \dots, y_{2qr}$	$\bar{y}_{2..}$
...	...	...	...	...	...
$A_p$	$y_{p11}, y_{p12}, \dots, y_{p1r}$	$y_{p21}, \dots, y_{p2r}$	...	$y_{pq1}, \dots, y_{pqr}$	$\bar{y}_{p..}$
média do nível de $B$	$\bar{y}_{.1.}$	$\bar{y}_{.2.}$		$\bar{y}_{.q.}$	$\bar{Y}$

A decomposição da variação da observação em relação à grande média, inclui quatro termos, um devido ao factor  $A$ , outro devido ao factor  $B$ , outro devido à interacção entre  $A$  e  $B$  e outro ao resíduo,

$$\begin{aligned}
y_{ijk} - \bar{Y} &= (\bar{y}_{i..} - \bar{Y}) & + & (\bar{y}_{.j.} - \bar{Y}) & + & (\bar{y}_{ij.} - \bar{y}_{i..} - \bar{y}_{.j.} + \bar{Y}) & + \\
&\text{variação} & & \text{variação} & & \text{variação devida} & \\
&\text{devida} & & \text{devida} & & \text{à interacção} & \\
&\text{ao factor A} & & \text{ao factor B} & & & \\
&+ & & (y_{ijk} - \bar{y}_{ij.}) & & & \\
&\text{resíduo} & & & & & 
\end{aligned}$$

A soma dos quadrados das variações devidas ao factor  $A$  é

$$SQF_A = qr \sum_{i=1}^p (\bar{y}_{i..} - \bar{Y})^2, \quad (7.28)$$

a soma dos quadrados das variações devidas ao factor  $B$  é

$$SQF_B = pr \sum_{j=1}^q (\bar{y}_{.j.} - \bar{Y})^2, \quad (7.29)$$

a soma dos quadrados das variações devidas à interacção entre  $A$  e  $B$  é dada por

$$SQI_{AB} = r \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q (\bar{y}_{ij.} - \bar{y}_{i..} - \bar{y}_{.j.} + \bar{Y})^2, \quad (7.30)$$

e a soma dos quadrados dos resíduos é

$$SQR = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q \sum_{k=1}^r (y_{ijk} - \bar{y}_{ij.})^2. \quad (7.31)$$

Finalmente, a soma total dos quadrados é

$$STQ = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q \sum_{k=1}^r (y_{ijk} - \bar{Y})^2. \quad (7.32)$$

e

$$STQ = SQF_A + SQF_B + SQI_{AB} + SQR.$$

Se considerarmos os  $y_{ijk}$  como normalmente distribuídos com variância comum  $\sigma^2$  podemos definir as seguintes variáveis,  $\frac{SQF_A}{\sigma^2}$  cuja distribuição é  $\chi^2(p-1)$ ,  $\frac{SQF_B}{\sigma^2}$  que é  $\chi^2(q-1)$ ,  $\frac{SQI_{AB}}{\sigma^2}$  que é  $\chi^2((p-1)(q-1))$ . Como  $\frac{STQ}{\sigma^2} \sim \chi^2(pqr-1)$ , também, de acordo com o Teorema das Formas Quadráticas  $\frac{SQR}{\sigma^2} \sim \chi^2(pq(r-1))$ .

A tabela ANOVA para este tipo de planeamento factorial  $pq$  com  $r$  replicações é,

fonte	soma dos quadrados	graus de liberdade	média dos quadrados	v.a. F
factor $A$	$SQF_A$	$p-1$	$MQF_A = \frac{SQF_A}{p-1}$	$F_1 = \frac{MQF_A}{MQR}$
factor $B$	$SQF_B$	$q-1$	$MQF_B = \frac{SQF_B}{q-1}$	$F_2 = \frac{MQF_B}{MQR}$
iteracção $A \times B$	$SQI_{AB}$	$(p-1)(q-1)$	$MQI_{AB} = \frac{SQI_{AB}}{(p-1)(q-1)}$	$F_3 = \frac{MQI_{AB}}{MQR}$
erro	$SQR$	$pq(r-1)$	$MQR = \frac{SQR}{pq(r-1)}$	
TOTAL	$STQ$	$pqr-1$		

**Testes de hipóteses**

Para testar a hipótese, de que não existem diferenças significativas entre os níveis de  $A$ , a hipótese nula é

$$H_{01} : \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_p = 0$$

contra a hipótese alternativa  $H_{11}$ : de que existem diferenças significativas entre os níveis de  $A$ , o teste baseia-se na 'estatística'  $F_1$  e consiste em

$$\text{rejeitar } H_{01} \text{ se } F_1 > c$$

com  $c$  determinado de

$$\alpha = Pr[\text{rejeitar } H_{01}; H_{01}] = [F_1 > c; H_{01}]$$

sendo  $F_1$  distribuída segundo F com  $(p - 1)$  e  $pq(r - 1)$  graus de liberdade.

Para testar a hipótese, de que não existem diferenças significativas entre os níveis de  $B$ , a hipótese nula é

$$H_{02} : \beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_q = 0$$

contra a hipótese alternativa  $H_{12}$ : de que existem diferenças significativas entre os níveis de  $B$ , o teste baseia-se na 'estatística'  $F_2$  e consiste em

$$\text{rejeitar } H_{02} \text{ se } F_2 > c$$

com  $c$  determinado de  $\alpha = Pr[F_2 > c; H_{02}]$ , com  $F_2$  distribuída segundo F com  $(q - 1)$  e  $pq(r - 1)$  graus de liberdade.

Finalmente, para testar a hipótese nula

$$H_{03} : \gamma_{11} = \gamma_{12} = \dots = \gamma_{21} = \dots = \gamma_{pq} = 0$$

da não existência de efeitos significativos da interação entre os dois factores  $A$  e  $B$ , contra a hipótese alternativa  $H_{13}$ : da existência desses efeitos, o teste baseia-se na 'estatística'  $F_3$ , cuja distribuição é F - Fisher com  $(p - 1)(q - 1)$  e  $pq(r - 1)$  graus de liberdade. O teste consiste em

$$\text{rejeitar } H_{03} \text{ se } F_3 > c$$

com  $c$  determinado de

$$\alpha = Pr[F_3 > c; H_{03}]$$

sendo  $\alpha$  o nível de significância escolhido para o teste.

Obs: Se o efeito da interação for considerado significativo, isto é, se  $H_{03}$  for rejeitada, nunca se poderá concluir que o efeito principal de cada um dos factores não é significativo.

### 7.4.6 Planeamento factorial a dois níveis, $2^2$ e $2^3$

Quando cada factor no planeamento aparece apenas com 2 níveis, o planeamento passa a chamar-se *factorial a dois níveis*. É costume usar este tipo de planeamento nas situações em que um número elevado de factores podem influenciar os resultados.

#### Planeamento $2^2$

Neste tipo de planeamento factorial a dois níveis, são testados 2 factores, cada um deles com 2 níveis. O número de tratamentos é igual a 4.

A análise deste tipo de planeamento vem simplificada se atribuirmos o valor -1 ao nível inferior e +1 ao nível superior de cada factor. As diferentes combinações de níveis dão origem aos tratamentos e os resultados da experiência podem ser apresentados na tabela,

tratamentos	factor $A$	factor $B$	$A \times B$ interacção	observações ( $r$ replicações)	médias dos tratamentos
T1	-	-	+	$y_{11} \ y_{12} \ \dots \ y_{1r}$	$\bar{y}_1$
T2	+	-	-	$y_{21} \ y_{22} \ \dots \ y_{2r}$	$\bar{y}_2$
T3	-	+	-	$y_{31} \ y_{32} \ \dots \ y_{3r}$	$\bar{y}_3$
T4	+	+	+	$y_{41} \ y_{42} \ \dots \ y_{4r}$	$\bar{y}_4$

#### Estimativa dos efeitos principais

Se usarmos esta notação, a análise deste planeamento é muito simples. Assim, o **efeito principal devido ao factor  $A$**  pode ser estimado pela média das variações de  $A$ ,

$$ee_A = \frac{(\bar{y}_2 - \bar{y}_1) + (\bar{y}_4 - \bar{y}_3)}{2}, \quad (7.33)$$

( $ee_A \equiv$ efeito estimado devido ao factor  $A$ ) com  $\bar{y}_2 - \bar{y}_1$  medindo o efeito da variação do factor  $A$  de -1 para +1 quando  $B$  é fixo e igual a -1 e  $\bar{y}_4 - \bar{y}_3$  mede o efeito da variação do factor  $A$  de -1 para +1 quando  $B$  é fixo e igual a +1. Pode provar-se o seguinte

$$SQF_A = r (\text{efeito estimado}_A)^2. \quad (7.34)$$

A estimativa do efeito principal do factor  $B$  é

$$ee_B = \frac{(\bar{y}_3 - \bar{y}_1) + (\bar{y}_4 - \bar{y}_2)}{2}$$

sendo

$$SQF_B = r (\text{efeito estimado}_B)^2.$$

O efeito principal devido à interacção entre  $A$  e  $B$  é estimado por

$$ee_{AB} = \frac{(\bar{y}_4 - \bar{y}_3) + (\bar{y}_1 - \bar{y}_2)}{2}$$

sendo

$$SQI_{AB} = r (\text{efeito estimado}_{AB})^2 .$$

Este efeito resulta da diferença entre o aumento (variação) no resultado ao nível superior  $(\bar{y}_4 - \bar{y}_3)$  e ao nível inferior  $(\bar{y}_2 - \bar{y}_1)$  do factor  $B$ . Se os dois factores  $A$  e  $B$  não interagem, estes aumentos devem ser iguais ou quase iguais e a diferença estará próxima de zero.

Para se obter uma estimativa da variância de cada um destes efeitos estimados, é necessário calcular a variância de cada média das observações (das amostras). Como existem  $r$  observações em cada tratamento ( $r$  replicações) e a variância de cada observação é  $\sigma^2$ , a variância de cada média  $\bar{y}_i (i = 1, 2, 3, 4)$  é  $\frac{\sigma^2}{r}$ . Sendo as médias, variáveis aleatórias estocasticamente independentes, a variância dos efeitos estimados é

$$var[ee] = \frac{\sigma^2}{r} . \quad (7.35)$$

Como  $\sigma^2$  é desconhecido, pode ser estimado pela variância residual

$$s^2 = \frac{1}{4}(s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 + s_4^2)$$

em que

$$s_1^2 = \frac{\sum_{j=1}^r (y_{1j} - \bar{y}_1)^2}{(r-1)} ,$$

$$s_2^2 = \frac{\sum_{j=1}^r (y_{2j} - \bar{y}_2)^2}{(r-1)} ,$$

... etc.

Assim, com os valores calculados de  $SQF_A$ ,  $SQF_B$  e  $SQI_{AB}$ , pode-se construir a tabela ANOVA e testar as hipóteses estatísticas idênticas às referidas no planeamento factorial  $pq$  com  $r$  replicações.

### Intervalos de confiança para os "efeitos" devidos aos factores principais e à interacção

Como a variável aleatória, efeito estimado ( $ee$ ), segue a distribuição normal com média  $\mu$ , ("efeito real") e variância  $\frac{\sigma^2}{r}$ , então a variável aleatória

$$T = \frac{ee - \mu}{\sqrt{(\frac{s^2}{r})}} \quad (7.36)$$

é distribuída segundo t - student com  $4(r-1)$  graus de liberdade. Este é o número de graus de liberdade da variável que aparece em denominador

$$\frac{4(r-1)s^2}{\sigma^2}$$

que segue a distribuição Qui-quadrado com  $4(r-1)$  graus de liberdade. A 'estatística'  $T$  pode ser usada para construirmos intervalos de confiança para o "efeito real" =  $\mu$  de cada um dos factores principais ou da interacção, baseados num planeamento factorial  $2^2$  com  $r$  replicações.



**Planeamento  $2^3$** 

Este tipo de planeamento engloba o estudo dos efeitos principais de 3 factores e interacções, em que cada factor se apresenta com apenas 2 níveis. O número total de tratamentos é  $2^3 = 8$ . Introduzindo a notação simplificada referida no planeamento anterior, com  $-1$  a indicar o nível inferior e  $+1$  o nível superior de cada um dos factores, os resultados da experiência podem ser apresentados numa tabela do tipo,

Tratamentos	factores			interacções				observações ( $r$ replicações)				médias dos tratamentos
	A	B	C	AB	AC	BC	ABC					
$T_1$	-	-	-	+	+	+	-	$y_{11}$	$y_{12}$	$\dots$	$y_{1r}$	$\bar{y}_1$
$T_2$	+	-	-	-	-	+	+	$y_{21}$	$y_{22}$	$\dots$	$y_{2r}$	$\bar{y}_2$
$T_3$	-	+	-	-	+	-	+	$y_{31}$	$y_{32}$	$\dots$	$y_{3r}$	$\bar{y}_3$
$T_4$	+	+	-	+	-	-	-					
$T_5$	-	-	+	+	-	-	+	$\dots$				
$T_6$	+	-	+	-	+	-	-					
$T_7$	-	+	+	-	-	+	-					
$T_8$	+	+	+	+	+	+	+	$y_{81}$	$y_{82}$	$\dots$	$y_{8r}$	$\bar{y}_8$

**Estimativa dos efeitos principais**

A fórmula geral que deve ser usada para estimar os efeitos principais dos factores e das interacções, é

$$ee = \frac{1}{2^{3-1}} [\pm \bar{y}_1 \pm \bar{y}_2 \pm \bar{y}_3 \pm \bar{y}_4 \pm \dots \pm \bar{y}_8] \quad (7.37)$$

em que os sinais escolhidos correspondem aos sinais presentes na coluna respectiva do factor ou da interacção, cujo efeito se pretende estimar. Por exemplo, a estimativa do efeito principal devido ao factor  $B$  é

$$ee_B = \frac{1}{4} [-\bar{y}_1 - \bar{y}_2 + \bar{y}_3 + \bar{y}_4 - \bar{y}_5 - \bar{y}_6 + \bar{y}_7 + \bar{y}_8].$$

Obs: Caso só exista 1 replicação, o valor da observação  $y_i$  ( $i = 1, \dots, 8$ ) vai substituir a média  $\bar{y}_i$ , nas fórmulas.

Para este tipo de planeamento, também se tem

$$\begin{aligned} SQF_A &= 2r (ee_A)^2 \\ SQF_B &= 2r (ee_B)^2 \\ SQF_C &= 2r (ee_C)^2 \\ SQI_{AB} &= 2r (ee_{AB})^2 \\ &\dots \\ SQI_{ABC} &= 2r (ee_{ABC})^2. \end{aligned}$$

Assim como a variância da variável  $\bar{y}_i$  ( $i = 1, \dots, 8$ ) é  $\frac{\sigma^2}{r}$  (com  $r$  o número de replicações), também o valor da variância de cada um dos efeitos estimados, pela fórmula geral, é  $var[ee] = \frac{\sigma^2}{2r}$ .

A variável

$$s^2 = \frac{s_1^2 + s_2^2 + \dots + s_8^2}{8}, \quad (7.38)$$

conhecida por variância residual, pode ser usada como estimador de  $\sigma^2$ . A variável

$$8(r-1)\frac{s^2}{\sigma^2}$$

é distribuída segundo o Qui - quadrado com  $8(r-1)$  graus de liberdade.

Para se calcularem intervalos de confiança para os "efeitos reais" devidos aos factores principais ou interacções, usa-se a 'estatística'

$$T = \frac{ee - \text{"efeito real"}}{\sqrt{\frac{s^2}{2r}}} \quad (7.39)$$

cujas distribuição é t - Student com  $8(r-1)$  graus de liberdade.

A análise da variância dos resultados é feita por um processo semelhante aos planeamentos anteriores, calculando-se a contribuição de cada factor para a soma total dos quadrados. A soma dos quadrados dos efeitos de cada *factor* (ou *interacção*) pode ser calculada a partir de

$$SQ_{factor \text{ ou } interac.} = 2^{n-2}r(ee_{factor \text{ ou } interac})^2$$

sendo  $n$  o número de factores presentes no planeamento e  $r$  o número de replicações.

#### 7.4.7 Planeamentos baseados em quadrados latinos e greco-latinos

Considere a realização de uma experiência em que estão presentes mais do que 2 factores e em que cada um deles pode aparecer com mais do que 2 níveis. Por exemplo, o *modelo populacional* respeitante ao caso de 3 factores com  $m, n$  e  $p$  níveis respectivamente e com  $r$  observações por tratamento seria,

$$y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_k + v_{ij} + \xi_{jk} + \eta_{ik} + \zeta_{ijk} + e_{ijk}$$

em que os  $\alpha_i$ ,  $\beta_j$  e  $\gamma_k$  representam os efeitos principais devidos aos factores  $A$ ,  $B$  e  $C$  (3 factores) com  $i = 1, \dots, m$ ,  $j = 1, \dots, n$  e  $k = 1, \dots, p$ . Os  $v_{ij}$ ,  $\xi_{jk}$  e  $\eta_{ik}$  representam os efeitos devidos às interacções de 2ª ordem entre dois factores e  $\zeta_{ijk}$ , a interacção de 3ª ordem em relação aos três factores.

Considerando várias -  $r$  - observações por tratamento (um total de  $mnp$  tratamentos), cada observação seria representada pela variável  $y_{ijkl}$  ( $l = 1, \dots, r$ ). Assim, seriam necessárias  $mnp r$  observações para testar os efeitos principais dos diversos factores e as interacções entre factores.

No entanto, na maior parte dos casos não é possível obter tantas observações, conseguindo-se mesmo, menos do que  $mnp$  observações (as necessárias para 1 observação por tratamento). Usando um tipo de planeamento muito simples, conhecido pelo nome de **quadrado latino** é possível testar um dos factores em presença dos outros dois.

Para uma melhor compreensão considere o exemplo em que três factores estão presentes : máquinas, operadores das máquinas (trabalhadores) e período de tempo de operação com as máquinas. Cada um destes factores apresenta-se com 4 níveis. Há um total de 64 possíveis combinações, ou seja tratamentos. Se não fosse usado o planeamento quadrado latino eram necessárias, pelo menos, 64 observações, uma por cada tratamento. No entanto, veja-se como apenas 16 observações serão necessárias para o estudo do efeito do factor *máquina*. Considere o quadro:

- cada operador (1, 2, 3 e 4) trabalha *uma vez* durante cada período de tempo (1, 2, 3 e 4) e *uma vez* com cada uma das máquinas,

operador		período de tempo			
		1	2	3	4
	1	A	B	C	D
	2	B	C	D	A
	3	C	D	A	B
	4	D	A	B	C

As letras A, B, C e D representam as diferentes máquinas.

Qualquer quadrado latino deve satisfazer *as propriedades*:

- todos os factores em estudo apresentam-se com o mesmo número de níveis;
- nenhuma das letras (níveis do 3º factor cujo efeito se pretende estudar) aparece mais do que uma vez em cada uma das linhas ou em cada uma das colunas.

Outro exemplo de quadrado latino  $4 \times 4$  é,

A	B	C	D
B	D	A	C
C	A	D	B
D	C	B	A

De todas as possibilidades, selecciona-se uma delas, ao acaso, para a experiência. Vários exemplos de quadrados latinos são apresentados no Apêndice B.

### Modelo populacional

O modelo populacional simplificado deste tipo de planeamento é,

$$y_{ij(k)} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_k + e_{ij(k)}$$

com  $i = 1, \dots, s$ ,  $j = 1, \dots, s$ ,  $s$  é o número de níveis dos factores e  $k$  é determinado de acordo com o  $i, j$  e o quadrado escolhido para a experiência que será do tipo  $s \times s$ . Só serão necessárias  $s^2$  observações. Cada observação é o resultado da combinação de um nível de cada um dos três factores, que corresponde a uma célula da tabela de duas entradas do tipo quadrado latino  $s \times s$ .

A análise dos resultados obtidos na experiência pode ser feita do seguinte modo.

A tabela dos resultados passa a ter a forma:

factor em linha	factor em coluna						média da linha
	1	2	3	4	...	s	
1	$y_{11}$	$y_{12}$	$y_{13}$	$y_{14}$	...	$y_{1s}$	$\bar{y}_{1.}$
2	$y_{21}$	$y_{22}$	$y_{23}$	$y_{24}$	...	$y_{2s}$	$\bar{y}_{2.}$
...					...		
s	$y_{s1}$	$y_{s2}$	.	.		$y_{ss}$	$\bar{y}_{s.}$
média da coluna	$\bar{y}_{.1}$	$\bar{y}_{.2}$	.	.		$\bar{y}_{.s}$	$\bar{Y}$

A variação de cada observação em relação à grande média, decompõe-se em

$$y_{ij(k)} - \bar{Y} = (\bar{y}_{i.} - \bar{Y}) + (\bar{y}_{.j} - \bar{Y}) + (\bar{y}_{(k)} - \bar{Y}) + (y_{ij(k)} - \bar{y}_{i.} - \bar{y}_{.j} - \bar{y}_{(k)} + 2\bar{Y}) .$$

em que  $\bar{y}_{(k)}$  é a média de todas as entradas da tabela que pertencem ao nível  $k$  do 3º factor (letras).

As variações totais devidas aos diversos factores são:

- A soma dos quadrados das variações do factor em linha (1º factor)

$$SQL = s \sum_{i=1}^s (\bar{y}_{i.} - \bar{Y})^2 ; \quad (7.40)$$

- a soma dos quadrados das variações do factor em coluna (2º factor)

$$SQC = s \sum_{j=1}^s (\bar{y}_{.j} - \bar{Y})^2 ; \quad (7.41)$$

- a soma dos quadrados das variações do factor representado pelas letras (3º factor)

$$SQL = s \sum_{k=1}^s (\bar{y}_{(k)} - \bar{Y})^2 , \quad (7.42)$$

- a soma dos quadrados dos resíduos

$$SQR = \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^s (y_{ij(k)} - \bar{y}_{i.} - \bar{y}_{.j} - \bar{y}_{(k)} + 2\bar{Y})^2 ; \quad (7.43)$$

- e a soma total dos quadrados

$$STQ = \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^s (y_{ij(k)} - \bar{Y})^2 . \quad (7.44)$$

Assumindo, como nos casos anteriores, um modelo normal com variância comum  $\sigma^2$ , desconhecida, as variáveis  $\frac{SQL}{\sigma^2}$ ,  $\frac{SQC}{\sigma^2}$  e  $\frac{SQL}{\sigma^2}$  são  $\chi^2(s-1)$ ,  $\frac{SQR}{\sigma^2}$  é  $\chi^2((s-2)(s-1))$  e  $\frac{STQ}{\sigma^2}$  é  $\chi^2(s^2-1)$ .

A tabela ANOVA é então,

fonte	soma dos quadrados	graus de liberdade	média dos quadrados	v.a. F.
factor em linha	$SQL$	$s-1$	$MQL = \frac{SQL}{s-1}$	$F_1 = \frac{MQL}{MQR}$
factor em coluna	$SQC$	$s-1$	$MQC = \frac{SQC}{s-1}$	$F_2 = \frac{MQC}{MQR}$
factor letras	$SQL$	$s-1$	$MQL = \frac{SQL}{s-1}$	$F_3 = \frac{MQL}{MQR}$
erro	$SQR$	$(s-2)(s-1)$	$MQR = \frac{SQR}{(s-2)(s-1)}$	
TOTAL	$STQ$	$s^2-1$		

em que  $F_1, F_2$  e  $F_3$  são variáveis distribuídas segundo F-Fisher com  $(s-1)$  e  $(s-2)(s-1)$  graus de liberdade.

### Teste de hipóteses

. Rejeitar a hipótese nula,

$$H_{03} : \gamma_{(1)} = \gamma_{(2)} = \dots = \gamma_{(s)} = 0$$

(de que não existem diferenças significativas nos efeitos do factor letras), contra a hipótese alternativa  $H_{13}$ : de que existem diferenças significativas devidas aos efeitos do 3º factor,

$$\text{se } F_3 \geq c .$$

Considere agora, outro exemplo, onde serão analisados 4 factores. Estes factores podem ser analisados simultaneamente (um em presença dos outros três) usando um quadrado greco-latino, no qual, os diferentes níveis de dois dos factores, vêm representados sobre as linhas e as colunas de um quadrado; os níveis do 3º factor representam-se com letras 'latinas' e para representar os níveis do 4º factor usam-se as letras gregas.

*Propriedades do quadrado greco-latino:*

- todos os factores em estudo apresentam-se com o mesmo número de níveis;
- cada nível de cada factor deve combinar uma só vez com cada um dos níveis dos outros factores.

Assim, um quadrado greco-latino do tipo  $3 \times 3$ , que corresponde a cada factor se apresentar com 3 níveis, tem a forma:

		Factor em coluna		
		1	2	3
factor em linha	1	$A_\alpha$	$B_\beta$	$C_\gamma$
	2	$B_\gamma$	$C_\alpha$	$A_\beta$
	3	$C_\beta$	$A_\gamma$	$B_\alpha$

Um exemplo de um quadrado greco-latino com factores de 5 níveis cada, do tipo  $5 \times 5$ , é

		Factor em coluna				
		1	2	3	4	5
factor em linha	I	$A_\alpha$	$B_\gamma$	$C_\xi$	$D_\beta$	$E_\eta$
	II	$B_\beta$	$C_\eta$	$D_\alpha$	$E_\gamma$	$A_\xi$
	III	$C_\gamma$	$D_\xi$	$E_\beta$	$A_\eta$	$B_\alpha$
	IV	$D_\eta$	$E_\alpha$	$A_\gamma$	$B_\xi$	$C_\beta$
	V	$F_\xi$	$A_\beta$	$B_\eta$	$C_\alpha$	$D_\gamma$

As somas dos quadrados das variações devidas aos factores em linha, em coluna, aos que usam letras latinas e aos que usam letras gregas são obtidas de modo idêntico ao referido nos quadrados latinos. Para um quadrado do tipo  $s \times s$  a variável  $\frac{SQR}{\sigma^2}$  ( $\sigma^2$  é a variância da distribuição) é  $\chi^2((s-3)(s-1))$  graus de liberdade.

#### 7.4.8 Inferência não-paramétrica. Dados ordinais. Graduação das observações.

Muitos dos processos de inferência já mencionados utilizam modelos populacionais com uma estrutura específica baseada na distribuição da população.

Por exemplo, os testes de inferência sobre a média da população e a análise da variância com a utilização de 'estatísticas' F-Fisher, baseiam-se na hipótese de que os resultados da experiência constituem amostras aleatórias retiradas de uma população com distribuição normal.

A **estatística não paramétrica** baseia-se num conjunto de processos de inferência, que são válidos para um grupo mais vasto e diversificado de distribuições. O termo inferência não paramétrica deriva do facto de não ser necessário desenvolver um modelo populacional em termos de uma curva densidade de probabilidade, dependente dos parâmetros, como é o caso da distribuição normal.

Assim, a distribuição de uma 'estatística' para um teste não paramétrico, segundo a hipótese nula, pode ser calculada sem ter em conta a forma da distribuição da população. Por esta razão, são chamados **testes livres de distribuição**.

Nos teste paramétricos, os resultados da experiência eram registados, considerando uma escala de medições e usando certos aspectos numéricos dos dados, tais como a média da amostra, o desvio padrão, as somas dos quadrados dos desvios, etc.

No entanto, por vezes a atribuição de valores numéricos às observações pode tornar-se um pouco arbitrária. Para estes casos, pode ser possível a atribuição de um conjunto de valores ordenados. A este tipo de dados, é costume dar o nome de **dados ordinais**.

Com este tipo de observações, cuja informação vem unicamente ordenada ou graduada, devemos utilizar processos não paramétricos na sua análise estatística.

Em testes de hipóteses, as 'estatísticas' dos testes não paramétricos utilizam outros aspectos tirados da amostra, tais como: *sinais das medições, relação de ordem e graduação das observações*. Estes aspectos não necessitam do conhecimento prévio de uma escala numérica utilizada para medir as observações. Os *testes não paramétricos* mais usados são os:

- baseados em graduações;
- baseados na distância máxima entre duas funções de distribuição.

Começaremos por dar alguns exemplos de testes não paramétricos *baseados nas graduações das observações*. Estes, calculam a 'estatística' do teste como uma função das graduações.

#### Graduação das observações

A graduação de observações segue as seguintes regras, consoante as observações registem valores repetidos ou não:

- Se as observações não registam valores repetidos,
  - i) Colocam-se as observações por ordem crescente de grandeza
  - ii) A partir da menor para a maior das observações, atribuem-se graduações, que são os números inteiros  $1, 2, 3, \dots$ , até  $n$ , sendo  $n$  o número de observações na amostra;
- Se as observações registam valores repetidos,
  - i) Quando se verificam observações,  $y_{ij}$ , repetidas, calcula-se a média das graduações que seriam atribuídas caso essas observações não fossem repetidas, e atribui-se essa graduação média a todas as observações desse conjunto de valores repetidos.
  - ii) Em conjuntos de observações não repetidas a atribuição das graduações é feita como já se referiu.

### 7.4.9 Amostras independentes. Teste de Kruskal-Wallis.

No planeamento completamente aleatório, para comparar simultaneamente os efeitos de  $k$  tratamentos, foi dividido aleatoriamente um conjunto de  $n$  unidades ( $n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$ ) em grupos de  $n_1, n_2, \dots$  e  $n_k$  unidades e a cada um deles foi atribuído um tratamento.

Considerando um modelo de uma distribuição normal para os resultados da experiência, o teste F da análise de variância, é um método eficiente para estudar as diferenças significativas entre os efeitos dos tratamentos.

No entanto, se se antecipa uma *violação da normalidade* ou se as *observações se apresentam na forma de graduações*, o teste de Kruskal - Wallis, baseado em graduações, é o mais indicado.

#### Teste de Kruskal-Wallis

A hipótese nula é

$H_0$ : Não existem diferenças significativas entre os efeitos dos tratamentos ou as médias das distribuições das  $k$  populações são idênticas

contra a hipótese nula

$H_1$ : Nem todas as  $k$  distribuições têm médias idênticas.

Os resultados obtidos da experiência, podem ser postos numa tabela do tipo,

Tratamento 1	Tratamento 2	...	Tratamento $k$
$y_{11}(R_{11})$	$y_{21}(R_{21})$		$y_{k1}(R_{k1})$
$y_{12}(R_{12})$	$y_{22}(R_{22})$		$y_{k2}(R_{k2})$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
$y_{1n_1}(R_{1n_1})$	$y_{2n_2}(R_{2n_2})$		$y_{kn_k}(R_{kn_k})$

em que as  $k$  colunas correspondem a amostras aleatórias independentes retiradas das  $k$  populações. O tamanho da amostra total é  $n = \sum_{i=1}^k n_i$ .

Para este teste, tomam-se as  $k$  amostras, considera-se a *amostra combinada* e atribuem-se as graduações às  $n$  observações. Estas graduações designam-se por  $R_{ij}$  e é costume colocar estes valores à direita das correspondentes observações, entre parênteses.

A tabela anterior pode ser complementada com duas linhas suplementares:

- a *primeira*, contém as somas das graduações das colunas,

.....	.....	...	.....
$W_1$	$W_2$	...	$W_k$
$\overline{R}_1 = \frac{W_1}{n_1}$	$\overline{R}_2 = \frac{W_2}{n_2}$	...	$\overline{R}_k = \frac{W_k}{n_k}$

$\overline{R}$



com  $W_i = \sum_{j=1}^{n_i} R_{ij}$   $i = 1, 2, \dots, k$

- a segunda, contém as médias aritméticas das graduações das colunas, e a grande média, sendo  $\bar{R} = \frac{1+2+\dots+n}{n} = \frac{n+1}{2}$ .

Segundo a hipótese nula, as médias das graduações das colunas (das amostras),  $\bar{R}_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$  devem estar muito próximas da grande média  $\bar{R}$ . As diferenças

$$\bar{R}_1 - \frac{n+1}{2}, \quad \bar{R}_2 - \frac{n+1}{2}, \dots, \quad \bar{R}_k - \frac{n+1}{2}$$

medem os desvios das médias das amostras em relação à grande média.

Uma medida de heterogeneidade entre as amostras, é dada pela 'estatística'  $H$ , de Kruskal - Wallis,

$$\begin{aligned} H &= \frac{12}{n(n+1)} \left[ n_1 \left( \bar{R}_1 - \frac{n+1}{2} \right)^2 + n_2 \left( \bar{R}_2 - \frac{n+1}{2} \right)^2 + \dots + n_k \left( \bar{R}_k - \frac{n+1}{2} \right)^2 \right] \\ &= \frac{12}{n(n+1)} \left[ \frac{W_1^2}{n_1} + \frac{W_2^2}{n_2} + \dots + \frac{W_k^2}{n_k} \right] - 3(n+1) \end{aligned}$$

qua vai ser usada no teste da hipótese nula. Assim,

rejeita-se  $H_0$  se  $H \geq c$ .

O valor de  $c$  é determinado de

$$\alpha = P_r[\text{rejeitar } H_0; H_0] = P_r[H \geq c; H_0].$$

Existem poucas tabelas da distribuição da 'estatística'  $H$ , quando  $H_0$  é verdadeira (não é das distribuições mais conhecidas), no entanto, para grandes amostras,  $n \rightarrow \infty$ , a distribuição de  $H$  tende para a distribuição do Qui-quadrado com  $k-1$  graus de liberdade.

A Tabela A.10 apresenta pontos críticos da distribuição de  $H$ , para 3 amostras, desde que  $n_1, n_2$  e  $n_3$  sejam menores ou iguais do que 5. Para  $k > 3$  ou  $n_1, n_2, \dots$  e/ou  $n_i > 5$ , a distribuição assintótica de  $H$  é a  $\chi^2$  com  $k-1$  graus de liberdade (Tabela A.7).

Quando existem mais do que 25% de observações repetidas, o valor de  $H$  deve ser ajustado. A 'estatística' ajustada é

$$H' = \frac{H}{1 - \frac{\sum_{j=1}^l q_j(q_j^2-1)}{n(n^2-1)}},$$

em que  $l$  é o número de conjuntos com observações repetidas existente e  $q_j$  é o número de elementos repetidos nesse conjunto  $j$  ( $j = 1, \dots, l$ ). A 'estatística'  $H'$  tem ainda uma distribuição assintótica  $\chi_{(k-1)}^2$ .

### 7.4.10 Amostras relacionadas. Planeamento com blocos. Teste de Quade.

Este problema aparece nas experiências em que se tenta detectar diferenças entre  $k$  tratamentos, sendo  $k \geq 2$ . As observações são agrupadas em blocos, que não são mais do que grupos de  $k$  unidades experimentais homogêneas. As  $k$  unidades, dentro de cada bloco, são afectadas aleatoriamente aos  $k$  tratamentos, tal como já foi referido no planeamento com blocos aleatórios, baseado na Análise da Variância. Como cada tratamento é testado, uma só vez, dentro de cada bloco, eles podem ser então testados sem perigo da existência de efeitos não desejados, que podem confundir os resultados da experiência.

O número de bloco é designado por  $b$  e  $b \geq 1$ .

O método 'paramétrico' para testar a hipótese nula de que não existem diferenças entre tratamentos, é conhecido por planeamento com blocos aleatórios e depende da distribuição das variáveis observadas. No entanto, o método não - paramétrico, aqui referido, só depende das graduações das observações, dentro de cada bloco, e das graduações das amplitudes dos blocos. Este teste tem o nome de **teste de Quade**.

Os dados consistem num conjunto de  $b$  variáveis aleatórias independentes a  $k$  dimensões  $(y_{i1}, y_{i2}, \dots, y_{ik})$ ,  $i = 1, \dots, b$ , chamadas blocos. A variável aleatória  $y_{ij}$  está no bloco  $i$  e está associada com o tratamento  $j$ . Os blocos são 'arranjados' do seguinte modo:

bloco	Tratamentos			
	1	2	...	k
1	$y_{11}$	$y_{12}$	...	$y_{1k}$
2	$y_{21}$	$y_{22}$	...	$y_{2k}$
3	...			
...				
b	$y_{b1}$	$y_{b2}$	...	$y_{bk}$

Dentro de cada bloco  $i$  ( $i = 1, 2, \dots, b$ ) atribuem-se graduações  $R_{ij}$  às observações  $y_{ij}$ , ( $j = 1, \dots, k$ ).

Para calcular a amplitude da amostra dentro de cada bloco, determina-se a diferença entre a maior e a menor das observações do bloco,

$$A_i = \text{amplitude do bloco } i = \max_j(y_{ij}) - \min_j(y_{ij}) .$$

para  $i = 1, 2, \dots, b$ . Em seguida, atribuem-se graduações aos blocos, de acordo com as suas amplitudes. Seja  $R(A_i)$  a graduação atribuída ao bloco  $i$  ( $i = 1, \dots, b$ ).

A 'estatística'  $S_{ij}$ ,

$$S_{ij} = R(A_i) \left[ R_{ij} - \frac{k+1}{2} \right]$$

representa a **grandeza relativa ajustada de cada observação dentro do bloco** de modo a reflectir a importância relativa do bloco, no qual, ela aparece. A quantidade dentro do parênteses é a diferença entre a graduação dessa observação, dentro do bloco  $i$ , e a média aritmética das graduações do bloco a que pertence,  $\bar{R}_i = \frac{k+1}{2}$   $i = 1, 2, \dots, b$

Seja  $S_j$  a soma dessas 'estatísticas', para cada tratamento  $j$ , ( $j = 1, \dots, k$ ),

$$S_j = \sum_{i=1}^b S_{ij} .$$

Então a **soma dos quadrados dos tratamentos** é representada pelo termo

$$SQT = \frac{1}{b} \sum_{j=1}^k S_j^2 \quad (7.45)$$

e a **soma total dos quadrados** (dos desvios)  $STQ$  é calculada através de,

$$STQ = \sum_{i=1}^b \sum_{j=1}^k S_{ij}^2 . \quad (7.46)$$

Se não existirem observações repetidas,  $STQ$  reduz-se a  $b(b+1)(2b+1)k(k+1)(k-1)/72$ .

### Teste de hipótese

Supondo que,

1. as  $b$  variáveis aleatórias, a  $k$  dimensões, são independentes, o que quer dizer que os resultados dentro de um bloco não influenciam os resultados dos outros blocos;
2. em cada bloco, as observações podem ser graduadas de acordo com um certo critério;  
e
3. a amplitude do bloco pode ser determinada por forma a ser possível atribuir graduações aos blocos;

as hipóteses são:

$H_0$  : Não existem diferenças significativas entre os tratamentos (ou, os efeitos dos tratamentos são idênticos), isto é, as graduações das variáveis aleatórias, dentro de cada bloco, são igualmente prováveis.

$H_1$  : Pelo menos um dos tratamentos tende a conseguir valores observados maiores do que um outro tratamento.

A 'estatística' para o teste é baseada nas graduações das observações e dos blocos e é definida por

$$T_1 = \frac{(b-1)SQT}{STQ - SQT} . \quad (7.47)$$

Ao nível de significância  $\alpha$ ,

a hipótese nula é rejeitada se  $T_1 > c$ ,

sendo  $c$  o ponto crítico da distribuição  $F$ , dada pela Tabela A.9, com  $(k-1)$  e  $(b-1)(k-1)$  graus de liberdade.

A distribuição  $F$  aproxima os valores da distribuição da 'estatística'  $T_1$ , para a qual não existem tabelas exactas. No entanto, quanto maior for  $b$ , mais a distribuição se aproxima da de  $F - Fisher$ .

### Comparações dois a dois

Se a hipótese nula for rejeitada, podem fazer-se comparações múltiplas entre pares de tratamentos. Os tratamentos  $i$  e  $j$  são considerados significativamente diferentes se

$$|S_i - S_j| > c \sqrt{\frac{2b(STQ - SQT)}{(b-1)(k-1)}} \quad (7.48)$$

sendo  $c$  o ponto crítico da distribuição t-Student, da tabela A.8, com  $(b-1)(k-1)$  graus de liberdade que corresponde a uma região de rejeição de tamanho  $\alpha$ , sendo  $\alpha$  o nível de significância usado para o teste do Quade.

#### 7.4.11 Amostras relacionadas. Planeamento com blocos incompletos. Teste de Durbin.

Já vimos que os planeamentos, em que nem todos os tratamentos são aplicados em cada bloco, se chamam planeamentos com blocos incompletos. Por sua vez, se o planeamento é ajustado por forma a que

- 1) cada bloco contenha  $t$  unidades experimentais,
- 2) cada tratamento apareça em  $r$  blocos, e
- 3) cada par de tratamentos seja testado um número igual de vezes.

Então o *planeamento diz-se ajustado e com blocos incompletos*. Para um planeamento deste tipo o **teste de Durbin**, baseado em graduações, pode ser usado para testar a hipótese nula de que não existem diferenças entre os tratamentos.

O teste de Durbin deve ser preferido ao teste paramétrico, baseado na Análise da Variância, se as condições de normalidade não se verificarem, se for desejável um método de análise simples, ou se as observações apresentarem a forma de graduações.

As variáveis  $k$ ,  $t$  ( $t < k$ ),  $b$ ,  $r$  ( $r < b$ ) e  $\lambda$  têm significado idêntico ao descrito em 7.4.4.

Seja  $y_{ij}$  ( $i = 1, \dots, b$ ,  $j = 1, \dots, k$ ) o resultado da aplicação do tratamento  $j$  no bloco  $i$ , (se o tratamento  $j$  aparece no bloco  $i$ ).

A atribuição de graduações é feita da seguinte maneira:

-Dentro de cada bloco  $i$  ( $i = 1, 2, \dots, b$ ), atribuem-se graduações  $R_{ij}$  aos valores  $y_{ij}$ . Existem  $t$  graduações em cada bloco.

A soma das graduações atribuídas aos  $r$  valores observados com a aplicação do tratamento  $j$  define a 'estatística'  $R_j$ ,

$$R_j = \sum_{i=1}^b R_{ij}, \quad j = 1, \dots, k \quad (7.49)$$

embora somente  $r$  valores de  $R_{ij}$  existam, em cada tratamento  $j$ .

### Teste de hipótese

As hipóteses são:

$H_0$  : Os tratamentos têm efeitos idênticos. (As graduações das variáveis aleatórias, dentro de cada bloco, são igualmente prováveis).

$H_1$  : Pelo menos um tratamento tem tendência a produzir valores observados maiores do que os de um outro tratamento.

A 'estatística' para o teste de Durbin é definida por

$$T_2 = \frac{12(k-1)}{rk(t-1)(t+1)} \sum_{j=1}^k \left( R_j - \frac{r(t+1)}{2} \right)^2 \quad (7.50)$$

Ao nível de significância  $\alpha$ ,

a  $H_0$  é rejeitada se  $T_2 > c$ ,

sendo  $c$  o ponto crítico da distribuição assintótica de  $T_2$ ,  $\chi^2$  com  $k-1$  graus de liberdade (Tabela A.7), que define uma região de rejeição de tamanho  $\alpha$ .

### Comparações múltiplas

Se a hipótese nula for rejeitada, podemos comparar pares de tratamentos. Os tratamentos  $i$  e  $j$  consideram-se significativamente diferentes se a diferença, entre as somas das graduações atribuídas às observações provenientes da aplicação dos tratamentos  $i$  e  $j$ , satisfaz

$$|R_j - R_i| > c \sqrt{\frac{r(t+1)(t-1)[bt(k-1) - kT]}{6(k-1)(bt - k - b + 1)}} \quad (7.51)$$

em que  $c$  é o ponto crítico da distribuição t - Student com  $(bt - k - b + 1)$  graus de liberdade, que corresponde a uma região de rejeição de tamanho  $\alpha$  e  $T$  é o valor da 'estatística' do teste.

Se existir um número bastante elevado de observações repetidas, usa-se o seguinte método:

Determina-se a variância das graduações atribuídas, em cada bloco,

$$s_i^2 = \frac{1}{t} \sum_{j=1}^t [R_{ij} - \frac{t+1}{2}]^2, \quad i = 1, 2, \dots, b \quad (7.52)$$

sendo  $E[R_{ij}] = \frac{t+1}{2}$ .

Nota: Se no bloco não existirem observações repetidas,  $s_i^2 = (t-1)(t+1)/12$ .

A variância da soma das graduações atribuídas aos valores observados vindos da aplicação do tratamento  $j$ ,  $R_j$ , pode ser calculada através de

$$var[R_j] = \sum_{i=1}^b var(R_{ij}) = \sum_{r \text{ blocos}} s_i^2 \quad (7.53)$$

( $j = 1, \dots, k$ ), que, juntamente com o valor esperado

$$E[R_j] = \sum_{i=1}^b E[R_{ij}] = \frac{r(t+1)}{2} \quad (7.54)$$

são usados para calcular a 'estatística'  $T_2$ , de acordo com a expressão:

$$T_2 = \frac{k-1}{k} \sum_{j=1}^k \frac{(R_j - E[R_j])^2}{var[R_j]} \quad (7.55)$$

cuja distribuição assintótica é  $\chi^2$  com  $k-1$  graus de liberdade.

## 7.5 Exercícios

1. Deverá decidir quais das duas distribuições discretas descreve o comportamento de uma variável aleatória  $X$ . Chamaremos às distribuições  $p_0(x)$  e  $p_1(x)$ . As probabilidades associadas a cada valor de  $X = x$  são, nos dois modelos, as seguintes:

$x$	0	1	2	3	4	5	6
$p_0$	0.1	0.1	0.1	0.1	0.2	0.1	0.3
$p_1$	0.2	0.1	0.1	0.2	0.2	0.1	0.1

Observe a variável  $X$  uma única vez e formule:

$H_0$  :  $p_0$  é a distribuição correcta

$H_1$  :  $p_1$  é a distribuição correcta

Um procedimento possível de decisão consiste em não rejeitar  $H_0$  se  $X = 4$  ou  $X = 6$  e rejeitar  $H_0$  nos outros casos.

- (a) Determine a probabilidade de cometer um erro do tipo I;
  - (b) Determine a probabilidade de cometer um erro do tipo II.
2. Suponha que a variável aleatória  $Y$ , vida de um pneu, em milhas, segue a distribuição normal com média  $\theta$  e desvio padrão 5000. A experiência anterior mostra que  $\theta = 30000$ . O fabricante de pneus, tem um processo novo para fazer pneus e afirma que a média da vida dos pneus novos é  $\theta > 30000$ , possivelmente  $\theta = 35000$ .

Para verificar esta afirmação, considere  $H_0 : \theta \leq 30000$  e  $H_1 : \theta > 30000$ .

Depois de observados os  $n$  elementos de uma amostra aleatória e com o teste: rejeitar  $H_0$  se  $\bar{Y} \geq c$ , determine  $n$  e  $c$  de modo a que a função potência do teste  $K(\theta)$  tome os seguintes valores,

$$K(30000) = 0.01 \quad \text{e} \quad K(35000) = 0.98.$$

3. De uma amostra casual de 100 horas, uma máquina produziu em média, 678 artigos por hora com um desvio padrão de 25.

Depois de ter sido introduzido um esquema de controle, a máquina passou a produzir em média 674 artigos com desvio padrão de 5, tirada de uma amostra aleatória de 500 horas.

O administrador da empresa afirma que o esquema de controle, reduziu a produção. O sindicato, no entanto, afirma que os 4 artigos a menos na média calculada, são devidos a flutuações estatísticas.

- (a) Calcule a função potência, quando a hipótese nula é verdadeira.

- (b) Se o nível de significância for 1%, considerar-se-á a afirmação da administração ou do sindicato?
4. Suponha que é conhecido pela experiência que o desvio padrão do peso de 8 g. de bolos fabricados por uma certa padaria é 0.18 g. Para verificar se a produção está sobre controle, isto é, para verificar se o verdadeiro peso médio dos pacotes é de 8 g., foi extraída uma amostra aleatória de 25 pacotes sendo a sua média  $\bar{X} = 8.112$  g. Uma vez que a padaria perde dinheiro quando  $\mu > 8$  e os clientes o perdem quando  $\mu < 8$ , teste a hipótese nula  $\mu = 8$  contra a hipótese alternativa  $\mu \neq 8$  usando  $\alpha = .01$ . Considere um modelo normal.
  5. Experimentou-se uma nova máquina de enchimento estéril de frascos de antibióticos, obtendo-se para os 33 frascos, o peso médio de 1 093 mg e um desvio padrão de 36 mg. Pelo processo de enchimento manual, uma amostra de 30 frascos deu o peso médio de 1 122 mg e um desvio padrão de 23 mg. Acha que existe uma diferença significativa entre as médias dos pesos obtidos pelos dois processos?
  6. Os teores de nicotina de duas marcas de cigarros estão a ser medidos. Se numa experiência 50 cigarros da marca A têm um teor médio de nicotina de  $\bar{Y}_1 = 2,61$  mg com um desvio padrão de  $s_1 = 0.12$  mg enquanto que 40 cigarros da marca B têm um teor médio de nicotina  $\bar{Y}_2 = 2.38$  mg com um desvio padrão de  $s_2 = 0.14$  mg, teste a hipótese nula  $\mu_1 - \mu_2 = 0.2$  contra a hipótese alternativa  $\mu_1 - \mu_2 \neq 0.2$ , usando  $\alpha = 0.05$ .
  7. Na comparação de dois tipos de tinta constatou-se que com 4 latas de tinta de uma marca se pintou em média uma superfície de  $512cm^2$  com um desvio padrão de  $31cm^2$ , enquanto que com a mesma quantidade de outra tinta se conseguiu pintar em média uma superfície de  $492cm^2$  com um desvio padrão de  $26cm^2$ . Teste a hipótese nula  $\mu_1 - \mu_2 = 0$  contra a hipótese alternativa  $\mu_1 - \mu_2 \neq 0$ , a um nível de significância  $\alpha = 0.05$ . Considere que as duas populações são normais e têm variâncias iguais.
  8. Pretende-se fazer um teste de tensão a uma peça de alumínio. Para o teste, foram usadas três máquinas, A, B e C. Para testar a existência de efeitos devidos às máquinas foram usadas cinco peças com cada uma das máquinas. Os resultados obtidos na experiência foram:

máquina A	máquina B	máquina C
3.2	4.9	3.0
4.1	4.5	2.9
3.5	4.5	3.7
3.0	4.0	3.5
3.1	4.2	4.2

- (a) Teste a hipótese nula de não existirem diferenças significativas nos efeitos das máquinas. Considere a variável resposta normalmente distribuída.



- (b) Determine um intervalo de confiança com 90% de probabilidade de conter a diferença entre as médias das máquinas B e C.
9. Foram testadas três marcas diferentes de lâmpadas  $A$ ,  $B$  e  $C$ , com o objectivo de determinar o tempo de duração. Os resultados da experiência foram os seguintes:

A	73	64	67	62	70
B	84	80	81	77	
C	82	79	71	75	

Baseando-se nesta amostra, acha que os resultados, indicam alguma diferença significativa entre o tempo de duração das marcas (para  $\alpha = 0.05$ )?

10. Numa análise de regularidade de fibras de lã, consideram-se três bobinas e pesaram-se cinco comprimentos de 1 metro, espaçados ao longo das bobinas. Os valores obtidos foram,

bobina 1	bobina 2	bobina 3
15.0	17.8	17.3
14.3	18.3	16.7
14.3	18.4	15.6
14.2	17.7	16.7
14.6	17.2	15.4

Face a estes valores, parece-lhe que existam diferenças significativas entre as bobinas.

11. Retiraram-se seis amostras de algodão de sete fardos, para ser analisado o índice micronaire, que se supõe segue a distribuição normal. Pretende-se saber se existem diferenças significativas entre os fardos de algodão.

Fardos	1	2	3	4	5	6	Somas
1	3,72	3,75	3,67	3,67	3,70	3,70	22,21
2	3,70	3,77	3,77	3,87	3,85	3,70	22,66
3	3,87	3,95	3,90	3,82	3,77	3,92	23,23
4	4,02	4,02	4,02	3,85	3,92	3,87	23,70
5	4,37	4,35	4,00	4,10	3,92	3,95	24,69
6	3,90	3,77	3,75	3,72	3,57	3,55	22,26
7	3,90	3,97	3,90	4,00	4,15	4,10	24,02
	27,48	27,58	27,01	27,03	26,88	26,79	162,77

12. A absorção de água de um material têxtil em 24 horas é dada, para 5 amostras, na tabela seguinte. Pretende-se saber se as amostras podem ser consideradas do mesmo material.

A	6.7	5.8	5.8	5.5
B	5.1	4.7	5.1	5.2
C	4.4	4.9	4.6	4.5
D	6.7	7.2	6.8	6.3
E	6.5	5.8	4.7	5.9

- (a) Formule a hipótese nula do problema;
- (b) Analise os dados pelo método que achar mais adequado;
- (c) Faça uma interpretação dos resultados.
13. O aumento de peso de mulheres grávidas parece ter um efeito importante no peso dos bebês. Se o aumento de peso não é adequado, a criança tem mais probabilidades de ser pequena e tenderá a ser menos saudável. Num estudo conduzido em 3 países, registaram-se os aumentos de peso (em Kg) das mulheres durante o 3º trimestre de gravidez:

País	$n_j$	$\bar{y}_j$	$s_j$
Egipto	46	3.7	2.5
Kênia	111	3.1	1.8
México	52	2.9	1.8

Considerando a variância residual

$$s_r^2 = \frac{\sum_{j=1}^k (n_j - 1) s_j^2}{\sum_{j=1}^k (n_j - 1)},$$

em vez de MQR, sendo  $k$  o número de tratamentos, como estimador não tendencioso da variância  $\sigma^2$  da distribuição,

- (a) caracterize a distribuição de  $\sum_{j=1}^k (n_j - 1) s_j^2$  (numerador de  $s_r^2$ );
- (b) (em vez de MQR) teste a hipótese nula de que em média o aumento de peso, das mulheres grávidas nos 3 países observados é o mesmo. Suponha que a variável aleatória  $Y \equiv$  aumento de peso segue a distribuição normal.
14. Para comparar as velocidades de corte de 4 máquinas, arranjaram-se peças com cinco graus diferentes de dureza. Formaram-se cinco blocos experimentais, cada um com peças do mesmo grau de dureza.

Os resultados da experiência foram (em segundos),

bloco	M1	M2	M3	M4
1	12	20	13	11
2	2	14	7	5
3	8	17	13	10
4	1	12	8	3
5	7	17	14	6

- (a) Teste a hipótese nula de que não existem diferenças significativas entre as velocidades de corte das diferentes máquinas, supondo que o tempo, segue a distribuição normal.
- (b) Teste os efeitos resultantes dos blocos.
15. Uma experiência, levada a cabo numa estação agronómica, consiste em testar os efeitos de 5 níveis diferentes de aplicação de potassa, nos campos, sobre as propriedades do algodão. A medida escolhida para testar essas propriedades foi o índice de Pressley. Tomaram-se amostras de algodão de cada um dos campos e efectuaram-se 4 determinações da resistência, por cada amostra. Os resultados apresentados na tabela, correspondem aos valores médios dessas determinações. A experiência foi efectuada em 3 blocos casuais de cinco campos cada um.

		blocos		
Campos (quantidade de potassa)		1	2	3
I	(36)	7.62	8.0	7.93
II	(54)	8.14	8.15	7.87
III	(72)	7.76	7.73	7.74
IV	(108)	7.17	7.57	7.80
V	(144)	7.46	7.68	7.21

Face a estes resultados, verifique se existem diferenças significativas na resistência do algodão, devido à aplicação de níveis diferentes de potassa.

16. O Eng<sup>o</sup> José Costa da Empresa Jotex, Lda. está preocupado com os níveis baixos de produção dos seus trabalhadores. Resolveu, então introduzir um esquema de incentivos para ver se aumentava a produção. Na realização da experiência, seleccionou aleatoriamente seis trabalhadores e propôs-lhes o esquema de incentivos. A produção obtida antes e a conseguida depois da introdução do esquema foram as seguintes:

Trabalhador	unidades produzidas	
	antes	depois
Luís Mota	80	85
Ana Lopes	75	75
Cristina Pinto	65	71
Joana Silva	82	79
José Gonçalves	70	86
Maria Cruz	56	68

- (a) Formule as hipóteses.  
 (b) Que podemos concluir desta experiência.

17. Suponha que tinha conseguido a seguinte informação, tirada de uma experiência:

blocos	tratamentos						
	A	B	C	D	E	F	G
1		627		248		563	252
2	344		233			442	226
3			251	211	160		297
4	337	537			195		300
5		520	278		199	595	
6	369			169	185	606	
7	396	602	240	273			

Analise os efeitos dos tratamentos e dos blocos, considerando estas observações normalmente distribuídas.

18. Um técnico investigador de uma empresa têxtil está interessado em saber como 4 cores diferentes de tintas podem afectar a durabilidade dos tecidos. Como os efeitos das tintas podem ser diferentes face às diferenças existentes entre os tecidos, o investigador pensou testar cada tinta com duas variedades diferentes de tecidos. Para cada combinação, usou 2 amostras. Os valores observados, da variável resposta, que se supõe normalmente distribuída, após a realização da experiência, foram os seguintes:

- a tinta amarela (ta) com tecido 1 (12.3, 12.5); a ta com tecido 2 (14.4, 15.0);
- a tinta cinzenta (tc) com tecido 1 (14.2, 14.5); a tc com tecido 2 (15.0, 15.2);
- a tinta preta (tp) com tecido 1 (15.0, 15.3); a tp com tecido 2 (15.5, 15.6);
- a tinta encarnada (te) com tecido 1 (13.1, 13.2) e te com tecido 2 (13.4, 13.8).

Que conclusões (todas) pode tirar deste estudo? Acha que o efeito da tinta pode ser diferente de acordo com os tipos de tecido?

19. Um fotógrafo pretende melhorar a claridade da revelação das fotografias. Para o teste, adiciona duas quantidades de "metol" (1.5 ou 2.5 g.) e duas quantidades de "hydroquinone" (4 ou 6 g.) a um litro de liquido de revelação. Os resultados que obteve, foram:

		"hydroquinone"			
		4g.		6g.	
"metol"	1.5g.	28,	30	33,	33
	2.5g.	42,	38	40,	42

Qual das duas substâncias afecta significativamente a claridade de revelação das fotografias, ao nível de significância 0.05.

20. Um desenhador de carburadores deseja saber se, substituindo uma mola velha por uma nova, modificando a dimensão de uma peça A de 50 mm. para 55 mm. e/ou modificando a dimensão de outra peça B de 20 mm. para 25 mm. consegue aumentar o número de Kms percorridos com 1 galão de gasolina. Da experiência, obteve os seguintes resultados,

Mola	velha (-) nova (+)	Dimensão A, 50(-) 55(+)		Dimensão B, 20(-) 25(+)		Observações
-		-		-		68, 67
+		-		-		65, 64
-		+		-		72, 70
+		+		-		70, 71
-		-		+		48, 48
+		-		+		50, 51
-		+		+		78, 77
+		+		+		80, 80

- (a) Construa a tabela ANOVA.
- (b) Usando intervalos de confiança, o que pode concluir sobre os efeitos dos factores?
21. Cinco operadores trabalham com 5 máquinas para produzir alfinetes. Os operadores afirmam que as máquinas são diferentes, relativamente à capacidade de produção. Assim, os prémios de produtividade que recebem vão depender da máquina com que trabalham e não do esforço e eficiência do operador.

Foi feita uma experiência, na qual, cada operador vai trabalhar com cada uma das máquinas, uma por cada dia da semana. Os operadores são identificados pelas letras A a E. Os resultados da experiência, apresentados na tabela, representam o 'output' diário, (número de artigos).

dia da semana	Máquina				
	1	2	3	4	5
2 feira	B 257	E 230	A 279	C 287	D 202
3 "	D 245	A 283	E 245	B 80	C 260
4 "	E 182	B 252	C 280	D 246	A 25
5 "	A 203	C 204	D 227	E 193	B 259
6 "	C 231	D 271	B 266	A 334	E 338

Analise a experiência, e diga se os efeitos operador e dia da semana mostram uma variação significativa.

22. Três grupos de pessoas pertencentes às chamadas classes baixa, média e alta foram entrevistadas e foi-lhes solicitado que indicassem numa escala a sua opinião relativa à concessão de mais direitos à mulher na sociedade.

Os resultados obtidos foram os seguintes:

Classe baixa	5	5	6	4	5	6	7	4
Classe média	8	10	6	6	5	4	3	9
Classe alta	10	12	9	9	10	10	6	12

Tire as conclusões que os dados permitem, sabendo-se que quanto maior é o valor da escala mais favorável é a atitude do entrevistado em relação ao tema. Justifique a utilização do teste estatístico.

23. A freguesia de St<sup>o</sup> António da cidade de Vila Velha tem dois bairros habitacionais. De cada bairro, seleccionaram-se aleatoriamente 20 casas e foram-lhes atribuídas classificações de 0 a 10 dependendo do estado de degradação das casas (0  $\equiv$  estado novo, ..., 10  $\equiv$  casa degradada). Os resultados da experiência foram os seguintes:

Bairro da Sé		Bairro Canoa	
0	3	7	9
4	2	4	7
4	4	7	9
6	4	0	3
0	0	3	3
8	3	6	8
7	6	1	2
4	0	4	7
1	8	1	8
5	9	2	3

Faça uma lista de todos os testes não paramétricos que poderia usar na análise destes dados, para detectar diferenças entre o estado de degradação das casas nos

dois bairros. Diga quais as vantagens e inconvenientes de cada teste. Selecciono o que acha melhor para este caso, e teste a hipótese de que não existem diferenças significativas entre o estado de degradação das casas dos dois bairros.

24. Foram seleccionados sete armazéns por uma inspecção de vendas. Foram colocadas, lado a lado na mesma prateleira e em cada armazém, cinco marcas diferentes de creme para as mãos.

No fim da semana, registou-se o número de garrafas vendidas de cada marca, em cada armazém.

armazém	marca				
	A	B	C	D	E
1	5	4	7	10	12
2	1	3	1	0	2
3	16	12	22	22	35
4	5	4	3	5	4
5	10	9	7	13	10
6	19	18	28	37	58
7	10	7	6	8	7

Face a estes dados, acha que existem diferenças significativas quanto às preferências dos consumidores em relação às marcas do creme.

25. Um fabricante de gelados pretende saber as preferências das pessoas em relação às sete variedades (de sabor) de gelados.

É pedido a cada pessoa que experimente três variedades e classifique-as de 1 a 3, (a graduação 1 será atribuída à variedade preferida, etc.).

As graduações, resultantes da experiência feita com sete pessoas, são as seguintes:

Pessoa	Variedade						
	"1"	"2"	"3"	"4"	"5"	"6"	"7"
A	2	3		1			
B		3	1		2		
C			2	1		3	
D				1	2		3
E	3				1	2	
F		3				1	2
G	3		1				2

Teste a hipótese nula, de que nenhuma das variedades de gelados é mais preferida do que as outras.





# Capítulo 8

## Testes às proporções

### 8.1 Teste às proporções de duas binomiais

Sejam  $X_1$  e  $X_2$  duas variáveis aleatórias distribuídas segundo a lei binomial com parâmetros respectivamente iguais a  $p_1, n_1$  e  $p_2, n_2$ , sendo  $p_i$  a proporção de unidades da população  $i$ , que possuem certa característica e  $n_i$  o tamanho da amostra retirada da população.

#### 8.1.1 Teste à proporção $p_1$

Para testar a hipótese nula de que  $p_1$  é igual a um valor especificado  $K$ , considere

Caso A:

$$H_0 : p_1 = K$$

contra a hipótese alternativa *bilateral*

$$H_1 : p_1 \neq K.$$

Caso B.

$$H_0 : p_1 = K$$

contra a hipótese alternativa *unilateral*

$$H_1 : p_1 > K.$$

Seja  $X_1$  o número de elementos, da amostra de tamanho  $n_1$ , que possuem a tal característica. Então a 'estatística'

$$\hat{p} = \frac{X_1}{n_1}$$

serve de estimador pontual para  $p_1$ . Para grandes amostras  $n_1$ , a 'estatística' do teste

$$Z = \frac{(\hat{p} - p_1)}{\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n_1}}},$$

tem uma distribuição assintótica  $N(0,1)$ . Assim, o teste é

Caso A:

Se  $|Z| > c$ , rejeita-se  $H_0$ .

Caso B:

Se  $Z > c'$ , rejeita-se  $H_0$ .

$c$  e  $c'$  são os pontos críticos da distribuição da 'estatística' (Tabela A.6) que definem a região de rejeição de tamanho (área)  $\alpha$ . O valor  $\alpha$  será o nível de significância do teste.

### 8.1.2 Teste à diferença de duas proporções

Para testar a hipótese nula de que as proporções  $p_1$  e  $p_2$  das duas binomiais são iguais, considere

Caso A:

$$H_0 : p_1 - p_2 = 0$$

contra a hipótese alternativa *bilateral*

$$H_1 : p_1 - p_2 \neq 0.$$

Caso B:

$$H_0 : p_1 - p_2 = 0$$

contra a hipótese alternativa *unilateral*

$$H_1 : p_1 - p_2 > 0.$$

Seja  $X_1$  o número de elementos da amostra, de tamanho  $n_1$ , retirada da 1ª população e  $X_2$  o número de elementos da amostra, de tamanho  $n_2$ , retirada da 2ª população que possuem a tal característica. Então as 'estatísticas'

$$\hat{p}_1 = \frac{X_1}{n_1} \text{ e } \hat{p}_2 = \frac{X_2}{n_2}$$

serão usadas para definir estimadores pontuais, respectivamente para  $p_1$  e  $p_2$ . Para grandes amostras  $n_1$  e  $n_2$ , a 'estatística' do teste

$$Z = \frac{(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) - (p_1 - p_2)}{\sqrt{\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{n_1} + \frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{n_2}}}$$

tem distribuição assintótica  $N(0,1)$ , sendo o teste

Caso A:

Se  $|Z| > c$ , rejeita-se  $H_0$ .

Caso B:

Se  $Z > c'$ , rejeita-se  $H_0$ .

com  $c$  e  $c'$  os pontos críticos da distribuição da 'estatística'  $Z$  (Tabela A.6) que definem a região de rejeição de tamanho (área)  $\alpha$ . O valor  $\alpha$  será o nível de significância do teste.

## 8.2 'Estatística' dos testes do Qui-Quadrado

Alguns casos de variáveis aleatórias com distribuições assintóticas Qui-quadrado:

- i) Se  $X_1$  for uma v.a. distribuída segundo a lei binomial, com parâmetros  $n$  e  $p_1$ , então a v.a.

$$Z = \frac{X_1 - np_1}{\sqrt{np_1(1-p_1)}}$$

tem distribuição assintótica  $N(0,1)$  e a distribuição limite de  $Q = Z^2$  é  $\chi^2(1)$ .

ii) Se  $X_2 = n - X_1$  e  $p_2 = 1 - p_1$ , então a 'estatística'

$$Q = Z^2 = \frac{(X_1 - np_1)^2}{np_1(1 - p_1)},$$

com distribuição  $\chi^2(1)$ , pode ser reescrita na forma:

$$Q = \frac{(X_1 - np_1)^2}{np_1} + \frac{(X_1 - np_1)^2}{n(1 - p_1)}$$

ou, substituindo  $X_1 = n - X_2$  e  $1 - p_1 = p_2$  no 2o termo da expressão,

$$Q = Z^2 = \frac{(X_1 - np_1)^2}{np_1} + \frac{(X_2 - np_2)^2}{np_2} = \sum_{i=1}^2 \frac{(X_i - np_i)^2}{np_i}.$$

iii) Generalizando o caso anterior, se  $X_1, X_2, \dots, X_{k-1}$  forem v.a. com f.d.p. conjunta multinomial e com parâmetros  $n, p_1, p_2, \dots, p_{k-1}$  e se

$$X_k = n - (X_1 + X_2 + \dots + X_{k-1})$$

e

$$p_k = 1 - (p_1 + p_2 + \dots + p_{k-1}),$$

então a variável aleatória  $Q_{k-1}$ , definida por

$$Q_{k-1} = \sum_{i=1}^k \frac{(X_i - np_i)^2}{np_i} \quad (8.1)$$

tem uma distribuição que se aproxima da  $\chi^2_{(k-1)}$ , quando  $n \rightarrow \infty$ .

Esta variável aleatória  $Q_{k-1}$  vai servir de base para certos testes de hipóteses estatísticas.

Uma das aplicações da 'estatística'  $Q_{k-1}$  consiste em verificar se duas distribuições multinomiais são idênticas.

Assim, considere duas distribuições multinomiais independentes com parâmetros  $n_{.1}, p_{11}, p_{21}, \dots, p_{k1}$  e  $n_{.2}, p_{12}, p_{22}, \dots, p_{k2}$ .

Se  $X_{i1}$  e  $X_{i2}$  para  $i = 1, \dots, k$  forem respectivamente as frequências observadas das duas distribuições de tal forma que

$$n_{.1} = \sum_{i=1}^k X_{i1} \quad \text{e} \quad n_{.2} = \sum_{i=1}^k X_{i2}$$

TOTAL					
$X_{11}$	$X_{21}$	$X_{31}$	$\dots$	$X_{k1}$	$n_{.1}$
$X_{12}$	$X_{22}$	$X_{32}$	$\dots$	$X_{k2}$	$n_{.2}$

e se  $n_{.1}$  e  $n_{.2}$  forem suficientemente grandes, a variável aleatória

$$Q = \sum_{j=1}^2 \left( \sum_{i=1}^k \frac{(X_{ij} - n_{.j}p_{ij})^2}{n_{.j}p_{ij}} \right) \quad (8.2)$$

é formada pela soma de duas ( $j = 1, 2$ ) v.a. independentes, cada uma delas distribuída segundo o Qui-quadrado com  $k - 1$  graus de liberdade. Assim,  $Q$  tem distribuição  $\chi^2$  com  $2k - 2$  graus de liberdade.

Neste problema, a hipótese nula é do tipo,

$$H_0 : p_{11} = p_{12}, p_{21} = p_{22}, \dots, p_{k1} = p_{k2}$$

[as duas distribuições multinomiais têm proporções iguais]

mas nenhum dos  $p_{i1}$  ou  $p_{i2}$  está especificado. Teremos de calcular estimadores pontuais para estes parâmetros. A técnica da máxima verossimilhança dá

$$\hat{p}_{i1} = \hat{p}_{i2} = \frac{X_{i1} + X_{i2}}{n_{.1} + n_{.2}}, \quad i = 1, \dots, k \quad (8.3)$$

e as frequências esperadas podem ser estimadas, através de

$$f_{ij} = n_{.j} \hat{p}_{ij} \quad i = 1, \dots, k \text{ e } j = 1, 2.$$

Como o número de parâmetros estimados é  $k - 1$ , pois  $\sum_{i=1}^k p_{i1} = \sum_{i=1}^k p_{i2} = 1$ , o **número de graus de liberdade da 'estatística'  $Q$**  em (8.2), que vai ser usada neste teste, é de  $2k - 2 - (\text{n}^\circ \text{de parâmetros estimados}) = 2k - 2 - (k - 1) = k - 1$ .

Assim, o teste é:

rejeita-se a hipótese nula se  $Q > c$

em que  $c$  é determinado de

$$\alpha = P_r[Q_{k-1} \geq c; H_0].$$

Nas aplicações dos testes do 'bom' ajuste, e para os parâmetros que necessitam de ser estimados, deve usar-se o método da máxima verossimilhança ou a técnica dos mínimos quadrados.

### 8.3 Tabelas de Contingências de duas Entradas

Quando os elementos de uma amostra são observados em relação a **duas (ou mais) características**, os resultados são classificados de acordo com os diferentes níveis de cada uma das características. As frequências observadas, da classificação simultânea de duas (ou mais) características, formam uma *tabela de contingência de duas (ou mais) entradas*.

### 8.3.1 Teste de independência

A partir deste tipo de tabelas, podemos verificar se as *diferentes características parecem manifestamente independentes ou se alguns níveis de uma das características tendem a estar associados com níveis de outra característica.*

Considere o seguinte exemplo de uma tabela de duas entradas:

**Exemplo 8.3.1** *Feito um inquérito a 500 pessoas (dos EUA) sobre filiação política e parecer relativamente a um programa de racionamento de energia, registaram-se as seguintes frequências observadas,*

	<i>em favor do programa</i>	<i>indiferente</i>	<i>contra</i>	<i>TOTAL</i>
<i>Democratas</i>	138	83	64	285
<i>Republicanos</i>	64	67	84	215
<i>TOTAL</i>	202	150	148	500

*Pretende-se saber se o parecer relativamente ao programa é independente da filiação política.*

As características que vão ser estudadas são  $A$  e  $B$ ; os níveis de  $A$  são  $A_1, A_2, \dots, A_a$  e os de  $B$  são  $B_1, B_2, \dots, B_b$ . Cada célula da tabela corresponde à intersecção de um nível de  $A$  com um de  $B$ . Para uma amostra de tamanho  $n$ , a tabela das frequências observadas tem a forma,

	$B_1$	$B_2$	...	$B_b$	Total da linha
$A_1$	$X_{11}$	$X_{12}$	...	$X_{1b}$	$n_{1.}$
$A_2$	$X_{21}$	$X_{22}$	...	$X_{2b}$	$n_{2.}$
...					
...	...				
...					
$A_a$	$X_{a1}$	$X_{a2}$	...	$X_{ab}$	$n_{a.}$
Total da coluna	$n_{.1}$	$n_{.2}$	...	$n_{.b}$	$n$

em que  $X_{ij}$  é a frequência de  $A_i$  e  $B_j$  (número de elementos da amostra que têm o nível  $i$  da característica  $A$  e o nível  $j$  de  $B$ ),  $n_{i.}$  é a frequência de  $A_i$  ( $i = 1, \dots, a$ ) e  $n_{.j}$  a de  $B_j$  ( $j = 1, \dots, b$ ).

As probabilidades das células, são representadas por

$p_{ij} = P_r[A_i B_j]$  = probabilidade conjunta da ocorrência simultânea de  $A_i$  e  $B_j$

$p_{i.} = P_r[A_i]$  = probabilidade marginal da ocorrência de  $A_i$  e

$p_{.j} = P_r[B_j]$  = probabilidade marginal da ocorrência de  $B_j$ .

#### Teste de hipótese:

De acordo com a hipótese nula de independência entre  $A$  e  $B$ ,

$H_0 : p_{ij} = p_{i.}p_{.j}$  para todas as células  $i = 1, \dots, a$  e  $j = 1, \dots, b$

usa-se o teste do Qui-quadrado, baseado na 'estatística'

$$Q = \sum_{j=1}^b \sum_{i=1}^a \frac{(X_{ij} - f_{ij})^2}{f_{ij}} \quad (8.4)$$

e que consiste em

rejeitar  $H_0$ , se  $Q > c$

em que  $f_{ij}$  são as frequências esperadas.

O modelo especifica as probabilidades em termos das probabilidades marginais, que são parâmetros desconhecidos.

Como  $p_{i.} = P_r[A_i]$ , um estimador para  $p_{i.}$  é a frequência relativa de  $A_{i.}$ . Assim,

$$\hat{p}_{i.} = \frac{n_{i.}}{n} \quad (i = 1, \dots, a).$$

Do mesmo modo, um estimador para  $p_{.j}$  é

$$\hat{p}_{.j} = \frac{n_{.j}}{n}, \quad (j = 1, \dots, b).$$

Segundo a hipótese nula, as probabilidades conjuntas são estimadas por

$$\hat{p}_{ij} = \hat{p}_{i.}\hat{p}_{.j} = \frac{n_{i.}n_{.j}}{n^2}, \quad (i = 1, \dots, a \text{ e } j = 1, \dots, b).$$

As frequências esperadas  $f_{ij}$  são então estimadas a partir de

$$f_{ij} = n\hat{p}_{ij} = \frac{n_{i.}n_{.j}}{n} \quad \text{para } i = 1, \dots, a \text{ e } j = 1, \dots, b$$

O número de parâmetros estimados foi de  $(a-1) + (b-1)$  pois  $\sum_{i=1}^a p_{i.} = 1$  e  $\sum_{j=1}^b p_{.j} = 1$ .

Daqui se tira que, o número de graus de liberdade da "estatística"  $Q$ , representada em (8.4), para o teste do Qui-quadrado, é de

$$\begin{aligned} (\text{número de células}) - 1 - (\text{número de parâmetros estimados}) = \\ ab - 1 - ((a-1) + (b-1)) = (a-1)(b-1). \end{aligned}$$

e

rejeita-se  $H_0$  se  $Q_{(a-1)(b-1)} \geq c$

com  $c$  determinado de

$$\alpha = P_r[Q_{(a-1)(b-1)} \geq c; H_0]$$

### 8.3.2 Teste de homogeneidade

O teste de independência foi baseado no esquema, segundo o qual, uma amostra aleatória de  $n$  unidades, foi classificada de acordo com duas características  $A$  e  $B$ . As frequências marginais,  $n_{i.}$  ( $i = 1, \dots, a$ ) e  $n_{.j}$ , ( $j = 1, \dots, b$ ) eram também variáveis aleatórias, por serem somas de variáveis aleatórias.

Se a população aparecer como um conjunto de  $a$  subpopulações, correspondendo aos  $a$  níveis da característica  $A$ , e se, de cada uma das subpopulações, é retirada uma amostra aleatória de tamanho pré especificado,  $n_{i.}$ , sendo esta classificada em relação aos níveis da outra característica,  $B$ , as frequências marginais deixam de ser variáveis, para passarem a representar tamanhos das amostras retiradas de cada uma das subpopulações. Isto é, das subpopulações  $A_1, A_2, \dots, A_a$ , são retiradas amostras aleatórias de tamanhos, respectivamente iguais, a  $n_1, n_2, \dots, n_a$ , classificando depois cada amostra de acordo com os níveis  $B_1, B_2, \dots, B_b$  da característica  $B$ .

O estudo baseia-se nas proporções de cada nível de  $B$ , de modo a verificar-se se elas são aproximadamente as mesmas, para as diferentes subpopulações, isto é, pretende-se testar a homogeneidade das subpopulações, comparando as probabilidades associadas aos níveis de  $B$ .

	$B_1$	$B_2$	...	$B_b$	TAMANHO DA AMOSTRA
Subpopulações					
$A_1$	$X_{11}$	$X_{12}$	...	$X_{1b}$	$n_{1.}$
$A_2$	$X_{21}$	$X_{22}$	...	$X_{2b}$	$n_{2.}$
...	...				
$A_a$	$X_{a1}$	$X_{a2}$	...	$X_{ab}$	$n_{a.}$
TOTAL	$n_{.1}$	$n_{.2}$	...	$n_{.b}$	$n$

#### Teste de hipótese:

As probabilidades dos vários níveis de  $B$ , para cada subpopulação, são designadas por

$$w_{ij} = P_r[B_j/A_i] \quad (8.5)$$

$$= \text{probabilidade de pertencer ao nível } j \text{ de } B, B_j, \quad (8.6)$$

$$\text{dado que é um elemento da subpopulação de } A_i \quad (8.7)$$

A hipótese nula de que a probabilidade associada a cada nível de  $B$  é a mesma qualquer que seja a subpopulação donde se retirou a amostra, é

$$H_0 : w_{1j} = w_{2j} = \dots = w_{aj} \quad \text{para } j = 1, \dots, b,$$

e que vai ser testada em favor de

$H_1$  : de que a probabilidade de cada nível de B varia de subpopulação para subpopulação (dependendo da subpopulação donde se retira a amostra).

Segundo a hipótese nula, a probabilidade de pertencer ao nível  $B_j$  pode ser estimada tendo em atenção o facto de que, dos  $n$  elementos,  $n_{.j}$  pertencem ao nível  $B_j$ . Assim,

$$\hat{w}_{1j} = \hat{w}_{2j} = \dots = \hat{w}_{aj} = \frac{n_{.j}}{n} \quad (8.8)$$

e a frequência esperada da célula  $(i, j)$  é estimada por

$$\hat{f}_{ij} = n_{i.} \hat{w}_{ij} = \frac{n_{i.} n_{.j}}{n} \quad i = 1, \dots, a \text{ e } j = 1, \dots, b.$$

A 'estatística'

$$Q = \sum_{j=1}^b \sum_{i=1}^a \frac{(X_{ij} - f_{ij})^2}{f_{ij}} \quad (8.9)$$

deve ser usada para o teste da hipótese nula, tendo em conta que,  $Q$  é distribuída segundo o Qui-quadrado com

$$\begin{aligned} \text{graus de liberdade} &= \text{n}^\circ \text{de sub-populações} - (\text{n}^\circ \text{de parâmetros estimados}) \\ &= \text{número de células} - 1 \\ &= a(b-1) - (b-1) \\ &= (a-1)(b-1) \end{aligned}$$

Cada subpopulação tem  $b$  células e cada uma contribui com  $b-1$  graus de liberdade. Como há  $a$  subpopulações, o número total de graus de liberdade seria  $a(b-1)$ . Faltaria agora subtrair o número de parâmetros estimados. Este número é igual a  $b-1$ , pois as probabilidades são iguais,  $w_{1j} = w_{2j} = \dots = w_{aj}$ , para cada  $j$ , ( $j = 1, \dots, b$ ), bastando para isso calcular uma só e  $\sum_{j=1}^b w_{1j} = 1$ .



## 8.4 Exercícios

1. Até agora, a percentagem de empregados de uma firma que usavam transporte público, para se deslocarem para o emprego e do emprego para casa, era de 20%.

Foi feita uma campanha para a utilização dos transportes públicos. Pretende-se saber se a campanha foi eficaz. Para isso, considerou-se uma amostra aleatória de 25 empregados e o número de empregados que passou a utilizar os transportes públicos é dado por  $X$ .

- (a) Formule a hipótese nula, em termos de  $p$ , proporção da população de empregados da firma que utiliza os transportes públicos.
  - (b) Qual seria a região de rejeição, se  $\alpha$ , nível de significância do teste, deve ser controlado para um valor menor que 0.1?
2. Quando o resultado de um processo de produção é estável a um nível aceitável, diz-se que está controlado.

Suponha que o processo tem estado controlado desde algum tempo e que a proporção de produtos defeituosos é de 0.05.

Para automatizar o processo, o chefe de produção decide considerar o processo não controlado se mais do que 2 produtos defeituosos forem encontrados, numa amostra aleatória de 15 produtos.

- (a) Determine  $\alpha$ , a probabilidade de aparecer não controlado, quando  $p = 0.05$ .
  - (b) Determine o gráfico da curva potência, para este esquema de controle, quando  $p = 0.05, 0.1, 0.3$  e  $0.4$ .
3. Numa fábrica, o chefe de produção afirma que, 40% das máquinas de escrever vendidas naquela região, são produtos da sua fábrica.

Considerando  $p = 0.4$  como a hipótese nula, o chefe decide considerar a sua afirmação como aceitável, a não ser que dentre 19 máquinas se verificar que  $X \leq 3$  ou  $X \geq 12$ , sendo  $X$  o número de máquinas de escrever vendidas pela sua fábrica.

- (a) Determine o nível de significância deste teste.
  - (b) Determine a potência do teste para vários valores de  $p$ , desde 0.1 a 0.9.
4. Dentre as 60 lâminas testadas, somente 7 lâminas do rotor de uma turbina a gás, falharam.

Até agora e em testes idênticos, costumavam falhar 20% das lâminas.

Serão agora as lâminas testadas significativamente melhores que as usadas anteriormente?

5. Pretende-se testar dois métodos diferentes de ensino.

Usaram-se dois grupos diferentes de estudantes. Cada grupo tem 100 alunos e dentro de cada grupo o nível de ensino é o mesmo. No final do semestre é atribuída uma classificação que vai de A a E. Os resultados obtidos foram,

Classificação	A	B	C	D	E	
Grupo 1 (com método 1)	15	25	32	17	11	100
Grupo 2 (com método 2)	9	18	29	28	16	100

Se considerarmos estes valores como sendo observações tiradas de duas distribuições multinomiais independentes, teste a hipótese de que as duas distribuições são iguais, isto é, que os dois métodos de ensino são igualmente eficazes.

6. Foi feito um inquérito às populações rural e urbana do concelho de Vila Boa, para determinar as preferências relativas aos programas de televisão do canal 3. A amostra conseguida apresenta os seguintes resultados:

	Tipos de programas preferidos			
Zona	Comédia	Musical	Desportivo	Policia
Urbana	100	60	100	80
Rural	70	40	50	70

Teste a hipótese de que não existem diferenças nas preferências de programas entre os residentes das zonas urbana e rural.

7. Foi escolhido ao acaso, um cavalo para correr em 80 corridas. Em cada corrida o cavalo foi classificado de acordo com a posição no início da corrida e a posição em que ficou no final da corrida. A tabela das frequências observadas é a seguinte

Posição no início da corrida	Posição no final da corrida			
	1	2	3	outras
1 - 4	8	6	8	16
5 - 9	3	6	5	28

Verifique se os dados são consistentes com a afirmação de que a posição do cavalo no final da corrida não depende da posição dada no início da corrida.

8. Vai ser proposta uma nova Regulamentação para os dormitórios de um Colégio de estudantes. Pedida a opinião, sobre a proposta, a um grupo de 350 estudantes,

registaram-se as seguintes frequências,

Estudantes	a favor	contra	indiferente
Sexo masculino	93	21	72
Sexo feminino	55	30	79

Verifique se estes dados são consistentes com a afirmação de que a opinião sobre a proposta é a mesma, quer o estudante seja do sexo masculino ou feminino.

9. Foi feita uma pesquisa de mercado a várias empresas de negócios de diversos tamanhos. Para cada grupo de empresas, foram enviados 200 questionários. As empresas foram classificadas de acordo com o volume de negócios como: pequena empresa, média empresa, grande empresa. Os resultados foram resumidos no quadro:

	Tamanho da empresa		
	pequena	média	grande
responderam ao questionário	125	82	40
não responderam ao questionário	75	118	160

Interessa-nos saber se as proporções das respostas ao questionário recebidas variam com o tamanho da empresa de negócios.



# Capítulo 9

## Testes de ajuste de distribuições

### 9.1 Teste do Qui-Quadrado para grandes amostras

Considere os dois exemplos seguintes:

**Exemplo 9.1.1** *Uma máquina de lavar roupa pode ser vendida em 5 cores diferentes. Pretende-se estudar a popularidade das diferentes cores. Assim, de uma amostra aleatória de 300 máquinas já vendidas, registou-se o número de máquinas vendidas, de cada uma das cores,*

<i>cor</i>	<i>de pera</i>	<i>castanha</i>	<i>encarnada</i>	<i>azul</i>	<i>branca</i>	<i>TOTAL</i>
<i>frequência</i>	88	65	52	40	55	300

*Considere, para este caso, a hipótese nula de que todas as cores são igualmente populares.*

**Exemplo 9.1.2** *Pretende-se estudar a distribuição da frequência dos pedidos feitos às companhias de seguros, para o pagamento de tratamentos em hospitais. O estudo foi baseado em famílias com dois filhos, cujos pais não tenham mais do que 50 anos de idade.*

*De uma amostra aleatória de 200 dessas famílias, registou-se o número desses pedidos, num período de 4 anos.*

<i>nº de pedidos</i>	<i>0</i>	<i>1</i>	<i>2</i>	<i>3</i>	<i>4</i>	<i>5</i>	<i>6</i>	<i>7</i>	<i>TOTAL</i>
<i>frequência</i>	22	53	58	39	20	5	2	1	200

*Face a estes valores, acha que a distribuição de Poisson se ajusta à frequência desses pedidos?*

Em ambos os exemplos, a análise consiste em verificar se o modelo dado pela hipótese nula se ajusta aos valores observados. A este tipo de análise estatística é costume dar o nome de **teste do 'bom' ajuste**.

Em testes deste tipo, a hipótese nula especifica a estrutura para as probabilidades desconhecidas das classes. Podem considerar-se dois casos: no primeiro (em 9.1.1) as probabilidades vêm completamente especificadas na  $H_0$  e no segundo (em 9.1.2) a distribuição não vem completamente caracterizada na  $H_0$ .

### 9.1.1 Distribuição completamente especificada na hipótese nula

Quando as probabilidades são completamente especificadas pela hipótese nula  $H_0$ , temos

$$H_0 : p_1 = p_{10}, \quad p_2 = p_{20}, \dots, \quad p_k = p_{k0}$$

com  $p_{10}, p_{20}, \dots$  e  $p_{k0}$  valores numéricos dados, que satisfazem  $p_{10} + p_{20} + \dots + p_{k0} = 1$ .

Como exemplo deste caso, tem-se o exemplo 9.1.1, no qual, segundo a hipótese nula,  $p_{10} = p_{20} = p_{30} = p_{40} = p_{50} = \frac{1}{5}$ .

As frequências esperadas (teóricas) podem ser calculadas directamente, multiplicando as probabilidades  $p_{i0}$  por  $n$ .

O teste do 'bom' ajuste permite verificar se existem diferenças significativas entre as frequências observadas  $X_i$  e as frequências esperadas  $np_{i0}$  ( $i = 1, \dots, k$ ), de acordo com a hipótese nula. A quantidade mais adequada para medir essas diferenças é a 'estatística'

$$Q_{k-1} = \sum_{i=1}^k \frac{(X_i - np_{i0})^2}{np_{i0}} \quad (9.1)$$

que tem distribuição assintótica  $\chi^2_{(k-1)}$ . Se a 'estatística' tiver um valor numérico apreciável, isto indica a existência de diferenças significativas entre os valores observados e o modelo descrito pela hipótese nula e o extremo do lado direito da distribuição do  $\chi^2$  representa a região de rejeição.

O teste consiste em

$$\text{rejeita-se } H_0 \text{ se } Q > c$$

em que  $c$  é determinado de tal modo que

$$\alpha = Pr[Q_{k-1} > c; H_0]$$

é o nível de significância escolhido para o teste.

### 9.1.2 Distribuição não totalmente especificada. Estimação de parâmetros

No segundo tipo de problemas, as probabilidades não estão completamente especificadas pela hipótese nula e o problema do exemplo 9.1.2 é um destes casos. Aqui, é necessário conhecer o parâmetro  $\lambda$  da distribuição de Poisson, média da distribuição, para se calcular a probabilidade de cada classe. Usando as probabilidades, as frequências esperadas podem então ser calculadas através de  $np_{i0}$ .

Quando os parâmetros da distribuição não forem conhecidos, há necessidade de estimá-los com o auxílio das frequências observadas da experiência. As probabilidades são também estimadas.

No exemplo 9.1.2 para verificar se o modelo de Poisson é adequado, o parâmetro  $\lambda$  da lei de Poisson tem de ser estimado. Usa-se a média aritmética da amostra como estimador da média da população,  $\lambda$ . Assim,

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^k X_i c_i}{n}$$

em que os  $X_i$ 's são as frequências observadas, os  $c_i$ 's os valores que caracterizam as classes,  $n = \sum_{i=1}^k X_i$  e

$$\hat{p}_{i0} = Pr[Y = c_i] = \frac{e^{-\bar{X}} \bar{X}^{c_i}}{c_i!}.$$

Calcula-se então, o valor de  $Q_{k-1}$  em (9.1), mas agora o número de graus de liberdade da 'estatística' sofre uma redução, subtraindo-se a  $k - 1$ , o número de parâmetros estimados,  $p$ .

A hipótese nula a formular será:

$H_0$  : as probabilidades das classes provêm  
de uma distribuição da família da ...

e o teste consiste em

rejeitar  $H_0$  se  $Q > c$

em que  $c$  é determinado de tal modo que

$$\alpha = Pr[Q_{k-1-p} > c; H_0],$$

é o nível de significância escolhido para o teste.

As frequências esperadas devem ser verificadas antes do cálculo do valor numérico de  $Q$ . Se uma ou mais do que uma dessas frequências forem muito pequenas, em relação às outras, e se forem de classes dos extremos da tabela, é possível agrupar classes adjacentes de modo a conseguirem-se valores das frequências esperadas maiores ou iguais a 5. A 'estatística' é então calculada a partir da tabela já modificada, com um número reduzido de classes e, conseqüentemente, o número de graus de liberdade também diminui.

## 9.2 Testes do tipo Kolmogorov para pequenas amostras

Se desejarmos saber se duas ou mais amostras foram retiradas da mesma distribuição (embora desconhecida), parece natural *comparar as funções (de distribuição) empíricas daquelas amostras* para verificarmos se as diferenças observadas são significativas. Torna-se então necessário ter uma medida que calcule as diferenças entre essas funções. Kolmogorov e Smirnov desenvolveram processos estatísticos que usam a "máxima distância (medida na) vertical" entre essas funções como medida de ajuste (semelhança) entre elas.

Uma alternativa ao teste do Qui-quadrado de bom ajuste é o teste introduzido por Kolmogorov e desenvolvido para dados do tipo nominal.

### 9.2.1 Distribuição empírica. 'Estatística' de máxima distância vertical

Um teste de bom ajuste envolve o estudo de uma amostra aleatória retirada de uma distribuição desconhecida com função distribuição acumulada,  $F(x)$ , com o objectivo de testar a hipótese nula de que a  $F(x)$  é de facto uma determinada distribuição. Isto é, a hipótese nula especifica a função (esperada)  $F^*(x)$ , como, por exemplo, a que está representada na figura 9.1.

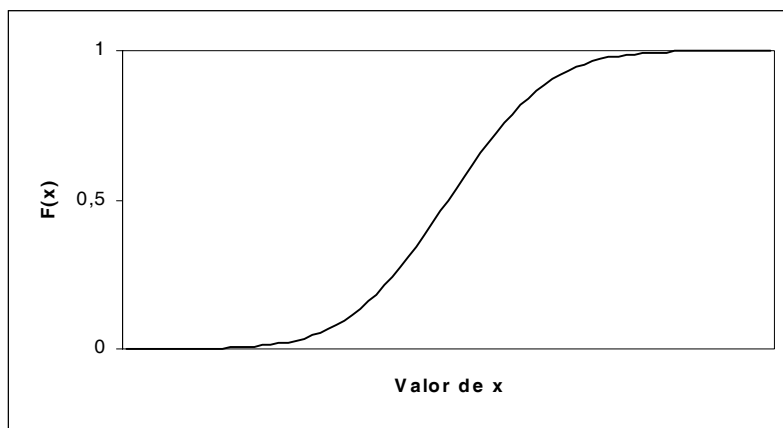


Figura 9.1: A função  $F^*(x)$  da hipótese nula

Se da população caracterizada pela função  $F(x)$  (desconhecida) retirarmos uma amostra aleatória de tamanho  $n$ ,  $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$  e construirmos a função empírica  $S(x)$  a ela associada, podemos compará-la com a função formulada na hipótese nula,  $F^*(x)$ , para se verificar a existência (ou não) de uma concordância razoável entre elas. Se não existir essa concordância, rejeita-se a hipótese nula. A medida usada é a maior distância medida na vertical entre as duas funções de distribuição,  $S(x)$  e  $F^*(x)$  **que define a 'estatística' T do teste**. Por exemplo, na figura 9.2 onde estão representados os gráficos das duas funções, essa distância ocorre no valor de  $x = 8$ .

**A função empírica  $S(x)$  é definida, para cada valor de  $x$ , como sendo a fracção dos elementos da amostra (dos  $X_i$ 's) que são menores ou iguais a esse  $x$ .** Esta função, baseada na amostra, pode ser usada para estimar a verdadeira função distribuição da população  $F(x)$ .

Valores elevados da 'estatística' T, com distribuição tabelada na Tabela A.11, levam à rejeição da distribuição  $F^*(x)$  como uma aproximação razoável à função distribuição  $F(x)$  desconhecida. As 'estatísticas' que são função da "máxima distância vertical" entre  $S(x)$  e  $F^*(x)$  são consideradas do tipo Kolmogorov. As que são função da "máxima distância vertical" entre duas funções empíricas consideram-se do tipo Smirnov.



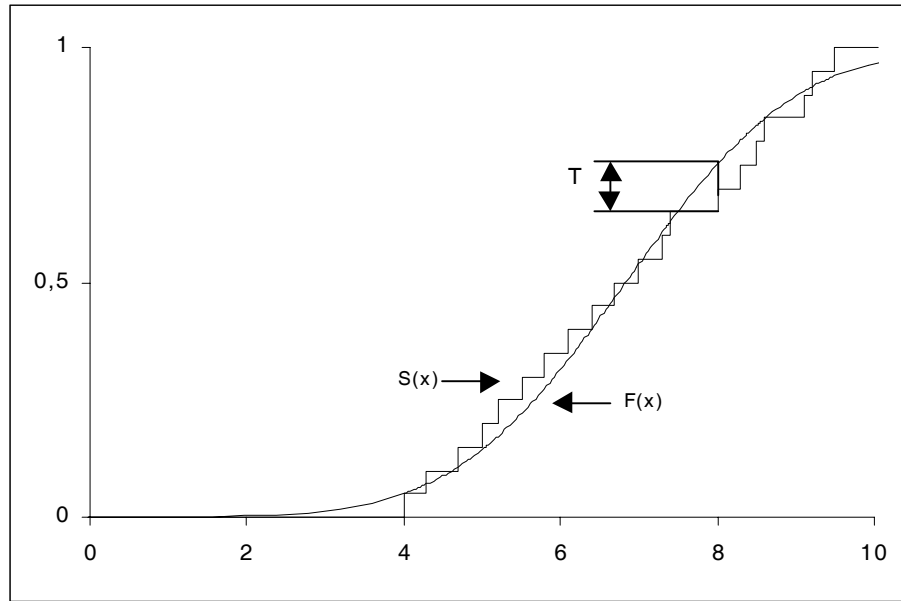


Figura 9.2: As duas distribuições  $S(x)$  e  $F^*(x)$  e a 'estatística'  $T$

### 9.2.2 Distribuição completamente especificada na hipótese nula. Teste de Kolmogorov

Os dados consistem num conjunto de  $n$  elementos, que formam uma amostra aleatória  $X_1, X_2, \dots, X_n$  associada a alguma função distribuição,  $F(x)$ .

Seja  $F^*(x)$  uma função distribuição completamente especificada. É possível formular as seguintes hipóteses:

**A. Teste bilateral**

$$H_0 : F(x) = F^*(x) \text{ para todo o } x \in \mathfrak{R}$$

$$H_1 : F(x) \neq F^*(x) \text{ pelo menos para um valor de } x$$

**B. Teste unilateral**

$$H_0 : F(x) \geq F^*(x) \text{ para todo o } x \in \mathfrak{R}$$

$$H_1 : F(x) < F^*(x) \text{ pelo menos para um valor de } x$$

**C. Teste unilateral**

$$H_0 : F(x) \leq F^*(x) \text{ para todo o } x \in \mathfrak{R}$$

$$H_1 : F(x) > F^*(x) \text{ pelo menos para um valor de } x$$

Considerando  $S(x)$  a função empírica baseada na amostra  $X_1, X_2, \dots, X_n$ , o teste para o caso **A.**, considera a 'estatística',  $T$ , como sendo a maior distância entre  $S(x)$  e  $F^*(x)$ , medida na vertical, isto é,

$$T = \sup_x | F^*(x) - S(x) |. \quad (9.2)$$

Para o caso **B.** a 'estatística' para o teste é  $T^+$  e representa a maior distância vertical

conseguida, quando  $F^*(x)$  está acima de (tem valores superiores a)  $S(x)$ , ou seja,

$$T^+ = \sup_x [ F^*(x) - S(x) ]. \quad (9.3)$$

Finalmente, para testar a hipótese nula do teste unilateral **C.**, usa-se a 'estatística'  $T^-$ , definida como a maior das distâncias verticais entre  $S(x)$  e  $F^*(x)$ , mas só considerando aquelas em que  $S(x)$  está acima de  $F^*(x)$ ,

$$T^- = \sup_x [ S(x) - F^*(x) ]. \quad (9.4)$$

O teste relativo a **A.** (**B.** ou **C.**) consiste em

$$\text{rejeitar } H_0 \text{ se } T \text{ (} T^+ \text{ ou } T^- \text{)} > c,$$

sendo, ao nível de significância  $\alpha$ ,  $c$  calculado de

$$\begin{aligned} \alpha &= \text{Prob}(\text{Rej } H_0; H_0) = \text{Prob}(T > c; H_0 \text{ de } \mathbf{A.}) \\ &(T^+ > c; H_0 \text{ de } \mathbf{B.} \text{ ou } T^- > c; H_0 \text{ de } \mathbf{C.}) \end{aligned}$$

Os pontos críticos da distribuição de  $T$  ( $T^+$  ou  $T^-$ ) estão representados na Tabela A.11 e correspondem a  $p = 1 - \alpha$  se o teste for unilateral (casos **B.** ou **C.**) e  $p = 1 - \frac{\alpha}{2}$  se o teste for bilateral (caso **A.**).

O teste é conservador se  $F^*(x)$  for discreta. O teste de Kolmogorov deve ser usado, em vez do teste do Qui-quadrado, quando a amostra for pequena, pois é exacto mesmo para pequenas amostras, enquanto que, os testes do Qui-quadrado supõem um número razoável de observações, por forma a que a distribuição  $\chi^2$  seja uma boa aproximação à distribuição da 'estatística'  $Q$ .

### 9.2.3 Famílias de distribuições. Estimação de parâmetros

O teste de Kolmogorov deve ser usado quando a função distribuição da hipótese nula está completamente especificada, isto é, quando não há parâmetros que necessitam de ser estimados a partir da amostra. Caso contrário, torna-se conservador.

Mais flexível do que este é o teste de ajuste do Qui-quadrado. Neste último, tivemos oportunidade de estimar alguns parâmetros da distribuição, desconhecidos, a partir dos dados (amostra). Como consequência, ao número de graus de liberdade da 'estatística' do teste, subtraía-se uma unidade por cada parâmetro estimado. O teste do Qui-quadrado também exige um 'agrupamento' dos dados, que, por vezes, é arbitrário.

O teste do Kolmogorov foi modificado de modo a permitir situações em que os parâmetros são estimados a partir dos dados. A 'estatística' do teste é do mesmo tipo (Kolmogorov) e o que varia são os pontos críticos da tabela da distribuição da 'estatística'. Estas tabelas, agora, variam de distribuição para distribuição.

### Teste de Lilliefors para a Normal

Uma das modificações do teste do Kolmogorov serve para testar hipóteses compostas referentes à Normal. Isto é, a hipótese nula refere que a distribuição da população é uma das distribuições da família da normal sem especificar a *média* e/ou a *variância* dessa normal. Este teste foi apresentado por Lilliefors.

Os dados consistem numa amostra aleatória  $X_1, X_2, \dots, X_n$  de tamanho  $n$  associada com alguma função distribuição desconhecida  $F(x)$ .

As hipóteses são:

$H_0$ : A amostra aleatória foi retirada de uma distribuição normal, com média e/ou variância não especificadas.

$H_1$ : A função distribuição dos  $X_i$ 's não é a normal.

O teste mais comum é do tipo bilateral e a 'estatística' é definida como a "máxima distância vertical" entre a função distribuição empírica dos  $X_i$ 's e a função distribuição acumulada da normal com média  $\bar{X}$  e variância  $s^2$ . Estes estimadores (da média e variância da população) são calculados a partir dos dados, isto é,

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \quad (\text{para estimar } \mu)$$

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2} \quad (\text{para estimar } \sigma).$$

Calculam-se, em seguida, os valores estandardizados  $Z_i$ 's da amostra, definidos por

$$Z_i = \frac{X_i - \bar{X}}{s}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

A função empírica  $S(z)$  é calculada, em relação aos  $Z_i$ 's, e a função distribuição (acumulada) da hipótese nula  $F^*(z)$  reduz-se agora à Normal com média zero e desvio padrão 1. Para a representação gráfica desta última função, usa-se a tabela da  $N(0, 1)$  (Tabela A.6). A "máxima distância vertical" entre as duas distribuições  $S(z)$  e  $F^*(z)$  ( $= N(0, 1)$ ) é o valor da 'estatística'  $T_1$ . Assim,

$$T_1 = \sup_z |F^*(z) - S(z)|. \quad (9.5)$$

Ao nível de significância  $\alpha$ ,

a hipótese nula é rejeitada se  $T_1 > c$ ,

sendo  $c$  o ponto crítico da distribuição de  $T_1$ , da Tabela A.12, que corresponde a  $p = 1 - \alpha$ , com

$$\alpha = \text{Prob}(T_1 > c; H_0)$$

### Teste de Lilliefors para a exponencial

Os dados formam uma amostra aleatória  $X_1, X_2, \dots, X_n$  de tamanho  $n$  associada com alguma função distribuição desconhecida,  $F(x)$ .

Pretende-se testar a hipótese de que essa função  $F(x)$  é uma distribuição da família da exponencial,  $F^*(x)$ . Para isso, considerem-se as hipóteses,

$H_0$ : A amostra aleatória segue a distribuição exponencial:

$$F(x) = F^*(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x/\beta}, & \text{para } x > 0 \\ 0 & \text{para } x < 0 \end{cases}$$

em que  $\beta$  é um parâmetro desconhecido.

$H_1$ : A distribuição dos  $X_i$ 's não é exponencial.

Determinada a média da amostra,

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n},$$

os valores standardizados

$$Z_i = \frac{X_i}{\bar{X}}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

são usados para calcular a 'estatística' do teste. A média  $\bar{X}$  é um estimador do parâmetro desconhecido da distribuição,  $\beta$ .

A função distribuição  $F^*(z)$ , baseada nos valores standardizados  $Z_i$ 's é

$$\begin{cases} 1 - e^{-z}, & \text{para } z > 0 \\ 0 & \text{para } z < 0 \end{cases}.$$

A função empírica,  $S(z)$ , é agora calculada com base nos  $Z_i$ 's. Estas duas funções podem ser representadas graficamente e comparadas (existem tabelas de  $e^{-z}$  para ajudar nos cálculos).

A "máxima distância vertical" entre as duas funções define a 'estatística' do teste:

$$T_2 = \sup_z |F^*(z) - S(z)|. \quad (9.6)$$

Ao nível de significância  $\alpha$ ,

a hipótese nula é rejeitada se  $T_2 > c$

sendo  $c$  o ponto crítico da distribuição de  $T_2$ , da Tabela A.13, que corresponde a  $p = 1 - \alpha$ .

## 9.3 Testes às distribuições

Os testes aqui referidos servem para situações em que são retiradas amostras de várias populações (possivelmente diferentes) e têm como objectivo comparar as funções de distribuição associadas às populações, para se verificar a existência de diferenças significativas

entre elas. Para este problema, e especialmente para o caso de duas distribuições, das quais se retiraram amostras suficientemente grandes, o teste paramétrico baseado na distribuição  $t$  é adequado. *Este é apenas sensível às diferenças entre as médias (ou medianas) das populações, não conseguindo detectar diferenças de outro tipo, nomeadamente entre as variâncias.*

O teste bilateral de Smirnov é consistente em relação a todos os tipos de diferenças que possam surgir entre as duas funções de distribuição. É uma versão do teste de Kolmogorov, válido para duas amostras, sendo também conhecido por **teste de Kolmogorov - Smirnov para duas amostras**. O teste de Kolmogorov, do parágrafo 9.2.2. é também conhecido por **teste de Kolmogorov - Smirnov para uma amostra**.

### 9.3.1 Teste a duas distribuições. Amostras independentes. Teste de Smirnov

Os dados consistem em duas amostras aleatórias independentes, uma de tamanho  $n$ ,  $X_1, X_2, \dots, X_n$  e outra de tamanho  $m$ ,  $Y_1, Y_2, \dots, Y_m$  retiradas de duas populações com distribuições  $F(x)$  e  $G(y)$  (ou  $G(x)$ ) respectivamente. Estas funções são desconhecidas. Pretende-se saber se as duas funções são idênticas.

O teste de Smirnov é exacto se as distribuições forem contínuas. Se elas forem discretas, o teste é ainda válido embora se torne conservador.

Podemos formular as seguintes hipóteses:

#### A. Teste bilateral

$H_0 : F(x) = G(x)$  para todo o  $x \in \mathfrak{R}$

$H_1 : F(x) \neq G(x)$  pelo menos para um valor de  $x$

#### B. Teste unilateral

$H_0 : F(x) \leq G(x)$  para todo o  $x \in \mathfrak{R}$

[Os valores de  $X$  tendem a ser menores do que os de  $Y$ ]

$H_1 : F(x) > G(x)$  pelo menos para um valor de  $x$

#### C. Teste unilateral

$H_0 : F(x) \geq G(x)$  para todo o  $x \in \mathfrak{R}$

[A hipótese diz que os valores de  $X$  estão deslocados para a direita (maiores) em relação aos de  $Y$ ]

$H_1 : F(x) < G(x)$  pelo menos para um valor de  $x$

A 'estatística' é definida de uma maneira diferente consoante o conjunto de hipóteses consideradas.

Se  $S_1(x)$  for a função empírica baseada na amostra  $X_1, X_2, \dots, X_n$  e  $S_2(x)$  a função baseada em  $Y_1, Y_2, \dots, Y_m$ , a 'estatística' para o teste de hipóteses, no caso **A.**, é

$$T_1 = \sup_x |S_1(x) - S_2(x)| \quad (9.7)$$

definida como a "máxima distância vertical" entre as duas funções empíricas.

Para o caso **B.**, a 'estatística' é

$$T_1^+ = \sup_x [S_1(x) - S_2(x)] \quad (9.8)$$

e dá a "máxima distância vertical" entre as duas funções, para todos os valores de  $X$  em que  $S_1(x)$  está acima de  $S_2(x)$ .

Finalmente, para testar a hipótese nula do teste unilateral  $C_+$ , usa-se

$$T_1^- = \sup_x [S_2(x) - S_1(x)] \quad (9.9)$$

que é uma 'estatística' cujo valor representa a maior das distâncias verticais entre  $S_1(x)$  e  $S_2(x)$ , quando  $S_2(x)$  está acima de  $S_1(x)$ .

Em qualquer dos casos,

$$\text{a hipótese nula é rejeitada se } T_1 (T_1^+ \text{ ou } T_1^-) > c$$

sendo  $c$  o ponto crítico da Tabela A.14 (se  $n = m$ ) ou da Tabela A.15 (se  $n \neq m$ ), que corresponde a um nível de significância  $\alpha$ . Note-se que as tabelas apresentam valores diferentes consoante o teste é bilateral ou unilateral.

### 9.3.2 Teste a $k$ distribuições. Amostras independentes. Teste unilateral de Smirnov

Um teste do tipo de Smirnov para o caso de 3 distribuições é o teste *Birnbaum - Hall*, análogo ao teste de Smirnov. Se as diferenças entre as médias são acompanhadas por diferenças entre as variâncias, e outras, os testes *do tipo Smirnov são mais potentes do que os de Kruskal - Wallis e da normal*.

O único inconveniente do teste de Birnbaum-Hall reside no facto de só ser aplicado a três distribuições, uma vez que os pontos críticos da distribuição da 'estatística' do teste foram calculados e tabelados apenas para este caso. Por esta razão, existem outros testes, ainda do tipo Smirnov, cujas distribuições foram construídas (tabeladas) para mais (até 10) distribuições.

Estes testes não são consistentes com todas as hipóteses alternativas possíveis, como se verá.

O teste unilateral de Smirnov é apropriado para hipóteses alternativas que consideram *as diferenças e as direcções em que surgem*. São pois alternativas unilaterais.

Os dados consistem em  $k$  amostras aleatórias de tamanhos iguais a  $n$ . As distribuições empíricas são, respectivamente,  $S_1(x), S_2(x), \dots, S_k(x)$ , e as funções de distribuição  $F_1(x), F_2(x), \dots, F_k(x)$  representam as  $k$  populações, desconhecidas. As amostras aleatórias devem ser independentes umas das outras. As variáveis devem ser contínuas, para que o teste seja exacto. Caso contrário, torna-se conservador. A escala de medições é, pelo menos, ordinal.

As hipóteses são as seguintes:

$$H_0 : F_1(x) \leq F_2(x) \leq \dots \leq F_k(x) \text{ para todo o } x$$

$$H_1 : F_i(x) > F_j(x) \text{ para algum } i < j \text{ e algum } x$$

(A amostra  $i$  tende a ter valores mais elevados do que os da amostra  $j$ , para algum  $i < j$ ).

A hipótese nula pode ser interpretada como:

- todas as amostras foram retiradas de populações idênticas, uma vez que este teste unilateral é apropriado para os casos em que as diferenças entre populações ocorrem somente na direcção indicada por  $H_1$ .

A 'estatística' deste teste,  $T_2$ , é definida como sendo a *maior das distâncias, medidas na vertical, calculadas quando  $S_i(x)$  está acima (tem valores mais elevados) de  $S_{i+1}(x)$* . As amostras adjacentes comparadas correspondem aos  $i$ 's que vão de 1 a  $k - 1$ . Isto é,

$$T_2 = \sup_{x, i < k} [ S_i(x) - S_{i+1}(x) ] \quad (9.10)$$

e a hipótese nula é rejeitada se  $T_2 > c$ , sendo  $c$  o ponto crítico, que corresponde a  $p = 1 - \alpha$ , obtido da Tabela A.16, ao nível de significância  $\alpha$ . As entradas da tabela são:  $k$ , número de distribuições e  $n$ , o tamanho da amostra (igual para todas as populações). A leitura na coluna de  $p = 1 - \alpha$  deve ser dividida por  $n$  para dar o ponto crítico  $c$ .

## 9.4 Testes às variâncias

### 9.4.1 Teste à variância $\sigma^2$

Seja  $X$  uma variável aleatória com distribuição normal com média  $\mu$  e variância  $\sigma^2$ , desconhecida. Se da população se retirar uma amostra de tamanho  $n$ ,  $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ , a 'estatística' variância da amostra,

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$$

serve de estimador pontual para  $\sigma^2$ .

Para testar a hipótese nula de que a variância da distribuição é igual a um valor especificado  $K$ , considere

$$H_0 : \sigma^2 = K$$

contra a seguinte hipótese alternativa *unilateral*

$$H_1 : \sigma^2 > K.$$

A 'estatística' do teste é

$$Q = \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2}$$

que segue a distribuição  $\chi^2$  com  $n - 1$  graus de liberdade. O TESTE consiste em:

rejeitar a hipótese nula se  $Q > c$

com  $c$  o ponto crítico da distribuição da 'estatística'  $Q$  (Tabela A.7) que define a região de rejeição de tamanho (área)  $\alpha$ . O valor  $\alpha$  será o nível de significância do teste. Também é possível fazer um teste estatístico em que a hipótese alternativa seja bilateral ( $H_1 : \sigma^2 \neq K$ ). O teste estatístico seria então bilateral:

rejeitar a hipótese nula se  $Q < c_1$  ou  $Q > c_2$ .

### 9.4.2 Teste à razão de duas variâncias

Para testar a hipótese nula de que as variâncias  $\sigma_1^2$  e  $\sigma_2^2$  de duas distribuições normais são iguais ( $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$ ), considere:

$$H_0 : \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1$$

contra a seguinte hipótese alternativa *unilateral*

$$H_1 : \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} > 1.$$

Seja  $X_1, X_2, \dots, X_{n_1}$  uma amostra de tamanho  $n_1$ , retirada da 1ª população;  $Y_1, Y_2, \dots, Y_{n_2}$  uma amostra de tamanho  $n_2$ , retirada da 2ª população. As 'estatísticas'  $s_1^2$  e  $s_2^2$  são usadas como estimadores pontuais, respectivamente, dos parâmetros  $\sigma_1^2$  e  $\sigma_2^2$ . A partir delas é possível definir as seguintes variáveis estocasticamente independentes, com distribuição  $\chi^2$  com  $n_1 - 1$  e  $n_2 - 1$  graus de liberdade, respectivamente:

$$Q_1 = \frac{(n_1 - 1)s_1^2}{\sigma_1^2},$$

$$Q_2 = \frac{(n_2 - 1)s_2^2}{\sigma_2^2}.$$

Nestas condições, podemos definir a 'estatística'

$$F = \frac{\frac{(n_1-1)s_1^2}{\sigma_1^2}/(n_1-1)}{\frac{(n_2-1)s_2^2}{\sigma_2^2}/(n_2-1)} = \frac{s_1^2}{s_2^2},$$

que, de acordo com a hipótese nula, segue a distribuição F-Fisher com  $(n_1 - 1, n_2 - 1)$  graus de liberdade. O teste unilateral consiste em:

rejeitar a hipótese nula se  $F > c$

sendo  $c$  o ponto crítico da distribuição da 'estatística'  $F$  - F-Fisher com  $(n_1 - 1, n_2 - 1)$  graus de liberdade (Tabela A.9) - que define a região de rejeição de tamanho (área)  $\alpha$ . O valor  $\alpha$  será o nível de significância do teste. Neste teste às variâncias também podia ser formulada uma hipótese alternativa bilateral ( $H_1 : \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \neq 1$ ). O correspondente teste teria de ser também bilateral.



## 9.5 Exercícios

1. Foi registado o número de nascimento num hospital, durante os quatro períodos do ano, Jan-Março, Abril-Junho, Julho-Set e Out-Dezembro. Diz-se que durante o período de Jan-Março nascem duas vezes mais crianças do que nos outros períodos. Verifique se os dados obtidos na experiência, contradizem a afirmação.

Períodos	Jan-Mar	Abril-Jun	Jul-Set	Out-Dez
Nºde nascimentos	110	57	53	80

2. Caixas de mercadoria de um certo tipo foram expostas ao risco de acidentes sob a acção de tempestades, gelo, fogo, queda, etc, por um período de 400 dias.

O número de acidentes com cada caixa é uma variável aleatória  $X$  que se afirma seguir a distribuição de Poisson. Verifique se os dados da experiência efectuada, registados na tabela, fundamentam a afirmação

Nºde acidentes, $X$	0	1	2	3	4	5	6
Nºde recipientes com $X$ acidentes	1 448	805	206	34	4	2	1

3. Fez-se um estudo relativo aos defeitos apresentados por peça de um tecido e obtiveram-se os seguintes valores:

### Distribuição dos Defeitos por peça de tecido

Defeitos	Frequência
0	8
1	10
2	15
3	12
4	10
5	9
6	4
7	1
8	0
9	1
10	0

Faça uma análise estatística destes resultados.

4. Examinando os registos de uma agência de venda de automóveis (camiões), verificou-se que, em 70 dias houve vendas diárias de um só camião, em 60 dias venderam-se 2

camhões, em 40 dias venderam-se diariamente 3 camiões e em 30 dias, 4 camiões.

Camiões vendidos por dia	Número de dias
1	70
2	60
3	40
4	30

Considerando, primeiro  $\alpha = 0.01$  e depois  $\alpha = 0.05$ , teste a hipótese de que a procura de camiões é uniformemente distribuída.

5. No estudo da velocidade dos fios, efectuou-se a contagem do número de fibras soltas por  $mm$ , de comprimento.

Ajuste uma curva exponencial à distribuição dos comprimentos das fibras soltas de um fio de lã, usado na experiência. A tabela, dos valores observados, é a seguinte

comprimento valor médio da classe	frequências observadas
2.5	55
7.5	19
12.5	6
17.5	20

6. Foram testadas 20 válvulas electrónicas relativamente à sua duração de vida, em horas. Foram registados os seguintes valores da duração de vida

7.2 37.8 49.6 21.4 67.2 41.1 3.8 8.1 23.2 72.1  
11.4 17.5 29.8 57.8 84.6 12.8 2.9 42.7 7.4 33.4

Verifique se estes dados são consistentes com a hipótese de que a variável aleatória  $X$ , duração de vida em horas, segue a distribuição exponencial.

7. De uma amostra aleatória de tamanho 10, obtiveram-se os seguintes resultados,  $x_1 = 0.621, x_2 = 0.503, x_3 = 0.203, x_4 = 0.477, x_5 = 0.710, x_6 = 0.581, x_7 = 0.329, x_8 = 0.480, x_9 = 0.554$  e  $x_{10} = 0.382$ .

Acha que estes dados se ajustam à distribuição uniforme representada por:

$$F^*(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ x & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{se } x \geq 1. \end{cases}$$

8. Um professor de Estatística queria testar a hipótese de que a hora de chegada dos seus alunos à aula teórica das 14H00 às 16H00 de 5ªfeira, segue uma distribuição

Normal com variância = 4 min. Num dos dias, registou as horas de chegada dos alunos que assistiram àquela aula:

13H53	13H56	13H57	13H57	13H59	13H59
14H00	14H01	14H02	14H02	14H02	14H03
14H04	14H05	14H05	14H07	14H07	14H11

O que poderá ele concluir em relação à distribuição das horas de chegada dos seus alunos?

9. Após longos anos de experiência, verificou-se que o número de plaquetas no sangue de pessoas saudáveis do sexo masculino segue uma distribuição normal com média 235 000 por  $mm^3$  e desvio padrão igual a 44 600 por  $mm^3$ . Os números de plaquetas registados a partir de doentes com cancro nos pulmões foram os seguintes (em unidades de 1 000 por  $mm^3$ ).

173	189	196	207	215	237	275	282	293	300
305	316	346	382	395	399	401	437	480	504
524	634	682	882	999					

Usando  $\alpha = 0.01$ , decida se estas observações podem ser consideradas como provenientes da população definida pelo número de plaquetas no sangue de pessoas saudáveis do sexo masculino.

10. Os resultados de um investimento feito em 20 tipos distintos de 'stocks', seleccionados aleatoriamente de um armazém, passados 12 meses, foram os seguintes:

9.1	5.0	7.3	7.4	5.5	8.6	7.0	4.3	4.7	8.0
4.0	8.5	6.4	6.1	5.8	9.5	5.2	6.7	8.3	9.2

Teste a hipótese nula de que o resultado do investimento segue uma distribuição normal.

11. As chamadas de longa distância, que passam por uma central telefónica, formam um processo aleatório, em que o intervalo de tempo entre as chamadas parece seguir uma distribuição exponencial.

As primeiras dez chamadas de uma 2<sup>a</sup> feira, depois das 13H00, ocorreram às 13H06, 13H08, 13H16, 13H22, 13H23, 13H34, 13H44, 13H47, 13H51 e 13H57.

Face a estes valores, teste a hipótese nula formulada em termos da distribuição exponencial.

12. Um gerente de armazém quer testar a hipótese de que os seus clientes chegam aleatoriamente ao armazém. Para isso, registou os tempos entre sucessivas chegadas, durante uma manhã.

Estes tempos, em minutos, foram os seguintes:

3.6	22.1	38.0	3.3	10.1
14.2	1.4	6.1	12.7	4.6
10.8	6.2	4.2	3.8	8.2

Teste a hipótese de que os tempos entre chegadas seguem uma distribuição exponencial.

13. Fez-se uma experiência num laboratório, para o controlo da temperatura em salas, que envolveu 6 homens e 6 senhoras. Pediu-se-lhes que indicassem a temperatura ( $^{\circ}F$ ), na sala, que os fizesse sentir mais confortáveis. Os resultados obtidos foram os seguintes:

Homens	Senhoras
74	75
74	77
75	78
80	79
81	77
78	75
$\bar{X}_1 = 77$ $s_1 = 3.1$	$\bar{X}_2 = 76.8$ $s_2 = 1.6$

Acha que as temperaturas consideradas mais confortáveis pelos homens são as mesmas do que as das senhoras? Justifique.

Use  $\alpha = 0.05$ .

14. Foram feitas medições da viscosidade de uma certa substância, em dois dias diferentes. Os resultados obtidos foram:

1º dia	37.0	31.4	34.4	33.4	34.9	36.2	31.0
	33.5	33.7	33.4	34.8	30.8		
2º dia	28.4	31.3	28.7	32.1	31.9	32.8	30.2
	30.2	32.4	30.7				

Poder-se-á dizer que a população (descrita pela variável  $X \equiv$  viscosidade da substância) mudou de um dia para o outro? Justifique a utilização do teste estatístico.

15. Verifique se os dados apresentados dão indicação da existência de diferenças nos comprimentos das palavras em latim. As observações representam o número de letras das palavras em latim, seleccionadas aleatoriamente dos três géneros: masculino, feminino e neutro:

masculino	feminino	neutro
5	7	4 6 7 8
7	5	8 3 10 7
6	9	5 6 7 12

16. Para verificar se um período maior, entre o último dia de aulas e o dia do exame final, afecta significativamente o desempenho dos alunos no exame, fez-se uma experiência com os 48 alunos de uma turma. Estes, foram divididos, aleatoriamente, em quatro grupos de 12 estudantes cada. Para o 1º grupo, deixou-se passar dois dias de intervalo. O 2º grupo fez exame 4 dias após o fim das aulas. Ao 3º grupo foi dado um intervalo de 6 dias e ao grupo 4, 8 dias. As classificações obtidas no exame foram as seguintes (de 0 a 100):

1º grupo			2º grupo			3º grupo			4º grupo		
48	71	80	48	71	81	38	73	83	58	79	93
61	74	82	42	70	77	58	74	87	49	77	84
67	75	87	67	75	92	71	79	94	73	80	94
68	79	89	62	73	89	70	75	90	74	84	97

Que conclusões pode retirar desta experiência?

17. Suponha que a espessura de uma componente usada num semiconductor é a sua dimensão crítica e que as medidas da espessura, de uma amostra aleatória de 18 destas componentes, têm variância  $s^2 = 0.68$  cm. Considera-se que o processo está controlado se a variância da espessura não é superior a 0.36. Assumindo que as medições constituem uma amostra aleatória duma população normal, teste a hipótese nula  $\sigma^2 = 0.36$  contra a hipótese alternativa  $\sigma^2 > 0.36$  a um nível de significância  $\alpha = 0.05$ .
18. Ao comparar a variabilidade da tensão em dois tipos de aço, uma experiência conduziu aos seguintes resultados:  $n_1 = 13$ ,  $s_1^2 = 19.2$ ,  $n_2 = 16$  e  $s_2^2 = 3.5$  numa determinada unidade. Assumindo que as medidas constituem amostras aleatórias independentes provenientes de duas populações normais, teste a hipótese nula  $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$  contra a hipótese alternativa  $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$  a um nível de significância  $\alpha = 0.05$ .



# Capítulo 10

## Testes de regressão

Seja  $Y$  uma variável aleatória, resultado de uma experiência, cuja distribuição depende não só de certos parâmetros desconhecidos, como também de uma variável não aleatória  $X$ .

Sejam  $X_1, X_2, \dots, X_n$  os valores escolhidos arbitrariamente para  $X$  e  $Y_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) os correspondentes valores observados da experiência.

Uma vez conhecidos os pares  $(X_i, Y_i)$ , estes podem ser usados para obter informações acerca dos parâmetros da distribuição da v.a.  $Y$  que são desconhecidos.

### 10.1 Regressão linear e simples

Suponha que as v.a.  $Y_i$  são normalmente distribuídas, com médias respectivamente iguais a  $\alpha + \beta(X_i - \bar{X}) = \alpha + \beta x_i$  e variância comum  $\sigma^2$  ( $i = 1, \dots, n$ ).

Os parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$  da média e  $\sigma^2$  de variância são desconhecidos.

A f.d.p. conjunta das variáveis  $Y_1, \dots, Y_n$  é

$$L(\alpha, \beta, \sigma^2; Y_1, \dots, Y_n) = \left(\frac{1}{2\pi\sigma^2}\right)^{\frac{n}{2}} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (Y_i - \alpha - \beta x_i)^2\right].$$

Os estimadores de máxima verosimilhança, para os parâmetros  $\alpha, \beta$  e  $\sigma^2$  são

$$\tilde{\alpha} = \frac{\sum_{i=1}^n Y_i}{n} = \bar{Y} \quad (10.1)$$

$$\tilde{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2} = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})Y_i}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2} \quad (10.2)$$

$$\tilde{\sigma}^2 = \frac{1}{(n-2)} \sum_{i=1}^n [Y_i - \tilde{\alpha} - \tilde{\beta}(X_i - \bar{X})]^2 \quad (10.3)$$

Veremos, já a seguir, quais as distribuições estatísticas destes estimadores.

Tanto  $\tilde{\alpha}$  como  $\tilde{\beta}$  são funções lineares nas v.a.  $Y_1, Y_2, \dots$  e  $Y_n$ , e por isso seguem também distribuições normais.

A média da distribuição de  $\tilde{\alpha}$  é  $\alpha$ , sendo portanto um estimador não tendencioso. A sua variância é igual a  $\frac{\sigma^2}{n}$ .

A média de  $\tilde{\beta}$  é o próprio  $\beta$  e a variância é igual a

$$\frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}.$$

Como

$$Y_i - \alpha - \beta(X_i - \bar{X}) = (\tilde{\alpha} - \alpha) + (\tilde{\beta} - \beta)(X_i - \bar{X}) + Y_i - \tilde{\alpha} - \tilde{\beta}(X_i - \bar{X}),$$

também

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n [Y_i - \alpha - \beta(X_i - \bar{X})]^2 \\ &= \sum_{i=1}^n (\tilde{\alpha} - \alpha)^2 + \sum_{i=1}^n (\tilde{\beta} - \beta)^2 (X_i - \bar{X})^2 + \sum_{i=1}^n [Y_i - \tilde{\alpha} - \tilde{\beta}(X_i - \bar{X})]^2 \end{aligned}$$

ou seja

$$\sum_{i=1}^n [Y_i - \alpha - \beta(X_i - \bar{X})]^2 = n(\tilde{\alpha} - \alpha)^2 + (\tilde{\beta} - \beta)^2 \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 + (n-2)\tilde{\sigma}^2$$

e

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3,$$

com  $Q, Q_1, Q_2$  e  $Q_3$  formas quadráticas nas variáveis  $Y_i$ .

Sabe-se que  $\frac{Q}{\sigma^2}$  é  $\chi_{(n)}^2$ ,  $\frac{Q_1}{\sigma^2}$  e  $\frac{Q_2}{\sigma^2}$  são  $\chi_{(1)}^2$  e como  $Q_3 \geq 0$ , pela aplicação do teorema das formas quadráticas, temos

$$\frac{Q_3}{\sigma^2} = \frac{(n-2)\tilde{\sigma}^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-2).$$

Definindo as seguintes v.a., 'estatísticas',

$$T_1 = \frac{\frac{\tilde{\alpha} - \alpha}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}}{\sqrt{\frac{(n-2)\tilde{\sigma}^2}{\sigma^2(n-2)}}} = \frac{\tilde{\alpha} - \alpha}{\sqrt{\frac{\tilde{\sigma}^2}{n}}} \quad (10.4)$$

cuja distribuição é t-Student com  $n-2$  graus de liberdade e

$$T_2 = \frac{\frac{\tilde{\beta} - \beta}{\frac{\sigma}{\sqrt{\sum_1^n (X_i - \bar{X})^2}}}}{\sqrt{\frac{(n-2)\tilde{\sigma}^2}{\sigma^2(n-2)}}} = \frac{\tilde{\beta} - \beta}{\sqrt{\frac{\tilde{\sigma}^2}{\sum_1^n (X_i - \bar{X})^2}}} \quad (10.5)$$



cuja distribuição é também t-Student com  $n - 2$  graus de liberdade, é possível basear os testes nestas 'estatísticas'.

### Testes de hipóteses:

Para se verificar se o valor esperado da variável resposta,  $Y$ , varia linearmente com a variável controlável  $X$ , a hipótese nula é

$$H_0 : \beta = 0 \text{ (} Y \text{ não varia linearmente com } X \text{)}$$

contra a hipótese alternativa unilateral

$$H_1 : \beta > 0$$

ou contra a hipótese alternativa bilateral

$$H_1 : \beta \neq 0.$$

A 'estatística' para este teste é  $T_2 = \frac{\tilde{\beta}}{\sqrt{\frac{\tilde{\sigma}^2}{\sum_1^n (X_i - \bar{X})^2}}}$

de acordo com a hipótese nula.

Se a alternativa  $H_1 : \beta > 0$  (unilateral) for escolhida, o teste consiste em:

rejeitar  $H_0$  se  $T_2 \geq c$

com  $c$  determinado de,

$$\alpha = P_r[T_2 \geq c; H_0].$$

A 'estatística'  $T_2$  pode também ser usada para determinar intervalos de confiança para o parâmetro  $\beta$ .

Do mesmo modo, a 'estatística'  $T_1$  pode ser usada para calcular intervalos de confiança e testes de hipóteses relacionados com o parâmetro  $\alpha$  e a 'estatística'  $\frac{(n-2)\tilde{\sigma}^2}{\sigma^2}$  para calcular intervalos de confiança e testes de hipóteses para o parâmetro  $\sigma^2$ .

**Nota 10.1.1** *Se a hipótese  $H_0$ , em relação ao parâmetro  $\beta$ , não for rejeitada, não se pode concluir que a v.a.  $Y$  não depende de  $X$ , mas sim, que não existe uma relação linear entre elas.*

Embora seja possível fazer **interpolação**, isto é, calcular o valor de  $Y$  que corresponde a um dado valor de  $X = X_0$ , se este pertencer ao intervalo definido pelos valores  $X_1, X_2, \dots, X_n$  usados na experiência, a **extrapolação** deve ser implementada com cuidado, pelas seguintes razões:

1. Embora existindo uma relação linear entre  $X$  e  $Y$  (esta pode ser adequada na região definida pelo conjunto de valores usados na experiência) o modelo pode deixar de ser válido fora da região definida por esse conjunto, como se mostra na figura 10.1.
2. Quanto mais afastado  $X_0$  estiver de  $\bar{X}$ , maior será o erro da estimativa. De facto, para se calcular o valor de  $Y$  quando  $X = X_0$ , basta substituir  $X$  por  $X_0$  na equação estimada para a recta,

$$Y = \tilde{\alpha} + \tilde{\beta}(X - \bar{X}).$$

O valor esperado de  $Y_0$  é

$$E[Y_0] = E[\tilde{\alpha}] + (X_0 - \bar{X})E[\tilde{\beta}] = \alpha + \beta(X_0 - \bar{X}) \quad (10.6)$$

e a variância dessa estimativa é,

$$\begin{aligned}
 \text{var}[Y_0] &= \text{var}[\tilde{\alpha}] + (X_0 - \bar{X})^2 \text{var}[\tilde{\beta}] = \\
 &= \frac{\sigma^2}{n} + (X_0 - \bar{X})^2 \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2} \\
 &= \sigma^2 \left( \frac{1}{n} + \frac{(X_0 - \bar{X})^2}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2} \right). \tag{10.7}
 \end{aligned}$$

O erro padrão desta estimativa,  $\sqrt{\text{var}[Y_0]}$ , torna-se tanto maior quanto mais afastado  $X_0$  estiver de  $\bar{X}$ .

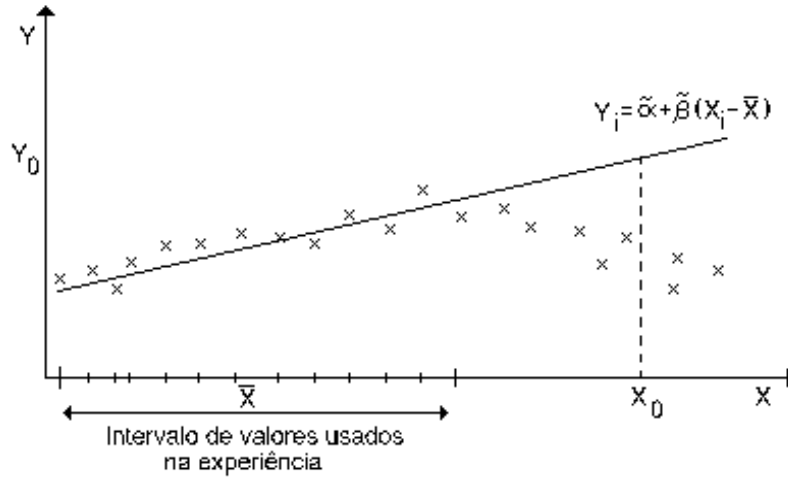


Figura 10.1: Intervalo de valores usados na experiência. Perigos da extrapolação.

## 10.2 Regressão linear e múltipla

A regressão linear e múltipla é uma extensão da regressão simples, para o caso de existirem mais do que uma variável independente, e tem como objectivo investigar simultaneamente os efeitos, sobre  $Y$ , de várias variáveis independentes. Mesmo que só estejamos interessados no efeito causado por uma dessas variáveis, é aconselhável incluir na análise todas as variáveis que podem afectar  $Y$ . Primeiro, porque se reduz o erro estocástico, reduzindo a variância residual  $\sigma^2$ . Em segundo lugar, porque elimina a tendência que poderia aparecer, se ignorássemos uma variável que afecta  $Y$ .

Considere-se o exemplo mais simples, de duas variáveis independentes  $X$  e  $Z$ . O modelo matemático é

$$Y_i = \alpha + \beta x_i + \gamma z_i + e_i$$

em que  $x_i = X_i - \bar{X}$ ,  $z_i = Z_i - \bar{Z}$  e  $e_i$  é o erro aleatório de observação, normalmente distribuído com média zero e variância comum  $\sigma^2$  ( $i = 1, \dots, n$ ). Neste caso, a média ou valor esperado da distribuição da variável  $Y$  é  $E[Y] = \alpha + \beta(X - \bar{X}) + \gamma(Z - \bar{Z})$ .

O parâmetro  $\beta$  da distribuição é interpretado geometricamente como o coeficiente angular do plano, quando nos deslocamos na direcção do eixo do  $X$ 's, mantendo  $Z$  constante. Do mesmo modo,  $\gamma$  é o coeficiente angular do plano, quando o movimento é feito na direcção do eixo dos  $Z$ 's, mantendo  $X$  constante.

As estimativas para os parâmetros  $\alpha, \beta$  e  $\gamma$  são calculadas pelo método dos mínimos quadrados, isto é, os valores  $\alpha, \beta$  e  $\gamma$  minimizam a soma dos quadrados dos desvios, dos valores observados  $Y_i$  em relação aos valores estimados  $\hat{Y}_i$ ,

$$\min \sum_{i=1}^n (Y_i - \tilde{\alpha} - \tilde{\beta}x_i - \tilde{\gamma}z_i)^2. \quad (10.8)$$

Assim, obtêm-se as seguintes fórmulas:

$$\tilde{\alpha} = \frac{\sum_{i=1}^n Y_i}{n} = \bar{Y}$$

sendo  $\tilde{\beta}$  e  $\tilde{\gamma}$  calculados a partir do sistema das equações,

$$\begin{aligned} \tilde{\beta} \sum_{i=1}^n x_i^2 + \tilde{\gamma} \sum_{i=1}^n x_i z_i &= \sum_{i=1}^n x_i Y_i \\ \tilde{\beta} \sum_{i=1}^n x_i z_i + \tilde{\gamma} \sum_{i=1}^n z_i^2 &= \sum_{i=1}^n z_i Y_i. \end{aligned}$$

Para o parâmetro  $\sigma^2$ , o estimador  $\tilde{\sigma}^2$  é dado por

$$\tilde{\sigma}^2 = \frac{1}{(n-3)} \sum_{i=1}^n (Y_i - \tilde{\alpha} - \tilde{\beta}x_i - \tilde{\gamma}z_i)^2 \quad (10.9)$$

também conhecido por variância residual.

Tal como na regressão simples, os estimadores  $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}$  e  $\tilde{\gamma}$  seguem uma distribuição normal e são não tendenciosos. A variância de  $\tilde{\alpha}$  é  $\frac{\sigma^2}{n}$ , as variâncias de  $\tilde{\beta}$  e  $\tilde{\gamma}$  são respectivamente iguais a

$$\text{var}[\tilde{\beta}] = \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{(\sum_{i=1}^n x_i z_i)^2}{\sum_{i=1}^n z_i^2}} \quad (10.10)$$

e

$$\text{var}[\tilde{\gamma}] = \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^n z_i^2 - \frac{(\sum_{i=1}^n x_i z_i)^2}{\sum_{i=1}^n x_i^2}} \quad (10.11)$$

A variável aleatória  $\frac{(n-3)\tilde{\sigma}^2}{\sigma^2}$  segue a distribuição  $\chi^2$  com  $n-3$  graus de liberdade.

Assim, é possível definir 'estatísticas'  $T_1, T_2$  e  $T_3$  para testes de hipóteses e intervalos de confiança, em relação, respectivamente, aos parâmetros  $\alpha, \beta$  e  $\gamma$ ,

$$T_1 = \frac{\tilde{\alpha} - \alpha}{\sqrt{\frac{\tilde{\sigma}^2}{n}}} \quad (10.12)$$

$$T_2 = \frac{\tilde{\beta} - \beta}{\sqrt{\frac{\tilde{\sigma}^2}{\sum x_i^2 - \frac{(\sum x_i z_i)^2}{\sum z_i^2}}}} \quad (10.13)$$

$$T_3 = \frac{\tilde{\gamma} - \gamma}{\sqrt{\frac{\tilde{\sigma}^2}{\sum z_i^2 - \frac{(\sum x_i z_i)^2}{\sum x_i^2}}}} \quad (10.14)$$

Estas 'estatísticas' seguem a distribuição t-Student com  $n - 3$  graus de liberdade.

### 10.3 Regressão não-linear

#### Linearização do modelo. Erro do tipo multiplicativo.

Além do modelo de regressão linear, existem outros modelos que podem descrever a dependência de  $Y$  em relação a  $X$ . Mesmo assim, a análise de regressão já definida pode ser aplicada, desde que seja possível redefinir as variáveis ou transformar a equação, de modo a conseguir-se um modelo linear nos parâmetros.

Como primeiro exemplo, considere o caso em que

$$E[Y_i] = \alpha + \beta X_i^2.$$

A equação é já linear nos parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$  e a única não linearidade está na variável independente  $X$ .

No segundo exemplo,

$$E[Y_i] = X_i^\beta,$$

mais complicado, a não linearidade envolve directamente o parâmetro  $\beta$  a ser estimado. Esta equação exige uma transformação de variáveis que a torne linear em  $\beta$ .

Para o primeiro caso, o modelo matemático, no caso geral, é

$$Y_i = \alpha + \beta w_i + \gamma w_i^2 + e_i$$

com  $w_i = W_i - \overline{W}$  e o  $e_i$ , ( $i = 1, \dots, n$ ), é o erro aleatório de observação, normalmente distribuído com média zero e variância  $\sigma^2$ .

Para determinar os estimadores dos mínimos quadrados (ou de máxima verosimilhança quando a condição da normalidade se verifica),  $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}$  e  $\tilde{\gamma}$ , define-se  $X = W$  e  $Z = W^2$ , o que reduz este caso à regressão múltipla e linear.

Embora a variável  $Y$  esteja relacionada com apenas uma variável  $W$ , o nosso ajuste envolve a regressão de  $Y$  em relação a dois 'regressores'  $W$  e  $W^2$ . Embora  $Z$  e  $X$  sejam

funcionalmente dependentes ( $Z = X^2$ ), entre eles não existe uma relação linear. Assim, desde que entre  $X$  e  $Z$  não exista uma relação linear, podemos usar o modelo matemático de regressão linear e múltipla.

Para o segundo caso, um modelo matemático mais geral e comum é

$$Y_i = \alpha e^{\beta X_i} u_i,$$

e se for razoável admitir que a grandes erros,  $u_i$ , estão associados grandes valores da variável dependente  $Y_i$ , será conveniente considerar o termo erro como um termo multiplicativo, em vez do aditivo, como nos casos anteriores.

Os erros aleatórios  $u_i (i = 1, \dots, n)$  têm agora uma distribuição, em geral não simétrica e centrada em 1.

A equação, neste caso, pode ser facilmente linearizada,

$$\ln Y_i = \ln \alpha + \beta X_i + \ln u_i$$

e posteriormente aplicada a análise de regressão linear e simples. O termo erro transformado, segue uma distribuição que varia à volta do zero e aproxima-se mais de uma distribuição simétrica.

A transformação logarítmica só pode ser aplicada aos casos em que é razoável supor o termo erro  $u$  multiplicativo. Se for aditivo, a transformação  $\ln$  não pode ser aplicada e a única opção para determinar as estimativas dos parâmetros, consiste em usar técnicas computacionais de ajuste mais complicadas.

## 10.4 Análise dos resíduos

Considere o caso do modelo de regressão linear e múltipla

$$Y_i = \alpha + \beta_1 X_{i1} + \beta_2 X_{i2} + \dots + \beta_p X_{ip} + e_i \quad (10.15)$$

para  $i = 1, \dots, n$ , que na forma matricial tem o seguinte aspecto,

$$Y = X^* \beta + e$$

em que  $Y$  é um vector de dimensão  $n$  que contém os valores observados (da variável dependente - resposta) e  $X^*$  é a matriz

$$[1, X_1, X_2, \dots, X_p]$$

com  $p+1$  colunas e  $n$  linhas. A primeira coluna é formada por 1's e as restantes representam os vectores das  $n$  observações para as  $p$  variáveis independentes. Por exemplo,

$$X_j = (X_{1j}, X_{2j}, \dots, X_{nj})^T.$$

Finalmente o vector  $\beta$  é de dimensão  $p + 1$  e contém, como elementos, os parâmetros do modelo a determinar

$$\beta = (\alpha, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p)^T.$$

O vector  $e$  contém os erros aleatórios das observações.

Os parâmetros do modelo são, em geral, desconhecidos. No entanto, eles podem ser estimados, como já se viu atrás. As estimativas costumam ser designadas por

$$\hat{\alpha}, \hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2, \dots, \hat{\beta}_p.$$

A partir desta estimativa obtêm-se os valores estimados da variável dependente,  $\hat{Y}_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) usando o modelo (10.15). À diferença entre o valor observado  $Y_i$  e o estimado  $\hat{Y}_i$  chama-se **resíduo**,

$$r_i = Y_i - \hat{Y}_i = Y_i - (\hat{\alpha} + \hat{\beta}_1 X_{i1} + \hat{\beta}_2 X_{i2} + \dots + \hat{\beta}_p X_{ip}).$$

Mesmo que o modelo esteja correctamente especificado, os resíduos contém componentes aleatórias e outras não aleatórias.

*É possível usar os **resíduos** para as seguintes análises estatísticas:*

- i) verificação das condições a que os erros devem satisfazer;
- ii) determinação de especificações incorrectas sobre o modelo e
- iii) detecção de observações extremas e 'outliers'.

### 10.4.1 Tipos de resíduos

Existem vários tipos de resíduos e todos eles são função da diferença entre os valores observados e os estimados. Os mais comuns são:

1. resíduo original,
2. resíduo estandardizado,
3. resíduo de Student,
4. resíduo cancelado

e todos eles possuem propriedades distintas.

O **resíduo original** já foi definido. No caso geral de regressão múltipla,

$$r = Y - \hat{Y} = Y - (X^* \hat{\beta}). \quad (10.16)$$

Desta equação tira-se que

$$r = (I - H)Y$$

em que  $H$  é a seguinte matriz das observações das variáveis independentes  $X^*(X^{*T}X^*)^{-1}X^{*T}$ . Também

$$r = (I - H)e$$

é uma combinação linear das observações  $Y$ , como função dos erros  $e$ .

Supondo que os erros do modelo não estão correlacionados, que têm médias iguais a zero e variâncias constante, temos

$$E[r] = 0 \quad \text{e} \quad \text{var}[r] = (I - H)\sigma^2.$$

As variâncias dos resíduos  $r_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) não são todas iguais, pois os elementos diagonais da matriz  $H$  não são iguais. De facto também os resíduos estão correlacionados, uma vez que a matriz  $(I - H)$  não é diagonal. Assim, a variância de um resíduo, em particular do  $r_i$ , é

$$\text{var}[r_i] = (1 - h_{ii})\sigma^2 \quad (i = 1, \dots, n)$$

e a covariância entre  $r_i$  e  $r_j$  ( $i \neq j$ ) é

$$\text{cov}[r_i, r_j] = -h_{ij}\sigma^2.$$

Os elementos da matriz  $H$  satisfazem

i)  $0 \leq h_{ii} \leq 1$

ii)  $-1 \leq h_{ij} \leq 1$  ( $i \neq j$ )

uma vez que  $H = H^T$  e  $H = H^2$ .

**Influência do valor observado  $Y_i$  no valor estimado  $\hat{Y}_j$ .**

Da equação  $\hat{Y} = X^*\hat{\beta}$  se tira que  $\hat{Y} = HY$  ( $Y_i = \sum_{j=1}^n h_{ij}Y_j$ ).

Assim, valores elevados de  $h_{ij}$  evidenciam os valores observados  $Y_j$  que mais influenciam o valor estimado  $\hat{Y}_i$ . Em particular, se  $h_{ij}$  é elevado em relação aos outros, a observação  $Y_j$  domina o valor esperado  $\hat{Y}_i$ .

A standardização dos resíduos tem sido usada com o objectivo de eliminar as diferenças entre as variações das variáveis. Poder-se-á então comparar directamente os coeficientes de regressão estimados.

O escalonamento do resíduo origina a comparação directa das amplitudes dos resíduos. Uma vez que os erros  $e_i$  são variáveis aleatórias, os  $\frac{e_i}{\sigma^2}$  são também normais e estão estandardizados. Assim o **resíduo estandardizado** é definido para cada  $i$ , como

$$s_i = \frac{r_i}{\hat{\sigma}} \quad \text{com} \quad \hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^n r_i^2}{n - p - 1}.$$

Este resíduo não segue a normal estandardizada, uma vez que o denominador não é o desvio padrão de  $r_i$ . Trata-se antes de um resíduo original mas escalonado.

O **resíduo de Student** é definido por

$$t_i = \frac{r_i}{\hat{\sigma} \sqrt{(1 - h_{ii})}},$$

$$(r_i \sim N(0, \text{var}[r_i]) \text{ com } \text{var}[r_i] = (1 - h_{ii})\sigma^2)$$

e é geralmente tratado como uma estatística t-Student com  $n - p - 1$  graus de liberdade (mesmo que  $r_i$  e  $\hat{\sigma}$  não sejam independentes).

O comportamento deste resíduo  $t_i$  é mais parecido com o do desvio normal standardizado do que com o dos resíduos originais ou standardizados.

O resíduo de Student deve ser utilizado quando se pretende *verificar se os valores estão adequadamente ajustados ao modelo*. Serve também para *evidenciar os pontos que não estão consonantes com os restantes ('outliers')*.

Outra técnica, também muito usada para detectar os 'outliers', em análise de regressão, consiste em *determinar as alterações do modelo quando se remove(em) o(s) ponto(s) "estranho(s)"*.

O **resíduo cancelado** é definido com o objectivo de detectar 'outliers'. Assim,  $r_{(-i)}$  obtém-se estimando o valor  $Y_i$  quando do modelo é retirada a observação  $i$ ,  $X^*$  e  $\hat{\beta}_{(-i)}$  é o vector das estimativas dos parâmetros considerando apenas  $n - 1$  observações, uma vez que a  $i$ -ésima foi removida dos cálculos. Pode mostrar-se que

$$r_{(-i)} = \frac{r_i}{1 - h_{ii}},$$

donde, se tira que este resíduo é simplesmente um escalonamento de  $r_i$ . Como  $\text{var}[r_{(-i)}] = \text{var}[\frac{r_i}{1 - h_{ii}}]$ , então  $\text{var}[r_{(-i)}] = \frac{\sigma^2(1 - h_{ii})}{(1 - h_{ii})^2} = \frac{\sigma^2}{1 - h_{ii}}$  com variância  $\sigma^2$  desconhecida.

Assim, o valor estimado será então

$$\widehat{\text{var}}[r_{(-i)}] = \frac{\hat{\sigma}_{(-i)}^2}{1 - h_{ii}},$$

sendo  $\hat{\sigma}_{(-i)}^2$  a média do quadrado do erro residual do ajuste conseguido quando se remove a  $i$ -ésima observação.

Nestas condições, define-se o **resíduo cancelado de Student** como

$$t_{(-i)} = \frac{r_{(-i)}}{\sqrt{\widehat{\text{var}}[r_{(-i)}]}} = \frac{r_i}{\hat{\sigma}_{(-i)} \sqrt{1 - h_{ii}}}.$$

Como se calcula  $\hat{\sigma}_{(-i)}^2$ ?

Uma vez que

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^n r_i^2}{n - p - 1}.$$

tem-se

$$\hat{\sigma}_{(-i)}^2 = \frac{\sum_{i=1}^n r_i^2 - (1 - h_{ii})^{-1} r_i^2}{n - p - 2}.$$



Assim,

$$t_{(-i)} = r_i \left[ \frac{(1 - h_{ii})(\sum_{i=1}^n r_i^2) - r_i^2}{n - p - 2} \right]^{-1/2}$$

podendo ser calculado utilizando o conjunto inteiro das observações (sem remover a  $i$ -ésima).

### 10.4.2 Verificação das condições dos erros

Na análise de regressão e para verificarmos as propriedades dos erros,  $e_i$ , além dos resíduos, podemos usar também as *técnicas gráficas e os testes estatísticos*.

A verificação das propriedades dos erros,  $e_i$ , está relacionada com as seguintes condições:

- A. aleatoriedade dos erros
- B. variância comum e constante, e
- C. distribuição normal.

Os resíduos originais e os escalonados são indicadores excelentes das violações dessas condições, uma vez que são valores múltiplos dos erros.

#### Verificação da aleatoriedade dos erros

Dois testes estatísticos podem ser usados para testar a aleatoriedade dos erros.

Um deles é conhecido por **testes dos 'runs'** e pode ser usado sempre que for conhecida a *ordem de obtenção das observações*. Baseia-se na inspeção do arranjo dos sinais (+ ou -) dos resíduos. Assim, começa-se por

1. determinar a sequência dos sinais dos resíduos, bem como a 'estatística' do teste, que é definida pelo número de 'runs',  $r$ . Define-se 'run' como sendo um grupo de resíduos adjacentes com o mesmo sinal; e em seguida,
2. verifica-se se o arranjo é ou não suficientemente comum. No caso de não ser, pode concluir-se que os resíduos não surgem aleatoriamente (isto é a correlação entre os erros é significativa).

Quando o número de sinais + ou - são  $\leq 20$ , usam-se as tabelas A.18 e A.19 para determinar os valores críticos, ao nível de significância 0.05 (nível bilateral de 0.1). Se o valor da 'estatística',  $r$ , é menor ou igual do que o limite *inferior* crítico ou maior ou igual do que o limite *superior*, rejeita-se a  $H_0$ : *de que os erros são aleatórios*, ou seja, neste caso, a ordenação não é aleatória. Se  $n_1 > 20$  e  $n_2 > 20$  usa-se então a aproximação à normal. Nesta situação, rejeita-se  $H_0$  se

$$\frac{r - \mu + \frac{1}{2}}{\sigma} < -c \quad \text{ou} \quad \frac{r - \mu - \frac{1}{2}}{\sigma} > c$$

sendo  $c$  o ponto crítico da  $N(0, 1)$  que corresponde a uma probabilidade de  $1 - \frac{\alpha}{2}$ , para  $\alpha$  nível de significância do teste.

A média  $\mu$  e a variância  $\sigma^2$  são calculadas a partir de

$$\mu = \frac{2n_1n_2}{n_1 + n_2} + 1 \quad \text{e} \quad \sigma^2 = \frac{2n_1n_2(2n_1n_2 - n_1 - n_2)}{(n_1 + n_2)^2(n_1 + n_2 - 1)}.$$

O outro teste estatístico também muito usado é o **teste de Durbin-Watson**.

Suponha que os erros  $e_i$ , num modelo de regressão, não são independentes, isto é, estão correlacionados. Podem então estar relacionados temporalmente,

$$e_i = \rho e_{i-1} + \delta_i \quad \text{com} \quad -1 \leq \rho \leq 1$$

em que os  $\delta_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  são variáveis aleatórias normalmente distribuídas e independentes, com médias iguais a zero e variâncias iguais a  $\sigma^2$ .

A 'estatística' para este teste é definida por

$$d = \frac{\sum_{i=2}^n (r_i - r_{i-1})^2}{\sum_{i=1}^n r_i^2}$$

e serve para testar  $H_0 : \rho = 0$  contra  $H_1 : \rho > 0$ .

(N.B. se  $\rho = 0$ , então  $e_i = \delta_i$ )

Para testar  $H_0 : \rho = 0$  contra  $H_1 : \rho < 0$  usa-se o mesmo processo embora a 'estatística' seja agora  $4.0 - d$ .

Os pontos críticos para a estatística  $d$  são  $d_L$  e  $d_U$ . O teste consiste então em:

- i) rejeitar  $H_0$  se  $d < d_L$ ;
- ii) não rejeitar  $H_0$  se  $d > d_U$  e
- iii) não tirar conclusões se  $d_L < d < d_U$ .

Na tabela A.20 podemos encontrar os pontos críticos para modelos com 1, 2, ... ou 5 variáveis independentes,  $X_i$ .

Se o caso iii) surge, poder-se-á optar por

- i) estimar novamente o modelo, tentando encontrar nova equação de regressão;
- ii) adicionar o intervalo  $(d_L, d_U)$  à região de rejeição; ou
- iii) aproximar a distribuição da 'estatística'  $d$  por outras distribuições probabilísticas.

Outra técnica para *detectar correlações entre resíduos (vizinhos temporalmente)* usa a *representação gráfica dos mesmos*. Se o gráfico apresentar um padrão específico (por exemplo, os resíduos do mesmo sinal aparecem juntos) e não uma mancha aleatória de pontos, então esta técnica suporta as conclusões do teste dos 'runs' e os *erros não são aleatórios* (esta técnica é conhecida pela análise gráfica dos dados em série temporal).

### Como detectar erros com variância não constante

Num modelo de regressão, a *inspecção do gráfico dos resíduos  $r_i$  em relação aos valores estimados  $\hat{Y}_i$*  é utilizada para detectar os erros que têm variâncias diferentes. Das definições de resíduo  $r_i$  e de valor estimado  $\hat{Y}_i$ , tira-se que o coeficiente de correlação entre  $r_i$  e  $\hat{Y}_i$  é sempre zero quando o modelo intersecta. Assim, o gráfico deve reflectir uma *mancha aleatória de pontos em torno da recta de declive zero*. O aparecimento de um padrão específico, poderá indicar:

- que o modelo é inadequado e a presença de 'outliers', ou
- que a variância não é constante.

O gráfico dos quadrados dos resíduos em relação aos  $\hat{Y}_i$  também serve para detectar os erros com variâncias diferentes, uma vez que  $r_i^2$  reflecte a contribuição de um dado resultado para a soma dos quadrados dos erros ( $\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum r_i^2}{n-p-1}$ ). O gráfico acentuará certas tendências entre  $r_i$  e  $\hat{Y}_i$ , como, por exemplo, o caso em que o quadrado de  $r_i$  varia de uma maneira sistemática, nomeadamente aumentando ou diminuindo com  $\hat{Y}_i$ .

A tendência referida (variação do resíduo a aumentar com  $Y_i$ ) exemplifica o caso em que a variância do erro não é constante. Nesta situação, torna-se necessária uma transformação da variável dependente, por forma a que a variável resultante (dependente) tenha uma variância constante. As transformações mais usadas são:  $\log Y$ ,  $\sqrt{Y}$  e  $1/Y$ .

Um tipo de gráfico que deve evitar-se é o que representa os  $r_i$  em relação aos valores observados  $Y_i$ . Estas variáveis estão, geralmente correlacionadas e o gráfico acentuará uma tendência linear, mesmo que o ajuste seja excelente (modelo adequado) e as condições do erro sejam válidas.

### Gráficos de probabilidades normais

Na análise de regressão é costume testar hipóteses estatísticas ou calcular intervalos de confiança. Para tal, é necessário verificar primeiro se os erros seguem a *distribuição normal*. Há testes estatísticos para determinar o ajuste dos erros à normal, no entanto, a técnica mais popular utiliza os gráficos das **probabilidade normais**. Estes, baseiam-se nos resíduos ordenados  $r_{(1)} < r_{(2)} < \dots < r_{(n)}$  (do mais negativo ao mais positivo).

Num gráfico deste tipo devem representar-se os  $r_{(i)}$  em relação a  $100(i - \frac{1}{2})/n$ , usando um papel especial, conhecido por papel das probabilidades normais. Se os erros são normalmente distribuídos, os pontos do gráfico devem estar sobre uma linha recta. Caso não se verifique a "normalidade" ou, na presença de resíduos de grandes dimensões, os pontos do gráfico não evidenciam nenhuma tendência linear.

### 10.4.3 Modelo mal especificado

Em análise de regressão, uma especificação correcta do modelo envolve dois aspectos:

- i) todas as variáveis relevantes (independente) devem fazer parte do conjunto de dados  $(X_1, X_2, \dots, X_p)$ ;
- ii) a forma funcional própria de cada variável (independente) deve ser definida e introduzida no modelo.

À parte um ajuste não muito adequado, pouco se disse sobre o problema da especificação incorrecta do modelo. Algumas técnicas gráficas, associadas à análise dos resíduos, podem ser usadas para especificar correctamente o modelo. Os gráficos a analisar serão:

- A. *do resíduo em relação às variáveis independentes, e*
- B. *dos resíduos parciais.*

### A. Gráficos do resíduo em relação às variáveis independentes.

Mais uma vez, os resíduos escalonados devem ser preferidos para esta análise. Como os resíduos originais são mais fáceis de obter, também estes poderão ser usados.

Os gráficos do resíduo em relação a cada uma das variáveis independentes *mostram as distribuições desse resíduo como função das variáveis*. A mancha de pontos evidenciada ajuda a escolher uma forma funcional correcta e, determina a necessidade da introdução (ou não) de termos adicionais no modelo.

Da definição dos  $r_i$ , pode mostrar-se que a correlação entre  $r_i$  e cada uma das variáveis independentes  $X_j (j = 1, \dots, p)$  é zero. Assim, *não deve aparecer nenhum padrão específico no gráfico respectivo, só será evidente uma mancha aleatória de pontos, centrada à volta de  $r_i = 0$* . Isto indicará, então, que a especificação da variável  $X_j$  (forma funcional do modelo que envolve esta variável) é satisfatória.

**Nota 10.4.1** *Este tipo de gráfico é semelhante aos dos resíduos em relação aos valores estimados  $\hat{Y}_i$ . No entanto, a sua interpretação nem sempre é a mesma.*

Tendências do tipo curvilíneo, (dos gráficos do resíduo em relação aos  $X_j$ ) indicam a necessidade de introdução de mais variáveis independentes no modelo ou a necessidade de uma transformação nas variáveis dependentes  $Y_i$ .

**Nota 10.4.2** *Quando os gráficos do resíduo em relação aos  $X_j$  são quase todos iguais, além de possíveis novas especificações das variáveis independentes  $X_j$  também é comum fazer-se uma transformação da variável  $Y_i$ .*

Para se verificar a necessidade de introdução de um termo de interacção  $X_i X_j$  no modelo, deve ser *analisado o gráfico do resíduo* (obtido a partir da equação modelo que ainda não inclui o termo  $X_i X_j$ ) *em relação à interacção  $X_i X_j$* . A mancha de pontos deve ser *horizontal*, o que significa que o efeito de uma variação de  $X_i$ , na variável resposta, não deve ser influenciado por alterações na outra variável  $X_j$ . Se for evidente um padrão específico, então o resíduo e o termo interacção estão correlacionados. Assim, um termo  $X_i X_j$  deve ser adicionado ao modelo.

## B. Gráficos de resíduos parciais

Um **resíduo parcial** é definido por

$$r_i^* = Y_i - (\hat{Y}_i - \hat{\beta}_j X_{ij}) = r_i + \hat{\beta}_j X_{ij} \quad (10.17)$$

em que  $\hat{Y}_i = \hat{\alpha} + \hat{\beta}_1 X_{i1} + \hat{\beta}_2 X_{i2} + \dots + \hat{\beta}_p X_{ip}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ .

N.B.  $\hat{Y}_i - \hat{\beta}_j X_{ij}$  é o valor esperado (estimado) da observação  $i$  usando todas as variáveis independentes excepto a  $X_j$ , por isso,  $r_i^*$  é conhecido por resíduo parcial.

O gráfico de  $r_i^*$  em relação à variável independente  $X_j$ , permite inspeccionar a relação existente entre  $Y_i$  e  $X_j$ , após terem sido retirados os efeitos das outras variáveis.

**Nota 10.4.3** *Estes gráficos oferecem o mesmo tipo de informação do que os de  $Y$  em relação aos  $X_j$ . No entanto, uma grande parte das variações de  $Y$ , devidas às outras variáveis, são retiradas.*

Os gráficos dos resíduos parciais são particularmente úteis na especificação de um modelo de regressão. Enquanto que os gráficos de resíduos normais evidenciam desvios das variáveis independentes em relação a uma recta, os gráficos de resíduos parciais podem ser usados para determinar a extensão e direcção da linearidade. Servem, assim, para determinar a importância de cada variável independente em relação às outras e até que ponto se não verifica a linearidade numa dada variável. Além disso, também fornecem informação necessária para uma correcta transformação de variáveis, bem como informação relativa a pontos extremos.

Uma das propriedades mais importantes dos resíduos parciais diz respeito à regressão de  $r_i^*$  em relação aos  $X_j$ , que passa pela origem e que tem um declive igual a  $\hat{\beta}_j$ . Este é o parâmetro da variável  $X_j$  no modelo completo. A equação funcional de  $r_i^*$  em relação a  $X_j$  é

$$\hat{r}_i^* = \hat{\beta}_j X_{ij} \quad (10.18)$$

**Nota 10.4.4** *O facto de ter um declive  $\hat{\beta}_j$  (no modelo), quando comparado com o declive nulo resultante do gráfico do resíduo normal em relação a  $X_j$ , permite fornecer a informação sobre a direcção e "grandeza" da linearidade bem como a não linearidade da variável  $X_j$ .*

## 10.5 Exercícios

1. Determine a relação existente entre o calor envolvido no endurecimento, representado pela variável  $Y$  e os pesos de duas substâncias  $X_1$  e  $X_2$ , tendo em consideração os seguintes valores obtidos numa experiência:

$Y$	78.5	74.3	104.3	87.6	95.6	109.2	102.7	72.5	93.1	115.9
$X_1$	7	1	11	11	7	11	3	1	2	21
$X_2$	26	29	59	31	52	55	71	31	54	47

2. A lei de Ohm diz que a intensidade da corrente  $I$  num fio de metal é proporcional à diferença de potencial  $V$  aplicada nos seus extremos e inversamente proporcional à resistência  $R$  no fio. Usando uma equação, a lei de Ohm é descrita por  $I = \frac{V}{R}$ . Num laboratório, os estudantes realizaram várias experiências para estudar esta lei.

Variaram a diferença de potencial  $V$  e para cada valor  $V$ , leram o valor da intensidade  $I$ . Pretendiam, assim, determinar o valor de  $R$  para aquele fio.

Podemos escrever a lei de Ohm na forma

$$I = \alpha + \beta V \quad \text{com} \quad \alpha = 0 \quad \text{e} \quad \beta = \frac{1}{R}.$$

Os dados obtidos a partir das experiências foram:

$V$	0.5	1.0	1.5	1.8	2.0
$I$	0.52	1.19	1.62	2.00	2.40

- (a) Qual a estimativa de  $\frac{1}{R}$  para aquele cabo?
  - (b) Como a lei de Ohm define no modelo o valor de  $\alpha$  igual a zero. Faça um teste estatístico em relação a esta hipótese.
3. Amostras de solo seco a diferentes temperaturas,  $X$ , perdem proporções diferentes de mistura,  $Y$ . Ajuste um modelo do tipo  $Y = b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3$ , considerando os seguintes valores obtidos numa experiência:

Percentagem da perda de peso, $Y$	3.71	3.81	3.86	3.93	3.96	4.20	4.34	4.51	4.73	5.35
Temperatura, $X$	100	105	110	115	121	132	144	153	163	179

4. Obtenha os estimadores, dos mínimos quadrados, dos parâmetros da curva de regressão definida por

$$Y_i = \zeta X_i^2 + e_i$$

em que os  $e_i$  são os erros casuais de observação e seguem uma distribuição normal com média 0 e variância comum  $\sigma^2$ .

5. Para calcular a capacidade de um aparelho 'air flow', foram recolhidas seis amostras de lã de diâmetros  $d_i, i = 1, 2, \dots, 6$ , conhecidos.

As alturas menométricas do aparelho,  $h$ , estão relacionadas com os diâmetros das fibras de lã utilizadas, segundo a expressão

$$h_i = k_1 d_i^{k_2} u_i$$

em que  $u_i$  são os erros casuais de observação. O logaritmo decimal da variável  $u$  segue uma distribuição normal com média zero e variância  $\sigma^2$ .

Estime os valores dos parâmetros  $k_1$  e  $k_2$  que definem o modelo, considerando os resultados obtidos numa experiência:

$d(\mu)$	19.84	20.95	22.25	24.46	26.30	30.18
$h(mm)$	335	330.3	293.5	239.3	205.9	160.2

6. Procurou-se investigar, em relação a um conjunto de ramos industriais portugueses, o fenómeno designado por nivelamento da taxa de lucro anual.

Na hipótese de nivelamento da taxa de lucro anual, deve ter-se  $\frac{M}{C} = \frac{x}{y} = K$ , com  $K$  constante.

Determine a recta de regressão que mais se aproxima da hipótese, considerando os valores obtidos da experiência feita com os seguintes ramos:

	x	y
Texteis algodão	0.65	5.43
Confecções	0.66	4.15
Aglom/Contrapl.	0.82	7.19
Celulose	2.89	22.0
Pneus	1.44	9.64
Ceramica fina	0.58	2.93
Fundição	0.84	5.95
Metalom. ligeira	0.80	6.84
Electro. ind.	0.70	3.28
Telec./electron.	0.65	3.13
Estaleiros navais	0.66	3.57

As variáveis a estudar são  $x = M/S$  (taxa de mais valia aparente) e  $y = C/S$  (composição orgânica aparente), sendo  $M$  a mais-valia anual,  $C$  o capital total e  $S$  os salários produtivos.





# Capítulo 11

## Testes de independência estocástica

Sejam  $X$  e  $Y$  duas v.a. distribuídas segundo a lei normal com médias e variâncias iguais a, respectivamente,  $\mu_1, \sigma_1^2$  e  $\mu_2, \sigma_2^2$ .

O coeficiente de correlação  $\rho$  entre as duas variáveis é dado por,

$$\rho = \frac{E[XY] - \mu_1\mu_2}{\sigma_1\sigma_2}. \quad (11.1)$$

Se as variáveis forem estocasticamente independentes,  $\rho = 0$ , pois

$$E[XY] = E[X]E[Y] = \mu_1\mu_2.$$

### 11.1 Coeficiente de correlação linear da amostra. Teste de Pearson

Para o teste de independência, podemos formular as seguintes hipóteses:

$$H_0 : \rho = 0$$

[as variáveis não estão correlacionadas linearmente]

contra a hipótese alternativa  $H_1 : \rho \neq 0$  [entre as variáveis existe uma correlação do tipo linear].

Uma vez que não são conhecidas as médias e as variâncias das variáveis, usaremos a informação obtida das amostras aleatórias, retiradas das distribuições. Conhecidos os pares  $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \dots, (X_n, Y_n)$ , usa-se o teste da razão das verossimilhanças para definir uma 'estatística' para o teste. Pode provar-se que essa 'estatística',  $\lambda$ , é uma função da variável aleatória  $R$ , definida por,

$$R = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2}} \quad (11.2)$$

ou

$$= \frac{\sum_{i=1}^n X_i Y_i - \frac{\sum_{i=1}^n X_i \sum_{i=1}^n Y_i}{n}}{\sqrt{(\sum_{i=1}^n X_i^2 - \frac{(\sum_{i=1}^n X_i)^2}{n})(\sum_{i=1}^n Y_i^2 - \frac{(\sum_{i=1}^n Y_i)^2}{n})}}$$

e que é o **coeficiente de correlação da amostra de Pearson**.

A medida de correlação entre as variáveis  $X$  e  $Y$  verifica o seguinte:

1. Só deve tomar valores entre -1 e +1.
2. Se os maiores valores de  $X$  tendem a formar pares com os maiores valores de  $Y$  (e os menores de  $X$  com os menores de  $Y$ ), então a medida de correlação deve ser positiva e estar perto de +1 se existe uma forte tendência.
3. Se os maiores valores de  $X$  tendem a formar pares com os menores valores de  $Y$  (e vice-versa), então a medida de correlação deve ser negativa e estar perto de -1, se a tendência é forte.
4. Se os valores de  $X$  formam pares, aleatoriamente, com os valores de  $Y$ , a medida de correlação deve estar próxima de zero. Isto deve acontecer quando  $X$  e  $Y$  são independentes, embora também aconteça para outros casos.

Esta medida pode ser usada com qualquer tipo de dados de natureza numérica sem preocupações relativamente à escala de medições ou tipo de distribuição. No entanto, a função distribuição da variável aleatória  $R$  depende da função distribuição bivariada  $(X, Y)$ . Nesta situação,  $R$  não tem valor como 'estatística' em testes não - paramétricos nem serve para construir intervalos de confiança, a não ser que a distribuição de  $(X, Y)$  seja conhecida.

O teste da razão das verossimilhanças, que consiste em rejeitar  $H_0$  se  $\lambda \leq c'$  é equivalente a rejeitar  $H_0$  se  $|R| \geq c$ . O valor de  $c$  é determinado de

$$\alpha = P_r[\text{Rejeitar } H_0; H_0] = [|R| \geq c; H_0]$$

Uma vez que a distribuição de  $R$  é bastante complicada (quando  $H_0$  é verdadeira), define-se outra variável que tenha uma distribuição conhecida. Assim, a variável aleatória

$$T = \frac{R\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-R^2}},$$

função de  $R$ , já segue uma distribuição conhecida, a t-Student com  $n-2$  graus de liberdade. Para este caso, o teste resume-se a,

$$\text{Rejeitar } H_0 \text{ se } |T| \geq c$$

com  $c$  determinado de

$$\alpha = P_r[|T| \geq c; H_0].$$

## 11.2 Teste de Spearman baseado em graduações

Uma medida de correlação é uma variável aleatória usada em situações em que os dados consistem em pares de números.

Suponha uma amostra aleatória bivariada, de tamanho  $n$ , representada por  $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \dots, (X_n, Y_n)$ .

Exemplos de variáveis aleatórias bivariadas:

1.  $X_i$  representa a altura da pessoa  $i$  e  $Y_i$  a do seu pai;
2.  $X_i$  representa a classificação de um teste feito pela pessoa  $i$  e  $Y_i$  as horas de treino;
3.  $X_i$  representa a pontuação média de um jogador de basquetebol e  $Y_i$  a média da pontuação da sua namorada.

As variáveis  $X$  e  $Y$  podem ser independentes, como no exemplo 3.

Algumas medidas de correlação têm funções de distribuição que não dependem da de  $(X, Y)$  se  $X$  e  $Y$  forem independentes, sendo por isso usadas como 'estatísticas' em testes não - paramétricos de independência.

A medida de correlação, agora seleccionada, é função das graduações atribuídas às observações. Possui função distribuição que não depende da de  $(X, Y)$ , quando  $X$  e  $Y$  são variáveis aleatórias independentes e contínuas.

Considere uma amostra aleatória bivariada, de tamanho  $n$ ,  $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$ . Seja  $R(X_i)$  a graduação do valor  $X_i$ , quando comparado com os outros  $X$ 's ( $i = 1, 2, \dots, n$ ). Do mesmo modo,  $R(Y_i)$  é a graduação de  $Y_i$ , considerando o conjunto dos  $Y$ 's.

Os dados também podem ser observações de natureza não-numérica e que ocorrem aos  $(n)$  pares. A graduação pode estar baseada na qualidade das observações (da pior observação para a melhor) ou na ordem de preferência.

A **medida de correlação de Spearman**,  $R_S$ , é definida por

$$R_S = \frac{\sum_{i=1}^n [R(X_i) - \frac{n+1}{2}][R(Y_i) - \frac{n+1}{2}]}{\frac{n(n^2-1)}{12}} \quad (11.3)$$

ou

$$R_S = 1 - \frac{6T}{n(n^2-1)} \quad \text{com} \quad T = \sum_{i=1}^n [R(X_i) - R(Y_i)]^2$$

caso não existam observações repetidas.

Existindo repetições deve usar-se a expressão

$$R_S = \frac{\sum_{i=1}^n R(X_i)R(Y_i) - n(\frac{n+1}{2})^2}{\sqrt{\sum_{i=1}^n R(X_i)^2 - n(\frac{n+1}{2})^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^n R(Y_i)^2 - n(\frac{n+1}{2})^2}} \quad (11.4)$$

que não é mais do que o coeficiente de Pearson,  $R$ , calculado com as graduações.

De notar, que a média das graduações dos  $X's$  (e a dos  $Y's$ ) é  $\frac{n+1}{2}$ , uma vez que

$$\bar{R}(X) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n R(X_i) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n i = \frac{1}{n} \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2}.$$

Também

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n [R(X_i) - \bar{R}(X)]^2 &= \sum_{i=1}^n \left(i - \frac{n+1}{2}\right)^2 \\ &= \sum_{i=1}^n \left[i^2 - i(n+1) + \left(\frac{n+1}{2}\right)^2\right] = \frac{n(n^2-1)}{12}. \end{aligned}$$

Assim, a expressão do coeficiente de correlação de Pearson,  $R$ , em 11.1,. reduz-se à expressão definida para o coeficiente de Spearman,  $R_S$  (equação (11.3)), quando os dados,  $X_i$  e  $Y_i$ , são substituídos pelas suas graduações,  $R(X_i)$  e  $R(Y_i)$ .

O coeficiente de correlação de Spearman usa-se como 'estatística' para o teste de independência entre duas variáveis aleatórias.  $R_S$  não é sensível a alguns tipos de dependência. As dependências que podem ser detectadas vêm expressas nas hipóteses,

**A. Teste bilateral**

$H_0$  : As variáveis  $X$  e  $Y$  são independentes.

$H_1$  : (a) Existe uma tendência para os maiores valores de  $X$  formarem pares com os maiores valores de  $Y$ , ou

(b) Existe uma tendência para os menores valores de  $X$  formarem pares com os maiores valores de  $Y$ .

**B. Teste unilateral para correlação positiva**

$H_0$  : As variáveis  $X$  e  $Y$  são independentes.

$H_1$  : Existe uma tendência para os maiores valores de  $X$  e de  $Y$  formarem pares.

**C. Teste unilateral para correlação negativa**

$H_0$  : As variáveis  $X$  e  $Y$  são independentes.

$H_1$  : Existe uma tendência para os menores valores de  $X$  formarem pares com os maiores valores de  $Y$  e vice-versa.

As hipóteses alternativas referem a existência de uma correlação entre  $X$  e  $Y$ , de tal modo que a *hipótese nula de "X e Y não estão correlacionadas" é mais correcta* do que a afirmação de independência entre  $X$  e  $Y$ .

Assim, em **B.**,

rejeita-se  $H_0$  se  $R_S > c$ ,

em que  $c$  é o ponto crítico da Tabela A.17 que corresponde a  $1 - \alpha$ , sendo  $\alpha$  o nível de significância;

Em **C.**,

rejeita-se  $H_0$  se  $R_S < c$

sendo  $c$  o ponto que corresponde a  $\alpha$ ;

Em **A.**,

rejeita-se  $H_0$  se  $R_S > c_1$  ou  $R_S < c_2$ ,

sendo  $c_1$  o ponto crítico da Tabela A.17 que corresponde a  $1 - \frac{\alpha}{2}$  e  $c_2$  o ponto crítico que corresponde a  $\frac{\alpha}{2}$ , sendo  $\alpha$  o nível de significância.

Por vezes, é possível usar a 'estatística'  $T$  definida por

$$T = \sum_{i=1}^n [R(X_i) - R(Y_i)]^2. \quad (11.5)$$

O teste baseado nesta 'estatística' é conhecido por Hotelling-Pabst. A distribuição de  $T$  é diferente da de  $R_S$ . Os pontos críticos da distribuição de  $T$  estão representados noutra tabela diferente da Tabela A.17. Contudo, note-se que  $T$  é grande quando  $R_S$  for pequeno e vice-versa. Por isso, a  $H_0$  em **B.** é rejeitada, ao nível de significância  $\alpha$ , se  $T$  é menor do que o ponto crítico que corresponde a  $\alpha$ . Também a  $H_0$  em **C.** é rejeitada se  $T > c$ , sendo  $c$  o ponto que corresponde a  $1 - \alpha$ .

### 11.3 Exercícios

1. Considere a seguinte tabela de valores,

$X$	68	66	72	73	66
$Y$	64	66	71	70	69

- (a) Calcule o coeficiente de correlação da amostra, supondo que as variáveis  $X$  e  $Y$  seguem distribuições Normais.
- (b) Ao nível de significância 0.05, acha que pode rejeitar a hipótese nula de que não existe correlação entre as duas variáveis.
2. Um casal que costuma jogar 'bowling', registou os pontos ganhos por cada um, em 10 tentativas, para saber se haveria alguma correlação entre os pontos. Os valores obtidos na experiência foram

tentativa	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
pontos: dele	147	158	131	142	183	151	196	129	155	158
dela	122	128	125	123	115	120	108	143	124	123

- (a) Calcule o coeficiente de correlação desta amostra.
- (b) Teste a hipótese de independência, usando um teste bilateral, baseado na estatística calculada em a).
3. Os estudantes de um curso de Física tiveram de realizar uma experiência que consistia em atirar uma bola de uma certa altura e medir a velocidade, em metros por segundo, em vários pontos do trajecto. A velocidade, teoricamente, deve aumentar linearmente com o tempo, pois a bola está sujeita à gravidade. Não sendo fácil medir a velocidade da bola, depois de um período de tempo fixo, as observações dos estudantes não caem necessariamente sobre a recta. Teste a relação sugerida teoricamente, a um nível de significância 0.05. Os resultados foram os seguintes:

tempo (segundos)	0	0.2	0.4	0.6	0.8
velocidade (m/seg)	0	1.82	3.58	6.01	7.88

# Apêndice A

## Tabelas Estatísticas

Tabela A.1: Números aleatórios

Linha	Números aleatórios							
<b>101</b>	19223	95034	05756	28713	96409	12531	42544	82853
<b>102</b>	73676	47150	99400	01927	27754	42648	82425	36290
<b>103</b>	45467	71709	77558	00095	32863	29485	82226	90056
<b>104</b>	52711	38889	93074	60227	40011	85848	48767	52573
<b>105</b>	95592	94007	69971	91481	60779	53791	17297	59335
<b>106</b>	68417	35013	15529	72765	85089	57067	50211	47487
<b>107</b>	82739	57890	20807	47511	81676	55300	94383	14893
<b>108</b>	60940	72024	17868	24943	61790	90656	87964	18883
<b>109</b>	36009	19365	15412	39638	85453	46816	83485	41979
<b>110</b>	38448	48789	18338	24697	39364	42006	76688	08708
<b>111</b>	81486	69487	60513	09297	00412	71238	27649	39950
<b>112</b>	59636	88804	04634	71197	19352	73089	84898	45785
<b>113</b>	62568	70206	40325	03699	71080	22553	11486	11776
<b>114</b>	45149	32992	75730	66280	03819	56202	02938	70915
<b>115</b>	61041	77684	94322	24709	73698	14526	31893	32592
<b>116</b>	14459	26056	31424	80371	65103	62253	50490	61181
<b>117</b>	38167	98532	62183	70632	23417	26185	41448	75532
<b>118</b>	73190	32533	04470	29669	84407	90785	65956	86382
<b>119</b>	95857	07118	87664	92099	58806	66979	98624	84826
<b>120</b>	35476	55972	39421	65850	04266	35435	43742	11937
<b>121</b>	71487	09984	29077	14863	61683	47052	62224	51025
<b>122</b>	13873	81598	95052	90908	73592	75186	87136	95761
<b>123</b>	54580	81507	27102	56027	55892	33063	41842	81868
<b>124</b>	71035	09001	43367	49497	72719	96758	27611	91596
<b>125</b>	96746	12149	37823	71868	18442	35119	62103	39244
<b>126</b>	96927	19931	36089	74192	77567	88741	48409	41903
<b>127</b>	43909	99477	25330	64359	40085	16925	85117	36071

## A.1 Continuação

Linha	Números aleatórios							
<b>128</b>	15689	14227	06565	14374	13352	49367	81982	87209
<b>129</b>	36759	58984	68288	22913	18638	54303	00795	08727
<b>130</b>	69051	64817	87174	09517	84534	06489	87201	97245
<b>131</b>	05007	16632	81194	14873	04197	85576	45195	96565
<b>132</b>	68732	55259	84292	08796	43165	93739	31685	97150
<b>133</b>	45740	41807	65561	33302	07051	93623	18132	09547
<b>134</b>	27816	78416	18329	21337	35213	37741	04312	68508
<b>135</b>	66925	55658	39100	78458	11206	19876	87151	31260
<b>136</b>	08421	44753	77377	28744	75592	08563	79140	92454
<b>137</b>	53645	66812	61421	47836	12609	15373	98481	14592
<b>138</b>	66831	68908	40772	21558	47781	33586	79177	06928
<b>139</b>	55588	99404	70708	41098	43563	56934	48394	51719
<b>140</b>	12975	13258	13048	45144	72321	81940	00360	02428
<b>141</b>	96767	35964	23822	96012	94591	65194	50842	53372
<b>142</b>	72829	50232	97892	63408	77919	44575	14870	04178
<b>143</b>	88565	42628	17797	49376	61762	16953	88604	12724
<b>144</b>	62964	88145	83083	69453	46109	59505	69680	00900
<b>145</b>	19687	12633	57857	95806	09931	02150	43163	58636
<b>146</b>	37609	59057	66967	83401	60705	02384	90597	93600
<b>147</b>	54873	86278	88737	74351	47500	84552	19909	67181
<b>148</b>	00694	05977	19664	65441	20903	62371	22725	53340
<b>149</b>	71546	05233	53946	68743	72460	27601	45403	88692
<b>150</b>	07511	88915	41267	16853	84569	79367	32337	03316
<b>151</b>	0380.	29341	29264	80198	12371	13121	54969	43912
<b>152</b>	77320	35030	77519	41109	98296	18984	60869	12349
<b>153</b>	07886	56866	39648	69290	03600	05376	58958	22720
<b>154</b>	87065	74133	21117	70595	22791	67306	28420	52067
<b>155</b>	42090	09628	54035	93879	98441	04606	27381	82637
<b>156</b>	55494	67690	88131	81800	11188	28552	25752	21953
<b>157</b>	16698	30406	96587	65985	07165	50148	16201	86792
<b>158</b>	16297	07626	68683	45335	34377	72941	41764	77038
<b>159</b>	22897	17467	17638	70043	36243	13008	83993	22869
<b>160</b>	98163	45944	34210	64158	76971	27689	82926	75957
<b>161</b>	43400	25831	06283	22138	16043	15706	73345	26238
<b>162</b>	97341	46254	88153	62336	21112	35574	99271	45297
<b>163</b>	64578	67197	28310	90341	37531	63890	52630	76315
<b>164</b>	11022	79124	49525	63078	17229	32165	01343	21394
<b>165</b>	81232	43939	23840	05995	84589	06788	76358	26622
<b>166</b>	36843	84798	51167	44728	20554	55538	27647	32708
<b>167</b>	84329	80081	69516	78934	14293	92478	16479	26974
<b>168</b>	27788	85789	41592	74472	96773	27090	24954	41474



## A.1 Continuação

Linha	Números aleatórios							
<b>169</b>	99224	00850	43737	75202	44753	63236	14260	73686
<b>170</b>	38075	73239	52555	46342	13365	02182	30443	53229
<b>171</b>	87368	49451	53771	48343	51236	18522	73670	23212
<b>172</b>	40512	00681	44282	47178	08139	78693	34715	75606
<b>173</b>	81636	57578	54286	27216	58758	80358	84115	84568
<b>174</b>	26411	94292	06340	97762	37033	85968	94165	46514
<b>175</b>	80011	09937	57195	33906	94831	10056	42211	65491
<b>176</b>	92813	87503	63494	71379	76550	45984	05481	50830
<b>177</b>	70348	72871	63419	57363	29685	43090	18763	31714
<b>178</b>	24005	52114	26224	39078	80798	15220	43186	00976
<b>179</b>	85063	55810	10470	08029	30025	29734	61181	72090
<b>180</b>	11532	73186	92541	06915	72954	10167	12142	26492
<b>181</b>	59618	03914	05208	84088	20426	39004	84582	87317
<b>182</b>	92965	50837	39921	84661	82514	81899	24565	60874
<b>183</b>	85116	27684	14597	85747	01596	25889	41998	15635
<b>184</b>	15106	10411	90221	49377	44569	28185	80959	76355
<b>185</b>	03638	31589	07871	25792	85823	55400	56026	12193
<b>186</b>	97971	48932	45792	63993	95635	28753	46069	84635
<b>187</b>	49345	18305	76213	82390	77412	97401	50650	71755
<b>188</b>	87370	88099	89695	87633	76987	85503	26257	51736
<b>189</b>	88296	95670	74932	65317	93848	43988	47597	83044
<b>190</b>	79485	92200	99401	54473	34336	82796	05457	60343
<b>191</b>	40830	24979	23333	37619	56227	95941	59494	86539
<b>192</b>	32006	76302	81221	00693	95197	75044	46596	11628
<b>193</b>	37569	85187	44692	50706	53161	69027	88389	60313
<b>194</b>	56680	79003	23361	67094	15019	63261	24543	52884
<b>195</b>	05172	08100	22316	54495	60005	29532	18433	18057
<b>196</b>	74782	27005	03894	98038	20627	40307	47317	92759
<b>197</b>	85228	93264	61409	03404	09649	55937	60843	66167
<b>198</b>	68309	12060	14762	58002	03716	81968	57934	32624
<b>199</b>	26461	88346	52430	60906	74216	96263	69296	90107
<b>200</b>	42672	67680	42376	95023	82744	03971	96560	55148

Tabela A.2: Coeficientes da Binomial

$n$	$\binom{n}{0}$	$\binom{n}{1}$	$\binom{n}{2}$	$\binom{n}{3}$	$\binom{n}{4}$	$\binom{n}{5}$	$\binom{n}{6}$	$\binom{n}{7}$	$\binom{n}{8}$	$\binom{n}{9}$	$\binom{n}{10}$
0	1										
1	1	1									
2	1	2	1								
3	1	3	3	1							
4	1	4	6	4	1						
5	1	5	10	10	5	1					
6	1	6	15	20	15	6	1				
7	1	7	21	35	35	21	7	1			
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1		
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	
10	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1
11	1	11	55	165	330	462	462	330	165	55	11
12	1	12	66	220	495	792	924	792	495	220	66
13	1	13	78	286	715	1287	1716	1716	1287	715	286
14	1	14	91	364	1001	2002	3003	3432	3003	2002	1001
15	1	15	105	455	1365	3003	5005	6435	6435	5005	3003
16	1	16	120	560	1820	4368	8008	11440	12870	11440	8008
17	1	17	136	680	2380	6188	12376	19448	24310	24310	19448
18	1	18	153	816	3060	8568	18564	31824	43758	48620	43758
19	1	19	171	969	3876	11628	27132	50388	75582	92378	92378
20	1	20	190	1140	4845	15504	38760	77520	125970	167960	184756

Tabela A.3: Distribuição Binomial

$n$	$r$	$p$										
		0,01	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50
1	0	0,9900	0,9500	0,9000	0,8500	0,8000	0,7500	0,7000	0,6500	0,6000	0,5500	0,5000
	1	0,0100	0,0500	0,1000	0,1500	0,2000	0,2500	0,3000	0,3500	0,4000	0,4500	0,5000
2	0	0,9801	0,9025	0,8100	0,7225	0,6400	0,5625	0,4900	0,4225	0,3600	0,3025	0,2500
	1	0,0198	0,0950	0,1800	0,2550	0,3200	0,3750	0,4200	0,4550	0,4800	0,4950	0,5000
	2	0,0001	0,0025	0,0100	0,0225	0,0400	0,0625	0,0900	0,1225	0,1600	0,2025	0,2500
3	0	0,9703	0,8574	0,7290	0,6141	0,5120	0,4219	0,3430	0,2746	0,2160	0,1664	0,1250
	1	0,0294	0,1354	0,2430	0,3251	0,3840	0,4219	0,4410	0,4436	0,4320	0,4084	0,3750
	2	0,0003	0,0071	0,0270	0,0574	0,0960	0,1406	0,1890	0,2389	0,2880	0,3341	0,3750
	3	0,0000	0,0001	0,0010	0,0034	0,0080	0,0156	0,0270	0,0429	0,0640	0,0911	0,1250
4	0	0,9606	0,8145	0,6561	0,5220	0,4096	0,3164	0,2401	0,1785	0,1296	0,0915	0,0625
	1	0,0388	0,1715	0,2916	0,3685	0,4096	0,4219	0,4116	0,3845	0,3456	0,2995	0,2500
	2	0,0006	0,0135	0,0486	0,0975	0,1536	0,2109	0,2646	0,3105	0,3456	0,3675	0,3750
	3	0,0000	0,0005	0,0036	0,0115	0,0256	0,0469	0,0756	0,1115	0,1536	0,2005	0,2500
	4	0,0000	0,0000	0,0001	0,0005	0,0016	0,0039	0,0081	0,0150	0,0256	0,0410	0,0625
5	0	0,9510	0,7738	0,5905	0,4437	0,3277	0,2373	0,1681	0,1160	0,0778	0,0503	0,0313
	1	0,0480	0,2036	0,3281	0,3915	0,4096	0,3955	0,3602	0,3124	0,2592	0,2059	0,1563
	2	0,0010	0,0214	0,0729	0,1382	0,2048	0,2637	0,3087	0,3364	0,3456	0,3369	0,3125
	3	0,0000	0,0011	0,0081	0,0244	0,0512	0,0879	0,1323	0,1811	0,2304	0,2757	0,3125
	4	0,0000	0,0000	0,0005	0,0022	0,0064	0,0146	0,0284	0,0488	0,0768	0,1128	0,1563
	5	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0010	0,0024	0,0053	0,0102	0,0185	0,0313
6	0	0,9415	0,7351	0,5314	0,3771	0,2621	0,1780	0,1176	0,0754	0,0467	0,0277	0,0156
	1	0,0571	0,2321	0,3543	0,3993	0,3932	0,3560	0,3025	0,2437	0,1866	0,1359	0,0938
	2	0,0014	0,0305	0,0984	0,1762	0,2458	0,2966	0,3241	0,3280	0,3110	0,2780	0,2344
	3	0,0000	0,0021	0,0146	0,0415	0,0819	0,1318	0,1852	0,2355	0,2765	0,3032	0,3125
	4	0,0000	0,0001	0,0012	0,0055	0,0154	0,0330	0,0595	0,0951	0,1382	0,1861	0,2344
	5	0,0000	0,0000	0,0001	0,0004	0,0015	0,0044	0,0102	0,0205	0,0369	0,0609	0,0938
	6	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002	0,0007	0,0018	0,0041	0,0083	0,0156

## A.3 Continuação

$n$	$r$	$p$										
		0,01	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50
<b>7</b>	<b>0</b>	0,9321	0,6983	0,4783	0,3206	0,2097	0,1335	0,0824	0,0490	0,0280	0,0152	0,0078
	<b>1</b>	0,0659	0,2573	0,3720	0,3960	0,3670	0,3115	0,2471	0,1848	0,1306	0,0872	0,0547
	<b>2</b>	0,0020	0,0406	0,1240	0,2097	0,2753	0,3115	0,3177	0,2985	0,2613	0,2140	0,1641
	<b>3</b>	0,0000	0,0036	0,0230	0,0617	0,1147	0,1730	0,2269	0,2679	0,2903	0,2918	0,2734
	<b>4</b>	0,0000	0,0002	0,0026	0,0109	0,0287	0,0577	0,0972	0,1442	0,1935	0,2388	0,2734
	<b>5</b>	0,0000	0,0000	0,0002	0,0012	0,0043	0,0115	0,0250	0,0466	0,0774	0,1172	0,1641
	<b>6</b>	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0004	0,0013	0,0036	0,0084	0,0172	0,0320	0,0547
	<b>7</b>	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002	0,0006	0,0016	0,0037	0,0078
<b>8</b>	<b>0</b>	0,9227	0,6634	0,4305	0,2725	0,1678	0,1001	0,0576	0,0319	0,0168	0,0084	0,0039
	<b>1</b>	0,0746	0,2793	0,3826	0,3847	0,3355	0,2670	0,1977	0,1373	0,0896	0,0548	0,0313
	<b>2</b>	0,0026	0,0515	0,1488	0,2376	0,2936	0,3115	0,2965	0,2587	0,2090	0,1569	0,1094
	<b>3</b>	0,0001	0,0054	0,0331	0,0839	0,1468	0,2076	0,2541	0,2786	0,2787	0,2568	0,2188
	<b>4</b>	0,0000	0,0004	0,0046	0,0185	0,0459	0,0865	0,1361	0,1875	0,2322	0,2627	0,2734
	<b>5</b>	0,0000	0,0000	0,0004	0,0026	0,0092	0,0231	0,0467	0,0808	0,1239	0,1719	0,2188
	<b>6</b>	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0011	0,0038	0,0100	0,0217	0,0413	0,0703	0,1094
	<b>7</b>	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0004	0,0012	0,0033	0,0079	0,0164	0,0313
<b>9</b>	<b>0</b>	0,9135	0,6302	0,3874	0,2316	0,1342	0,0751	0,0404	0,0207	0,0101	0,0046	0,0020
	<b>1</b>	0,0830	0,2985	0,3874	0,3679	0,3020	0,2253	0,1556	0,1004	0,0605	0,0339	0,0176
	<b>2</b>	0,0034	0,0629	0,1722	0,2597	0,3020	0,3003	0,2668	0,2162	0,1612	0,1110	0,0703
	<b>3</b>	0,0001	0,0077	0,0446	0,1069	0,1762	0,2336	0,2668	0,2716	0,2508	0,2119	0,1641
	<b>4</b>	0,0000	0,0006	0,0074	0,0283	0,0661	0,1168	0,1715	0,2194	0,2508	0,2600	0,2461
	<b>5</b>	0,0000	0,0000	0,0008	0,0050	0,0165	0,0389	0,0735	0,1181	0,1672	0,2128	0,2461
	<b>6</b>	0,0000	0,0000	0,0001	0,0006	0,0028	0,0087	0,0210	0,0424	0,0743	0,1160	0,1641
	<b>7</b>	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0003	0,0012	0,0039	0,0098	0,0212	0,0407	0,0703
	<b>8</b>	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0004	0,0013	0,0035	0,0083	0,0176
	<b>9</b>	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0008	0,0020



[illegible]

### A.3 Continuação

[illegible]

		$p$										
$n$	$r$	0,01	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50
16	0	0,8515	0,4401	0,1853	0,0743	0,0281	0,0100	0,0033	0,0010	0,0003	0,0001	0,0000
	1	0,1376	0,3706	0,3294	0,2097	0,1126	0,0535	0,0228	0,0087	0,0030	0,0009	0,0002
	2	0,0104	0,1463	0,2745	0,2775	0,2111	0,1336	0,0732	0,0353	0,0150	0,0056	0,0018
	3	0,0005	0,0359	0,1423	0,2285	0,2463	0,2079	0,1465	0,0888	0,0468	0,0215	0,0085
	4	0,0000	0,0061	0,0514	0,1311	0,2001	0,2252	0,2040	0,1553	0,1014	0,0572	0,0278
	5	0,0000	0,0008	0,0137	0,0555	0,1201	0,1802	0,2099	0,2008	0,1623	0,1123	0,0667
	6	0,0000	0,0001	0,0028	0,0180	0,0550	0,1101	0,1649	0,1982	0,1983	0,1684	0,1222
	7	0,0000	0,0000	0,0004	0,0045	0,0197	0,0524	0,1010	0,1524	0,1889	0,1969	0,1746
	8	0,0000	0,0000	0,0001	0,0009	0,0055	0,0197	0,0487	0,0923	0,1417	0,1812	0,1964
	9	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0012	0,0058	0,0185	0,0442	0,0840	0,1318	0,1746
	10	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0014	0,0056	0,0167	0,0392	0,0755	0,1222
	11	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0013	0,0049	0,0142	0,0337	0,0667
	12	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0011	0,0040	0,0115	0,0278
	13	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0008	0,0029	0,0085
	14	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0005	0,0018
	15	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002
16	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	
17	0	0,8429	0,4181	0,1668	0,0631	0,0225	0,0075	0,0023	0,0007	0,0002	0,0000	0,0000
	1	0,1447	0,3741	0,3150	0,1893	0,0957	0,0426	0,0169	0,0060	0,0019	0,0005	0,0001
	2	0,0117	0,1575	0,2800	0,2673	0,1914	0,1136	0,0581	0,0260	0,0102	0,0035	0,0010
	3	0,0006	0,0415	0,1556	0,2359	0,2393	0,1893	0,1245	0,0701	0,0341	0,0144	0,0052
	4	0,0000	0,0076	0,0605	0,1457	0,2093	0,2209	0,1868	0,1320	0,0796	0,0411	0,0182
	5	0,0000	0,0010	0,0175	0,0668	0,1361	0,1914	0,2081	0,1849	0,1379	0,0875	0,0472
	6	0,0000	0,0001	0,0039	0,0236	0,0680	0,1276	0,1784	0,1991	0,1839	0,1432	0,0944
	7	0,0000	0,0000	0,0007	0,0065	0,0267	0,0668	0,1201	0,1685	0,1927	0,1841	0,1484
	8	0,0000	0,0000	0,0001	0,0014	0,0084	0,0279	0,0644	0,1134	0,1606	0,1883	0,1855
	9	0,0000	0,0000	0,0000	0,0003	0,0021	0,0093	0,0276	0,0611	0,1070	0,1540	0,1855
	10	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0004	0,0025	0,0095	0,0263	0,0571	0,1008	0,1484
	11	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0005	0,0026	0,0090	0,0242	0,0525	0,0944
	12	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0006	0,0024	0,0081	0,0215	



### A.3 Continuação

[illegible]

[illegible]

### A.3 Continuação

[illegible]

[illegible]

### A.3 Continuação

[illegible]

Tabela A.4: Distribuição de Poisson

[illegible]

## A.4 Continuação

$\begin{smallmatrix} x \\ \downarrow \end{smallmatrix} \mu \rightarrow$	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,7	3,8	3,9	4,0
0	0,0450	0,0408	0,0369	0,0334	0,0302	0,0273	0,0247	0,0224	0,0202	0,0183
1	0,1397	0,1304	0,1217	0,1135	0,1057	0,0984	0,0915	0,0850	0,0789	0,0733
2	0,2165	0,2087	0,2008	0,1929	0,1850	0,1771	0,1692	0,1615	0,1539	0,1465
3	0,2237	0,2226	0,2209	0,2186	0,2158	0,2125	0,2087	0,2046	0,2001	0,1954
4	0,1733	0,1781	0,1823	0,1858	0,1888	0,1912	0,1931	0,1944	0,1951	0,1954
5	0,1075	0,1140	0,1203	0,1264	0,1322	0,1377	0,1429	0,1477	0,1522	0,1563
6	0,0555	0,0608	0,0662	0,0716	0,0771	0,0826	0,0881	0,0936	0,0989	0,1042
7	0,0246	0,0278	0,0312	0,0348	0,0385	0,0425	0,0466	0,0508	0,0551	0,0595
8	0,0095	0,0111	0,0129	0,0148	0,0169	0,0191	0,0215	0,0241	0,0269	0,0298
9	0,0033	0,0040	0,0047	0,0056	0,0066	0,0076	0,0089	0,0102	0,0116	0,0132
10	0,0010	0,0013	0,0016	0,0019	0,0023	0,0028	0,0033	0,0039	0,0045	0,0053
11	0,0003	0,0004	0,0005	0,0006	0,0007	0,0009	0,0011	0,0013	0,0016	0,0019
12	0,0001	0,0001	0,0001	0,0002	0,0002	0,0003	0,0003	0,0004	0,0005	0,0006
13	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0002	0,0002
14	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001
$\begin{smallmatrix} x \\ \downarrow \end{smallmatrix} \mu \rightarrow$	4,1	4,2	4,3	4,4	4,5	4,6	4,7	4,8	4,9	5,0
0	0,0166	0,0150	0,0136	0,0123	0,0111	0,0101	0,0091	0,0082	0,0074	0,0067
1	0,0679	0,0630	0,0583	0,0540	0,0500	0,0462	0,0427	0,0395	0,0365	0,0337
2	0,1393	0,1323	0,1254	0,1188	0,1125	0,1063	0,1005	0,0948	0,0894	0,0842
3	0,1904	0,1852	0,1798	0,1743	0,1687	0,1631	0,1574	0,1517	0,1460	0,1404
4	0,1951	0,1944	0,1933	0,1917	0,1898	0,1875	0,1849	0,1820	0,1789	0,1755
5	0,1600	0,1633	0,1662	0,1687	0,1708	0,1725	0,1738	0,1747	0,1753	0,1755
6	0,1093	0,1143	0,1191	0,1237	0,1281	0,1323	0,1362	0,1398	0,1432	0,1462
7	0,0640	0,0686	0,0732	0,0778	0,0824	0,0869	0,0914	0,0959	0,1002	0,1044
8	0,0328	0,0360	0,0393	0,0428	0,0463	0,0500	0,0537	0,0575	0,0614	0,0653
9	0,0150	0,0168	0,0188	0,0209	0,0232	0,0255	0,0281	0,0307	0,0334	0,0363
10	0,0061	0,0071	0,0081	0,0092	0,0104	0,0118	0,0132	0,0147	0,0164	0,0181
11	0,0023	0,0027	0,0032	0,0037	0,0043	0,0049	0,0056	0,0064	0,0073	0,0082
12	0,0008	0,0009	0,0011	0,0013	0,0016	0,0019	0,0022	0,0026	0,0030	0,0034
13	0,0002	0,0003	0,0004	0,0005	0,0006	0,0007	0,0008	0,0009	0,0011	0,0013
14	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0002	0,0002	0,0003	0,0003	0,0004	0,0005
15	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0002

## A.4 Continuação

$\begin{smallmatrix} x \\ \downarrow \\ \mu \rightarrow \end{smallmatrix}$	5,1	5,2	5,3	5,4	5,5	5,6	5,7	5,8	5,9	6,0
0	0,0061	0,0055	0,0050	0,0045	0,0041	0,0037	0,0033	0,0030	0,0027	0,0025
1	0,0311	0,0287	0,0265	0,0244	0,0225	0,0207	0,0191	0,0176	0,0162	0,0149
2	0,0793	0,0746	0,0701	0,0659	0,0618	0,0580	0,0544	0,0509	0,0477	0,0446
3	0,1348	0,1293	0,1239	0,1185	0,1133	0,1082	0,1033	0,0985	0,0938	0,0892
4	0,1719	0,1681	0,1641	0,1600	0,1558	0,1515	0,1472	0,1428	0,1383	0,1339
5	0,1753	0,1748	0,1740	0,1728	0,1714	0,1697	0,1678	0,1656	0,1632	0,1606
6	0,1490	0,1515	0,1537	0,1555	0,1571	0,1584	0,1594	0,1601	0,1605	0,1606
7	0,1086	0,1125	0,1163	0,1200	0,1234	0,1267	0,1298	0,1326	0,1353	0,1377
8	0,0692	0,0731	0,0771	0,0810	0,0849	0,0887	0,0925	0,0962	0,0998	0,1033
9	0,0392	0,0423	0,0454	0,0486	0,0519	0,0552	0,0586	0,0620	0,0654	0,0688
10	0,0200	0,0220	0,0241	0,0262	0,0285	0,0309	0,0334	0,0359	0,0386	0,0413
11	0,0093	0,0104	0,0116	0,0129	0,0143	0,0157	0,0173	0,0190	0,0207	0,0225
12	0,0039	0,0045	0,0051	0,0058	0,0065	0,0073	0,0082	0,0092	0,0102	0,0113
13	0,0015	0,0018	0,0021	0,0024	0,0028	0,0032	0,0036	0,0041	0,0046	0,0052
14	0,0006	0,0007	0,0008	0,0009	0,0011	0,0013	0,0015	0,0017	0,0019	0,0022
15	0,0002	0,0002	0,0003	0,0003	0,0004	0,0005	0,0006	0,0007	0,0008	0,0009
16	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0002	0,0002	0,0002	0,0003	0,0003
17	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001



## A.4 Continuação

$\begin{smallmatrix} x \\ \downarrow \\ \mu \end{smallmatrix} \rightarrow$	6,1	6,2	6,3	6,4	6,5	6,6	6,7	6,8	6,9	7,0
0	0,0022	0,0020	0,0018	0,0017	0,0015	0,0014	0,0012	0,0011	0,0010	0,0009
1	0,0137	0,0126	0,0116	0,0106	0,0098	0,0090	0,0082	0,0076	0,0070	0,0064
2	0,0417	0,0390	0,0364	0,0340	0,0318	0,0296	0,0276	0,0258	0,0240	0,0223
3	0,0848	0,0806	0,0765	0,0726	0,0688	0,0652	0,0617	0,0584	0,0552	0,0521
4	0,1294	0,1249	0,1205	0,1162	0,1118	0,1076	0,1034	0,0992	0,0952	0,0912
5	0,1579	0,1549	0,1519	0,1487	0,1454	0,1420	0,1385	0,1349	0,1314	0,1277
6	0,1605	0,1601	0,1595	0,1586	0,1575	0,1562	0,1546	0,1529	0,1511	0,1490
7	0,1399	0,1418	0,1435	0,1450	0,1462	0,1472	0,1480	0,1486	0,1489	0,1490
8	0,1066	0,1099	0,1130	0,1160	0,1188	0,1215	0,1240	0,1263	0,1284	0,1304
9	0,0723	0,0757	0,0791	0,0825	0,0858	0,0891	0,0923	0,0954	0,0985	0,1014
10	0,0441	0,0469	0,0498	0,0528	0,0558	0,0588	0,0618	0,0649	0,0679	0,0710
11	0,0244	0,0265	0,0285	0,0307	0,0330	0,0353	0,0377	0,0401	0,0426	0,0452
12	0,0124	0,0137	0,0150	0,0164	0,0179	0,0194	0,0210	0,0227	0,0245	0,0263
13	0,0058	0,0065	0,0073	0,0081	0,0089	0,0099	0,0108	0,0119	0,0130	0,0142
14	0,0025	0,0029	0,0033	0,0037	0,0041	0,0046	0,0052	0,0058	0,0064	0,0071
15	0,0010	0,0012	0,0014	0,0016	0,0018	0,0020	0,0023	0,0026	0,0029	0,0033
16	0,0004	0,0005	0,0005	0,0006	0,0007	0,0008	0,0010	0,0011	0,0013	0,0014
17	0,0001	0,0002	0,0002	0,0002	0,0003	0,0003	0,0004	0,0004	0,0005	0,0006
18	0,0000	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0002	0,0002	0,0002
19	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001

[illegible]

## A.4 Continuação

$\begin{smallmatrix} x \\ \downarrow \\ \mu \end{smallmatrix} \rightarrow$	8,1	8,2	8,3	8,4	8,5	8,6	8,7	8,8	8,9	9,0
0	0,0003	0,0003	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0001	0,0001
1	0,0025	0,0023	0,0021	0,0019	0,0017	0,0016	0,0014	0,0013	0,0012	0,0011
2	0,0100	0,0092	0,0086	0,0079	0,0074	0,0068	0,0063	0,0058	0,0054	0,0050
3	0,0269	0,0252	0,0237	0,0222	0,0208	0,0195	0,0183	0,0171	0,0160	0,0150
4	0,0544	0,0517	0,0491	0,0466	0,0443	0,0420	0,0398	0,0377	0,0357	0,0337
5	0,0882	0,0849	0,0816	0,0784	0,0752	0,0722	0,0692	0,0663	0,0635	0,0607
6	0,1191	0,1160	0,1128	0,1097	0,1066	0,1034	0,1003	0,0972	0,0941	0,0911
7	0,1378	0,1358	0,1338	0,1317	0,1294	0,1271	0,1247	0,1222	0,1197	0,1171
8	0,1395	0,1392	0,1388	0,1382	0,1375	0,1366	0,1356	0,1344	0,1332	0,1318
9	0,1256	0,1269	0,1280	0,1290	0,1299	0,1306	0,1311	0,1315	0,1317	0,1318
10	0,1017	0,1040	0,1063	0,1084	0,1104	0,1123	0,1140	0,1157	0,1172	0,1186
11	0,0749	0,0776	0,0802	0,0828	0,0853	0,0878	0,0902	0,0925	0,0948	0,0970
12	0,0505	0,0530	0,0555	0,0579	0,0604	0,0629	0,0654	0,0679	0,0703	0,0728
13	0,0315	0,0334	0,0354	0,0374	0,0395	0,0416	0,0438	0,0459	0,0481	0,0504
14	0,0182	0,0196	0,0210	0,0225	0,0240	0,0256	0,0272	0,0289	0,0306	0,0324
15	0,0098	0,0107	0,0116	0,0126	0,0136	0,0147	0,0158	0,0169	0,0182	0,0194
16	0,0050	0,0055	0,0060	0,0066	0,0072	0,0079	0,0086	0,0093	0,0101	0,0109
17	0,0024	0,0026	0,0029	0,0033	0,0036	0,0040	0,0044	0,0048	0,0053	0,0058
18	0,0011	0,0012	0,0014	0,0015	0,0017	0,0019	0,0021	0,0024	0,0026	0,0029
19	0,0005	0,0005	0,0006	0,0007	0,0008	0,0009	0,0010	0,0011	0,0012	0,0014
20	0,0002	0,0002	0,0002	0,0003	0,0003	0,0004	0,0004	0,0005	0,0005	0,0006
21	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0003
22	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001

## A.4 Continuação

$\begin{smallmatrix} x \\ \downarrow \\ \mu \end{smallmatrix} \rightarrow$	9,1	9,2	9,3	9,4	9,5	9,6	9,7	9,8	9,9	10,0
0	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0000
1	0,0010	0,0009	0,0009	0,0008	0,0007	0,0007	0,0006	0,0005	0,0005	0,0005
2	0,0046	0,0043	0,0040	0,0037	0,0034	0,0031	0,0029	0,0027	0,0025	0,0023
3	0,0140	0,0131	0,0123	0,0115	0,0107	0,0100	0,0093	0,0087	0,0081	0,0076
4	0,0319	0,0302	0,0285	0,0269	0,0254	0,0240	0,0226	0,0213	0,0201	0,0189
5	0,0581	0,0555	0,0530	0,0506	0,0483	0,0460	0,0439	0,0418	0,0398	0,0378
6	0,0881	0,0851	0,0822	0,0793	0,0764	0,0736	0,0709	0,0682	0,0656	0,0631
7	0,1145	0,1118	0,1091	0,1064	0,1037	0,1010	0,0982	0,0955	0,0928	0,0901
8	0,1302	0,1286	0,1269	0,1251	0,1232	0,1212	0,1191	0,1170	0,1148	0,1126
9	0,1317	0,1315	0,1311	0,1306	0,1300	0,1293	0,1284	0,1274	0,1263	0,1251
10	0,1198	0,1210	0,1219	0,1228	0,1235	0,1241	0,1245	0,1249	0,1250	0,1251
11	0,0991	0,1012	0,1031	0,1049	0,1067	0,1083	0,1098	0,1112	0,1125	0,1137
12	0,0752	0,0776	0,0799	0,0822	0,0844	0,0866	0,0888	0,0908	0,0928	0,0948
13	0,0526	0,0549	0,0572	0,0594	0,0617	0,0640	0,0662	0,0685	0,0707	0,0729
14	0,0342	0,0361	0,0380	0,0399	0,0419	0,0439	0,0459	0,0479	0,0500	0,0521
15	0,0208	0,0221	0,0235	0,0250	0,0265	0,0281	0,0297	0,0313	0,0330	0,0347
16	0,0118	0,0127	0,0137	0,0147	0,0157	0,0168	0,0180	0,0192	0,0204	0,0217
17	0,0063	0,0069	0,0075	0,0081	0,0088	0,0095	0,0103	0,0111	0,0119	0,0128
18	0,0032	0,0035	0,0039	0,0042	0,0046	0,0051	0,0055	0,0060	0,0065	0,0071
19	0,0015	0,0017	0,0019	0,0021	0,0023	0,0026	0,0028	0,0031	0,0034	0,0037
20	0,0007	0,0008	0,0009	0,0010	0,0011	0,0012	0,0014	0,0015	0,0017	0,0019
21	0,0003	0,0003	0,0004	0,0004	0,0005	0,0006	0,0006	0,0007	0,0008	0,0009
22	0,0001	0,0001	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0003	0,0003	0,0004	0,0004
23	0,0000	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0002	0,0002
24	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0001	0,0001

## A.4 Continuação

$\begin{smallmatrix} x \\ \downarrow \\ \mu \end{smallmatrix} \rightarrow$	11,0	12,0	13,0	14,0	15,0	16,0	17,0	18,0	19,0	20,0
0	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
1	0,0002	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
2	0,0010	0,0004	0,0002	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
3	0,0037	0,0018	0,0008	0,0004	0,0002	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
4	0,0102	0,0053	0,0027	0,0013	0,0006	0,0003	0,0001	0,0001	0,0000	0,0000
5	0,0224	0,0127	0,0070	0,0037	0,0019	0,0010	0,0005	0,0002	0,0001	0,0001
6	0,0411	0,0255	0,0152	0,0087	0,0048	0,0026	0,0014	0,0007	0,0004	0,0002
7	0,0646	0,0437	0,0281	0,0174	0,0104	0,0060	0,0034	0,0019	0,0010	0,0005
8	0,0888	0,0655	0,0457	0,0304	0,0194	0,0120	0,0072	0,0042	0,0024	0,0013
9	0,1085	0,0874	0,0661	0,0473	0,0324	0,0213	0,0135	0,0083	0,0050	0,0029
10	0,1194	0,1048	0,0859	0,0663	0,0486	0,0341	0,0230	0,0150	0,0095	0,0058
11	0,1194	0,1144	0,1015	0,0844	0,0663	0,0496	0,0355	0,0245	0,0164	0,0106
12	0,1094	0,1144	0,1099	0,0984	0,0829	0,0661	0,0504	0,0368	0,0259	0,0176
13	0,0926	0,1056	0,1099	0,1060	0,0956	0,0814	0,0658	0,0509	0,0378	0,0271
14	0,0728	0,0905	0,1021	0,1060	0,1024	0,0930	0,0800	0,0655	0,0514	0,0387
15	0,0534	0,0724	0,0885	0,0989	0,1024	0,0992	0,0906	0,0786	0,0650	0,0516
16	0,0367	0,0543	0,0719	0,0866	0,0960	0,0992	0,0963	0,0884	0,0772	0,0646
17	0,0237	0,0383	0,0550	0,0713	0,0847	0,0934	0,0963	0,0936	0,0863	0,0760
18	0,0145	0,0255	0,0397	0,0554	0,0706	0,0830	0,0909	0,0936	0,0911	0,0844
19	0,0084	0,0161	0,0272	0,0409	0,0557	0,0699	0,0814	0,0887	0,0911	0,0888
20	0,0046	0,0097	0,0177	0,0286	0,0418	0,0559	0,0692	0,0798	0,0866	0,0888
21	0,0024	0,0055	0,0109	0,0191	0,0299	0,0426	0,0560	0,0684	0,0783	0,0846
22	0,0012	0,0030	0,0065	0,0121	0,0204	0,0310	0,0433	0,0560	0,0676	0,0769
23	0,0006	0,0016	0,0037	0,0074	0,0133	0,0216	0,0320	0,0438	0,0559	0,0669
24	0,0003	0,0008	0,0020	0,0043	0,0083	0,0144	0,0226	0,0328	0,0442	0,0557
25	0,0001	0,0004	0,0010	0,0024	0,0050	0,0092	0,0154	0,0237	0,0336	0,0446
26	0,0000	0,0002	0,0005	0,0013	0,0029	0,0057	0,0101	0,0164	0,0246	0,0343
27	0,0000	0,0001	0,0002	0,0007	0,0016	0,0034	0,0063	0,0109	0,0173	0,0254
28	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0009	0,0019	0,0038	0,0070	0,0117	0,0181
29	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002	0,0004	0,0011	0,0023	0,0044	0,0077	0,0125
30	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002	0,0006	0,0013	0,0026	0,0049	0,0083
31	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0007	0,0015	0,0030	0,0054
32	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0001	0,0004	0,0009	0,0018	0,0034
33	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002	0,0005	0,0010	0,0020
34	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002	0,0006	0,0012
35	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0007
36	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002	0,0004

[illegible]

Tabela A.5: Valores de  $e^x$  e de  $e^{-x}$ 

$x$	$e^x$	$e^{-x}$	$x$	$e^x$	$e^{-x}$
<b>0,0</b>	1,00000	1,00000	<b>5,0</b>	148,41316	0,00674
<b>0,1</b>	1,10517	0,90484	<b>5,1</b>	164,02191	0,00610
<b>0,2</b>	1,22140	0,81873	<b>5,2</b>	181,27224	0,00552
<b>0,3</b>	1,34986	0,74082	<b>5,3</b>	200,33681	0,00499
<b>0,4</b>	1,49182	0,67032	<b>5,4</b>	221,40642	0,00452
<b>0,5</b>	1,64872	0,60653	<b>5,5</b>	244,69193	0,00409
<b>0,6</b>	1,82212	0,54881	<b>5,6</b>	270,42641	0,00370
<b>0,7</b>	2,01375	0,49659	<b>5,7</b>	298,86740	0,00335
<b>0,8</b>	2,22554	0,44933	<b>5,8</b>	330,29956	0,00303
<b>0,9</b>	2,45960	0,40657	<b>5,9</b>	365,03747	0,00274
<b>1,0</b>	2,71828	0,36788	<b>6,0</b>	403,42879	0,00248
<b>1,1</b>	3,00417	0,33287	<b>6,1</b>	445,85777	0,00224
<b>1,2</b>	3,32012	0,30119	<b>6,2</b>	492,74904	0,00203
<b>1,3</b>	3,66930	0,27253	<b>6,3</b>	544,57191	0,00184
<b>1,4</b>	4,05520	0,24660	<b>6,4</b>	601,84504	0,00166
<b>1,5</b>	4,48169	0,22313	<b>6,5</b>	665,14163	0,00150
<b>1,6</b>	4,95303	0,20190	<b>6,6</b>	735,09519	0,00136
<b>1,7</b>	5,47395	0,18268	<b>6,7</b>	812,40583	0,00123
<b>1,8</b>	6,04965	0,16530	<b>6,8</b>	897,84729	0,00111
<b>1,9</b>	6,68589	0,14957	<b>6,9</b>	992,27472	0,00101
<b>2,0</b>	7,38906	0,13534	<b>7,0</b>	1096,63316	0,00091
<b>2,1</b>	8,16617	0,12246	<b>7,1</b>	1211,96707	0,00083
<b>2,2</b>	9,02501	0,11080	<b>7,2</b>	1339,43076	0,00075
<b>2,3</b>	9,97418	0,10026	<b>7,3</b>	1480,29993	0,00068
<b>2,4</b>	11,02318	0,09072	<b>7,4</b>	1635,98443	0,00061

## A.5 Continuação

<b>2,5</b>	12,18249	0,08208	<b>7,5</b>	1808,04241	0,00055
<b>2,6</b>	13,46374	0,07427	<b>7,6</b>	1998,19590	0,00050
<b>2,7</b>	14,87973	0,06721	<b>7,7</b>	2208,34799	0,00045
<b>2,8</b>	16,44465	0,06081	<b>7,8</b>	2440,60198	0,00041
<b>2,9</b>	18,17415	0,05502	<b>7,9</b>	2697,28233	0,00037
<b>3,0</b>	20,08554	0,04979	<b>8,0</b>	2980,95799	0,00034
<b>3,1</b>	22,19795	0,04505	<b>8,1</b>	3294,46808	0,00030
<b>3,2</b>	24,53253	0,04076	<b>8,2</b>	3640,95031	0,00027
<b>3,3</b>	27,11264	0,03688	<b>8,3</b>	4023,87239	0,00025
<b>3,4</b>	29,96410	0,03337	<b>8,4</b>	4447,06675	0,00022
<b>3,5</b>	33,11545	0,03020	<b>8,5</b>	4914,76884	0,00020
<b>3,6</b>	36,59823	0,02732	<b>8,6</b>	5431,65959	0,00018
<b>3,7</b>	40,44730	0,02472	<b>8,7</b>	6002,91222	0,00017
<b>3,8</b>	44,70118	0,02237	<b>8,8</b>	6634,24401	0,00015
<b>3,9</b>	49,40245	0,02024	<b>8,9</b>	7331,97354	0,00014
<b>4,0</b>	54,59815	0,01832	<b>9,0</b>	8103,08393	0,00012
<b>4,1</b>	60,34029	0,01657	<b>9,1</b>	8955,29270	0,00011
<b>4,2</b>	66,68633	0,01500	<b>9,2</b>	9897,12906	0,00010
<b>4,3</b>	73,69979	0,01357	<b>9,3</b>	10938,01921	0,00009
<b>4,4</b>	81,45087	0,01228	<b>9,4</b>	12088,38073	0,00008
<b>4,5</b>	90,01713	0,01111	<b>9,5</b>	13359,72683	0,00007
<b>4,6</b>	99,48432	0,01005	<b>9,6</b>	14764,78157	0,00007
<b>4,7</b>	109,94717	0,00910	<b>9,7</b>	16317,60720	0,00006
<b>4,8</b>	121,51042	0,00823	<b>9,8</b>	18033,74493	0,00006
<b>4,9</b>	134,28978	0,00745	<b>9,9</b>	19930,37044	0,00005

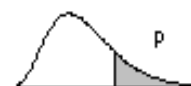




Tabela A.6: Normal padronizada

$z$	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
-3,4	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0002
-3,3	0,0005	0,0005	0,0005	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0003
-3,2	0,0007	0,0007	0,0006	0,0006	0,0006	0,0006	0,0006	0,0005	0,0005	0,0005
-3,1	0,0010	0,0009	0,0009	0,0009	0,0008	0,0008	0,0008	0,0008	0,0007	0,0007
-3,0	0,0013	0,0013	0,0013	0,0012	0,0012	0,0011	0,0011	0,0011	0,0010	0,0010
-2,9	0,0019	0,0018	0,0018	0,0017	0,0016	0,0016	0,0015	0,0015	0,0014	0,0014
-2,8	0,0026	0,0025	0,0024	0,0023	0,0023	0,0022	0,0021	0,0021	0,0020	0,0019
-2,7	0,0035	0,0034	0,0033	0,0032	0,0031	0,0030	0,0029	0,0028	0,0027	0,0026
-2,6	0,0047	0,0045	0,0044	0,0043	0,0041	0,0040	0,0039	0,0038	0,0037	0,0036
-2,5	0,0062	0,0060	0,0059	0,0057	0,0055	0,0054	0,0052	0,0051	0,0049	0,0048
-2,4	0,0082	0,0080	0,0078	0,0075	0,0073	0,0071	0,0069	0,0068	0,0066	0,0064
-2,3	0,0107	0,0104	0,0102	0,0099	0,0096	0,0094	0,0091	0,0089	0,0087	0,0084
-2,2	0,0139	0,0136	0,0132	0,0129	0,0125	0,0122	0,0119	0,0116	0,0113	0,0110
-2,1	0,0179	0,0174	0,0170	0,0166	0,0162	0,0158	0,0154	0,0150	0,0146	0,0143
-2,0	0,0228	0,0222	0,0217	0,0212	0,0207	0,0202	0,0197	0,0192	0,0188	0,0183
-1,9	0,0287	0,0281	0,0274	0,0268	0,0262	0,0256	0,0250	0,0244	0,0239	0,0233
-1,8	0,0359	0,0351	0,0344	0,0336	0,0329	0,0322	0,0314	0,0307	0,0301	0,0294
-1,7	0,0446	0,0436	0,0427	0,0418	0,0409	0,0401	0,0392	0,0384	0,0375	0,0367
-1,6	0,0548	0,0537	0,0526	0,0516	0,0505	0,0495	0,0485	0,0475	0,0465	0,0455
-1,5	0,0668	0,0655	0,0643	0,0630	0,0618	0,0606	0,0594	0,0582	0,0571	0,0559
-1,4	0,0808	0,0793	0,0778	0,0764	0,0749	0,0735	0,0721	0,0708	0,0694	0,0681
-1,3	0,0968	0,0951	0,0934	0,0918	0,0901	0,0885	0,0869	0,0853	0,0838	0,0823
-1,2	0,1151	0,1131	0,1112	0,1093	0,1075	0,1056	0,1038	0,1020	0,1003	0,0985
-1,1	0,1357	0,1335	0,1314	0,1292	0,1271	0,1251	0,1230	0,1210	0,1190	0,1170
-1,0	0,1587	0,1562	0,1539	0,1515	0,1492	0,1469	0,1446	0,1423	0,1401	0,1379
-0,9	0,1841	0,1814	0,1788	0,1762	0,1736	0,1711	0,1685	0,1660	0,1635	0,1611
-0,8	0,2119	0,2090	0,2061	0,2033	0,2005	0,1977	0,1949	0,1922	0,1894	0,1867
-0,7	0,2420	0,2389	0,2358	0,2327	0,2296	0,2266	0,2236	0,2206	0,2177	0,2148
-0,6	0,2743	0,2709	0,2676	0,2643	0,2611	0,2578	0,2546	0,2514	0,2483	0,2451
-0,5	0,3085	0,3050	0,3015	0,2981	0,2946	0,2912	0,2877	0,2843	0,2810	0,2776
-0,4	0,3446	0,3409	0,3372	0,3336	0,3300	0,3264	0,3228	0,3192	0,3156	0,3121
-0,3	0,3821	0,3783	0,3745	0,3707	0,3669	0,3632	0,3594	0,3557	0,3520	0,3483
-0,2	0,4207	0,4168	0,4129	0,4090	0,4052	0,4013	0,3974	0,3936	0,3897	0,3859
-0,1	0,4602	0,4562	0,4522	0,4483	0,4443	0,4404	0,4364	0,4325	0,4286	0,4247
-0,0	0,5000	0,4960	0,4920	0,4880	0,4840	0,4801	0,4761	0,4721	0,4681	0,4641

[illegible]

Tabela A.7: Valores Críticos da distribuição  $\chi^2$ 

<i>g.l.</i>	<i>p</i>											
	0,995	0,99	0,975	0,95	0,9	0,8	0,2	0,1	0,05	0,025	0,01	0,005
<b>1</b>	0,00	0,00	0,00	0,00	0,02	0,06	1,64	2,71	3,84	5,02	6,63	7,88
<b>2</b>	0,01	0,02	0,05	0,10	0,21	0,45	3,22	4,61	5,99	7,38	9,21	10,60
<b>3</b>	0,07	0,11	0,22	0,35	0,58	1,01	4,64	6,25	7,81	9,35	11,34	12,84
<b>4</b>	0,21	0,30	0,48	0,71	1,06	1,65	5,99	7,78	9,49	11,14	13,28	14,86
<b>5</b>	0,41	0,55	0,83	1,15	1,61	2,34	7,29	9,24	11,07	12,83	15,09	16,75
<b>6</b>	0,68	0,87	1,24	1,64	2,20	3,07	8,56	10,64	12,59	14,45	16,81	18,55
<b>7</b>	0,99	1,24	1,69	2,17	2,83	3,82	9,80	12,02	14,07	16,01	18,48	20,28
<b>8</b>	1,34	1,65	2,18	2,73	3,49	4,59	11,03	13,36	15,51	17,53	20,09	21,95
<b>9</b>	1,73	2,09	2,70	3,33	4,17	5,38	12,24	14,68	16,92	19,02	21,67	23,59
<b>10</b>	2,16	2,56	3,25	3,94	4,87	6,18	13,44	15,99	18,31	20,48	23,21	25,19
<b>11</b>	2,60	3,05	3,82	4,57	5,58	6,99	14,63	17,28	19,68	21,92	24,73	26,76
<b>12</b>	3,07	3,57	4,40	5,23	6,30	7,81	15,81	18,55	21,03	23,34	26,22	28,30
<b>13</b>	3,57	4,11	5,01	5,89	7,04	8,63	16,98	19,81	22,36	24,74	27,69	29,82
<b>14</b>	4,07	4,66	5,63	6,57	7,79	9,47	18,15	21,06	23,68	26,12	29,14	31,32
<b>15</b>	4,60	5,23	6,26	7,26	8,55	10,31	19,31	22,31	25,00	27,49	30,58	32,80
<b>16</b>	5,14	5,81	6,91	7,96	9,31	11,15	20,47	23,54	26,30	28,85	32,00	34,27
<b>17</b>	5,70	6,41	7,56	8,67	10,09	12,00	21,61	24,77	27,59	30,19	33,41	35,72
<b>18</b>	6,26	7,01	8,23	9,39	10,86	12,86	22,76	25,99	28,87	31,53	34,81	37,16
<b>19</b>	6,84	7,63	8,91	10,12	11,65	13,72	23,90	27,20	30,14	32,85	36,19	38,58
<b>20</b>	7,43	8,26	9,59	10,85	12,44	14,58	25,04	28,41	31,41	34,17	37,57	40,00
<b>21</b>	8,03	8,90	10,28	11,59	13,24	15,44	26,17	29,62	32,67	35,48	38,93	41,40
<b>22</b>	8,64	9,54	10,98	12,34	14,04	16,31	27,30	30,81	33,92	36,78	40,29	42,80
<b>23</b>	9,26	10,20	11,69	13,09	14,85	17,19	28,43	32,01	35,17	38,08	41,64	44,18
<b>24</b>	9,89	10,86	12,40	13,85	15,66	18,06	29,55	33,20	36,42	39,36	42,98	45,56
<b>25</b>	10,52	11,52	13,12	14,61	16,47	18,94	30,68	34,38	37,65	40,65	44,31	46,93
<b>26</b>	11,16	12,20	13,84	15,38	17,29	19,82	31,79	35,56	38,89	41,92	45,64	48,29
<b>27</b>	11,81	12,88	14,57	16,15	18,11	20,70	32,91	36,74	40,11	43,19	46,96	49,65
<b>28</b>	12,46	13,56	15,31	16,93	18,94	21,59	34,03	37,92	41,34	44,46	48,28	50,99
<b>29</b>	13,12	14,26	16,05	17,71	19,77	22,48	35,14	39,09	42,56	45,72	49,59	52,34
<b>30</b>	13,79	14,95	16,79	18,49	20,60	23,36	36,25	40,26	43,77	46,98	50,89	53,67
<b>40</b>	20,71	22,16	24,43	26,51	29,05	32,34	47,27	51,81	55,76	59,34	63,69	66,77
<b>50</b>	27,99	29,71	32,36	34,76	37,69	41,45	58,16	63,17	67,50	71,42	76,15	79,49
<b>60</b>	35,53	37,48	40,48	43,19	46,46	50,64	68,97	74,40	79,08	83,30	88,38	91,95
<b>80</b>	51,17	53,54	57,15	60,39	64,28	69,21	90,41	96,58	101,88	106,63	112,33	116,32
<b>100</b>	67,33	70,06	74,22	77,93	82,36	87,95	111,67	118,50	124,34	129,56	135,81	140,17

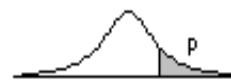


Tabela A.8: Valores Críticos da distribuição t-student

$\begin{matrix} g, l \\ \downarrow \\ p \rightarrow \end{matrix}$	0,25	0,2	0,15	0,1	0,05	0,025	0,02	0,01	0,005	0,0005
1	1,000	1,376	1,963	3,078	6,314	12,706	15,894	31,821	63,656	636,578
2	0,816	1,061	1,386	1,886	2,920	4,303	4,849	6,965	9,925	31,600
3	0,765	0,978	1,250	1,638	2,353	3,182	3,482	4,541	5,841	12,924
4	0,741	0,941	1,190	1,533	2,132	2,776	2,999	3,747	4,604	8,610
5	0,727	0,920	1,156	1,476	2,015	2,571	2,757	3,365	4,032	6,869
6	0,718	0,906	1,134	1,440	1,943	2,447	2,612	3,143	3,707	5,959
7	0,711	0,896	1,119	1,415	1,895	2,365	2,517	2,998	3,499	5,408
8	0,706	0,889	1,108	1,397	1,860	2,306	2,449	2,896	3,355	5,041
9	0,703	0,883	1,100	1,383	1,833	2,262	2,398	2,821	3,250	4,781
10	0,700	0,879	1,093	1,372	1,812	2,228	2,359	2,764	3,169	4,587
11	0,697	0,876	1,088	1,363	1,796	2,201	2,328	2,718	3,106	4,437
12	0,695	0,873	1,083	1,356	1,782	2,179	2,303	2,681	3,055	4,318
13	0,694	0,870	1,079	1,350	1,771	2,160	2,282	2,650	3,012	4,221
14	0,692	0,868	1,076	1,345	1,761	2,145	2,264	2,624	2,977	4,140
15	0,691	0,866	1,074	1,341	1,753	2,131	2,249	2,602	2,947	4,073
16	0,690	0,865	1,071	1,337	1,746	2,120	2,235	2,583	2,921	4,015
17	0,689	0,863	1,069	1,333	1,740	2,110	2,224	2,567	2,898	3,965
18	0,688	0,862	1,067	1,330	1,734	2,101	2,214	2,552	2,878	3,922
19	0,688	0,861	1,066	1,328	1,729	2,093	2,205	2,539	2,861	3,883
20	0,687	0,860	1,064	1,325	1,725	2,086	2,197	2,528	2,845	3,850
21	0,686	0,859	1,063	1,323	1,721	2,080	2,189	2,518	2,831	3,819
22	0,686	0,858	1,061	1,321	1,717	2,074	2,183	2,508	2,819	3,792
23	0,685	0,858	1,060	1,319	1,714	2,069	2,177	2,500	2,807	3,768
24	0,685	0,857	1,059	1,318	1,711	2,064	2,172	2,492	2,797	3,745
25	0,684	0,856	1,058	1,316	1,708	2,060	2,167	2,485	2,787	3,725
26	0,684	0,856	1,058	1,315	1,706	2,056	2,162	2,479	2,779	3,707
27	0,684	0,855	1,057	1,314	1,703	2,052	2,158	2,473	2,771	3,689
28	0,683	0,855	1,056	1,313	1,701	2,048	2,154	2,467	2,763	3,674
29	0,683	0,854	1,055	1,311	1,699	2,045	2,150	2,462	2,756	3,660
30	0,683	0,854	1,055	1,310	1,697	2,042	2,147	2,457	2,750	3,646
40	0,681	0,851	1,050	1,303	1,684	2,021	2,123	2,423	2,704	3,551
50	0,679	0,849	1,047	1,299	1,676	2,009	2,109	2,403	2,678	3,496
80	0,678	0,846	1,043	1,292	1,664	1,990	2,088	2,374	2,639	3,416
100	0,677	0,845	1,042	1,290	1,660	1,984	2,081	2,364	2,626	3,390
1000	0,675	0,842	1,037	1,282	1,646	1,962	2,056	2,330	2,581	3,300
$\infty$	0,674	0,842	1,036	1,282	1,645	1,960	2,054	2,326	2,576	3,290



Tabela A.9: Valores Críticos da distribuição F-Fisher

<i>g.l.1</i>	<i>g.l.2</i>	<b>0,1</b>	<b>0,05</b>	<b>0,025</b>	<b>0,01</b>	<b>0,001</b>
<b>1</b>	<b>1</b>	39,86	161,45	647,79	4052,18	405311,58
	<b>2</b>	8,53	18,51	38,51	98,50	998,38
	<b>3</b>	5,54	10,13	17,44	34,12	167,06
	<b>4</b>	4,54	7,71	12,22	21,20	74,13
	<b>5</b>	4,06	6,61	10,01	16,26	47,18
	<b>6</b>	3,78	5,99	8,81	13,75	35,51
	<b>7</b>	3,59	5,59	8,07	12,25	29,25
	<b>8</b>	3,46	5,32	7,57	11,26	25,41
	<b>9</b>	3,36	5,12	7,21	10,56	22,86
	<b>10</b>	3,29	4,96	6,94	10,04	21,04
	<b>11</b>	3,23	4,84	6,72	9,65	19,69
	<b>12</b>	3,18	4,75	6,55	9,33	18,64
	<b>13</b>	3,14	4,67	6,41	9,07	17,82
	<b>14</b>	3,10	4,60	6,30	8,86	17,14
	<b>15</b>	3,07	4,54	6,20	8,68	16,59
	<b>16</b>	3,05	4,49	6,12	8,53	16,12
	<b>17</b>	3,03	4,45	6,04	8,40	15,72
	<b>18</b>	3,01	4,41	5,98	8,29	15,38
	<b>19</b>	2,99	4,38	5,92	8,18	15,08
	<b>20</b>	2,97	4,35	5,87	8,10	14,82
	<b>21</b>	2,96	4,32	5,83	8,02	14,59
	<b>22</b>	2,95	4,30	5,79	7,95	14,38
	<b>23</b>	2,94	4,28	5,75	7,88	14,20
	<b>24</b>	2,93	4,26	5,72	7,82	14,03
	<b>25</b>	2,92	4,24	5,69	7,77	13,88
	<b>26</b>	2,91	4,23	5,66	7,72	13,74
	<b>27</b>	2,90	4,21	5,63	7,68	13,61
	<b>28</b>	2,89	4,20	5,61	7,64	13,50
	<b>29</b>	2,89	4,18	5,59	7,60	13,39
	<b>30</b>	2,88	4,17	5,57	7,56	13,29
	<b>40</b>	2,84	4,08	5,42	7,31	12,61
	<b>50</b>	2,81	4,03	5,34	7,17	12,22
	<b>60</b>	2,79	4,00	5,29	7,08	11,97
	<b>100</b>	2,76	3,94	5,18	6,90	11,50
	<b>200</b>	2,73	3,89	5,10	6,76	11,15
	<b>1000</b>	2,71	3,85	5,04	6,66	10,89

## A.9 Continuação

<i>g.l.1</i>	<i>g.l.2</i>	<b>0,1</b>	<b>0,05</b>	<b>0,025</b>	<b>0,01</b>	<b>0,001</b>
<b>2</b>	<b>1</b>	49,50	199,50	799,48	4999,34	499725,34
	<b>2</b>	9,00	19,00	39,00	99,00	998,84
	<b>3</b>	5,46	9,55	16,04	30,82	148,49
	<b>4</b>	4,32	6,94	10,65	18,00	61,25
	<b>5</b>	3,78	5,79	8,43	13,27	37,12
	<b>6</b>	3,46	5,14	7,26	10,92	27,00
	<b>7</b>	3,26	4,74	6,54	9,55	21,69
	<b>8</b>	3,11	4,46	6,06	8,65	18,49
	<b>9</b>	3,01	4,26	5,71	8,02	16,39
	<b>10</b>	2,92	4,10	5,46	7,56	14,90
	<b>11</b>	2,86	3,98	5,26	7,21	13,81
	<b>12</b>	2,81	3,89	5,10	6,93	12,97
	<b>13</b>	2,76	3,81	4,97	6,70	12,31
	<b>14</b>	2,73	3,74	4,86	6,51	11,78
	<b>15</b>	2,70	3,68	4,77	6,36	11,34
	<b>16</b>	2,67	3,63	4,69	6,23	10,97
	<b>17</b>	2,64	3,59	4,62	6,11	10,66
	<b>18</b>	2,62	3,55	4,56	6,01	10,39
	<b>19</b>	2,61	3,52	4,51	5,93	10,16
	<b>20</b>	2,59	3,49	4,46	5,85	9,95
	<b>21</b>	2,57	3,47	4,42	5,78	9,77
	<b>22</b>	2,56	3,44	4,38	5,72	9,61
	<b>23</b>	2,55	3,42	4,35	5,66	9,47
	<b>24</b>	2,54	3,40	4,32	5,61	9,34
	<b>25</b>	2,53	3,39	4,29	5,57	9,22
	<b>26</b>	2,52	3,37	4,27	5,53	9,12
	<b>27</b>	2,51	3,35	4,24	5,49	9,02
	<b>28</b>	2,50	3,34	4,22	5,45	8,93
	<b>29</b>	2,50	3,33	4,20	5,42	8,85
	<b>30</b>	2,49	3,32	4,18	5,39	8,77
	<b>40</b>	2,44	3,23	4,05	5,18	8,25
	<b>50</b>	2,41	3,18	3,97	5,06	7,96
	<b>60</b>	2,39	3,15	3,93	4,98	7,77
	<b>100</b>	2,36	3,09	3,83	4,82	7,41
	<b>200</b>	2,33	3,04	3,76	4,71	7,15
	<b>1000</b>	2,31	3,00	3,70	4,63	6,96

## A.9 Continuação

<i>g.l.1</i>	<i>g.l.2</i>	<b>0,1</b>	<b>0,05</b>	<b>0,025</b>	<b>0,01</b>	<b>0,001</b>
<b>3</b>	<b>1</b>	53,59	215,71	864,15	5403,53	540256,50
	<b>2</b>	9,16	19,16	39,17	99,16	999,31
	<b>3</b>	5,39	9,28	15,44	29,46	141,10
	<b>4</b>	4,19	6,59	9,98	16,69	56,17
	<b>5</b>	3,62	5,41	7,76	12,06	33,20
	<b>6</b>	3,29	4,76	6,60	9,78	23,71
	<b>7</b>	3,07	4,35	5,89	8,45	18,77
	<b>8</b>	2,92	4,07	5,42	7,59	15,83
	<b>9</b>	2,81	3,86	5,08	6,99	13,90
	<b>10</b>	2,73	3,71	4,83	6,55	12,55
	<b>11</b>	2,66	3,59	4,63	6,22	11,56
	<b>12</b>	2,61	3,49	4,47	5,95	10,80
	<b>13</b>	2,56	3,41	4,35	5,74	10,21
	<b>14</b>	2,52	3,34	4,24	5,56	9,73
	<b>15</b>	2,49	3,29	4,15	5,42	9,34
	<b>16</b>	2,46	3,24	4,08	5,29	9,01
	<b>17</b>	2,44	3,20	4,01	5,19	8,73
	<b>18</b>	2,42	3,16	3,95	5,09	8,49
	<b>19</b>	2,40	3,13	3,90	5,01	8,28
	<b>20</b>	2,38	3,10	3,86	4,94	8,10
	<b>21</b>	2,36	3,07	3,82	4,87	7,94
	<b>22</b>	2,35	3,05	3,78	4,82	7,80
	<b>23</b>	2,34	3,03	3,75	4,76	7,67
	<b>24</b>	2,33	3,01	3,72	4,72	7,55
	<b>25</b>	2,32	2,99	3,69	4,68	7,45
	<b>26</b>	2,31	2,98	3,67	4,64	7,36
	<b>27</b>	2,30	2,96	3,65	4,60	7,27
	<b>28</b>	2,29	2,95	3,63	4,57	7,19
	<b>29</b>	2,28	2,93	3,61	4,54	7,12
	<b>30</b>	2,28	2,92	3,59	4,51	7,05
	<b>40</b>	2,23	2,84	3,46	4,31	6,59
	<b>50</b>	2,20	2,79	3,39	4,20	6,34
	<b>60</b>	2,18	2,76	3,34	4,13	6,17
	<b>100</b>	2,14	2,70	3,25	3,98	5,86
	<b>200</b>	2,11	2,65	3,18	3,88	5,63
	<b>1000</b>	2,09	2,61	3,13	3,80	5,46

## A.9 Continuação

<i>g.l.1</i>	<i>g.l.2</i>	<b>0,1</b>	<b>0,05</b>	<b>0,025</b>	<b>0,01</b>	<b>0,001</b>
<b>4</b>	<b>1</b>	55,83	224,58	899,60	5624,26	562667,85
	<b>2</b>	9,24	19,25	39,25	99,25	999,31
	<b>3</b>	5,34	9,12	15,10	28,71	137,08
	<b>4</b>	4,11	6,39	9,60	15,98	53,43
	<b>5</b>	3,52	5,19	7,39	11,39	31,08
	<b>6</b>	3,18	4,53	6,23	9,15	21,92
	<b>7</b>	2,96	4,12	5,52	7,85	17,20
	<b>8</b>	2,81	3,84	5,05	7,01	14,39
	<b>9</b>	2,69	3,63	4,72	6,42	12,56
	<b>10</b>	2,61	3,48	4,47	5,99	11,28
	<b>11</b>	2,54	3,36	4,28	5,67	10,35
	<b>12</b>	2,48	3,26	4,12	5,41	9,63
	<b>13</b>	2,43	3,18	4,00	5,21	9,07
	<b>14</b>	2,39	3,11	3,89	5,04	8,62
	<b>15</b>	2,36	3,06	3,80	4,89	8,25
	<b>16</b>	2,33	3,01	3,73	4,77	7,94
	<b>17</b>	2,31	2,96	3,66	4,67	7,68
	<b>18</b>	2,29	2,93	3,61	4,58	7,46
	<b>19</b>	2,27	2,90	3,56	4,50	7,27
	<b>20</b>	2,25	2,87	3,51	4,43	7,10
	<b>21</b>	2,23	2,84	3,48	4,37	6,95
	<b>22</b>	2,22	2,82	3,44	4,31	6,81
	<b>23</b>	2,21	2,80	3,41	4,26	6,70
	<b>24</b>	2,19	2,78	3,38	4,22	6,59
	<b>25</b>	2,18	2,76	3,35	4,18	6,49
	<b>26</b>	2,17	2,74	3,33	4,14	6,41
	<b>27</b>	2,17	2,73	3,31	4,11	6,33
	<b>28</b>	2,16	2,71	3,29	4,07	6,25
	<b>29</b>	2,15	2,70	3,27	4,04	6,19
	<b>30</b>	2,14	2,69	3,25	4,02	6,12
	<b>40</b>	2,09	2,61	3,13	3,83	5,70
	<b>50</b>	2,06	2,56	3,05	3,72	5,46
	<b>60</b>	2,04	2,53	3,01	3,65	5,31
	<b>100</b>	2,00	2,46	2,92	3,51	5,02
	<b>200</b>	1,97	2,42	2,85	3,41	4,81
	<b>1000</b>	1,95	2,38	2,80	3,34	4,65



## A.9 Continuação

<i>g.l.1</i>	<i>g.l.2</i>	<b>0,1</b>	<b>0,05</b>	<b>0,025</b>	<b>0,01</b>	<b>0,001</b>
<b>5</b>	<b>1</b>	57,24	230,16	921,83	5763,96	576496,12
	<b>2</b>	9,29	19,30	39,30	99,30	999,31
	<b>3</b>	5,31	9,01	14,88	28,24	134,58
	<b>4</b>	4,05	6,26	9,36	15,52	51,72
	<b>5</b>	3,45	5,05	7,15	10,97	29,75
	<b>6</b>	3,11	4,39	5,99	8,75	20,80
	<b>7</b>	2,88	3,97	5,29	7,46	16,21
	<b>8</b>	2,73	3,69	4,82	6,63	13,48
	<b>9</b>	2,61	3,48	4,48	6,06	11,71
	<b>10</b>	2,52	3,33	4,24	5,64	10,48
	<b>11</b>	2,45	3,20	4,04	5,32	9,58
	<b>12</b>	2,39	3,11	3,89	5,06	8,89
	<b>13</b>	2,35	3,03	3,77	4,86	8,35
	<b>14</b>	2,31	2,96	3,66	4,69	7,92
	<b>15</b>	2,27	2,90	3,58	4,56	7,57
	<b>16</b>	2,24	2,85	3,50	4,44	7,27
	<b>17</b>	2,22	2,81	3,44	4,34	7,02
	<b>18</b>	2,20	2,77	3,38	4,25	6,81
	<b>19</b>	2,18	2,74	3,33	4,17	6,62
	<b>20</b>	2,16	2,71	3,29	4,10	6,46
	<b>21</b>	2,14	2,68	3,25	4,04	6,32
	<b>22</b>	2,13	2,66	3,22	3,99	6,19
	<b>23</b>	2,11	2,64	3,18	3,94	6,08
	<b>24</b>	2,10	2,62	3,15	3,90	5,98
	<b>25</b>	2,09	2,60	3,13	3,85	5,89
	<b>26</b>	2,08	2,59	3,10	3,82	5,80
	<b>27</b>	2,07	2,57	3,08	3,78	5,73
	<b>28</b>	2,06	2,56	3,06	3,75	5,66
	<b>29</b>	2,06	2,55	3,04	3,73	5,59
	<b>30</b>	2,05	2,53	3,03	3,70	5,53
	<b>40</b>	2,00	2,45	2,90	3,51	5,13
	<b>50</b>	1,97	2,40	2,83	3,41	4,90
	<b>60</b>	1,95	2,37	2,79	3,34	4,76
	<b>100</b>	1,91	2,31	2,70	3,21	4,48
	<b>200</b>	1,88	2,26	2,63	3,11	4,29
	<b>1000</b>	1,85	2,22	2,58	3,04	4,14

## A.9 Continuação

<i>g.l.1</i>	<i>g.l.2</i>	<b>0,1</b>	<b>0,05</b>	<b>0,025</b>	<b>0,01</b>	<b>0,001</b>
<b>6</b>	<b>1</b>	58,20	233,99	937,11	5858,95	586032,87
	<b>2</b>	9,33	19,33	39,33	99,33	999,31
	<b>3</b>	5,28	8,94	14,73	27,91	132,83
	<b>4</b>	4,01	6,16	9,20	15,21	50,52
	<b>5</b>	3,40	4,95	6,98	10,67	28,83
	<b>6</b>	3,05	4,28	5,82	8,47	20,03
	<b>7</b>	2,83	3,87	5,12	7,19	15,52
	<b>8</b>	2,67	3,58	4,65	6,37	12,86
	<b>9</b>	2,55	3,37	4,32	5,80	11,13
	<b>10</b>	2,46	3,22	4,07	5,39	9,93
	<b>11</b>	2,39	3,09	3,88	5,07	9,05
	<b>12</b>	2,33	3,00	3,73	4,82	8,38
	<b>13</b>	2,28	2,92	3,60	4,62	7,86
	<b>14</b>	2,24	2,85	3,50	4,46	7,44
	<b>15</b>	2,21	2,79	3,41	4,32	7,09
	<b>16</b>	2,18	2,74	3,34	4,20	6,80
	<b>17</b>	2,15	2,70	3,28	4,10	6,56
	<b>18</b>	2,13	2,66	3,22	4,01	6,35
	<b>19</b>	2,11	2,63	3,17	3,94	6,18
	<b>20</b>	2,09	2,60	3,13	3,87	6,02
	<b>21</b>	2,08	2,57	3,09	3,81	5,88
	<b>22</b>	2,06	2,55	3,05	3,76	5,76
	<b>23</b>	2,05	2,53	3,02	3,71	5,65
	<b>24</b>	2,04	2,51	2,99	3,67	5,55
	<b>25</b>	2,02	2,49	2,97	3,63	5,46
	<b>26</b>	2,01	2,47	2,94	3,59	5,38
	<b>27</b>	2,00	2,46	2,92	3,56	5,31
	<b>28</b>	2,00	2,45	2,90	3,53	5,24
	<b>29</b>	1,99	2,43	2,88	3,50	5,18
	<b>30</b>	1,98	2,42	2,87	3,47	5,12
	<b>40</b>	1,93	2,34	2,74	3,29	4,73
	<b>50</b>	1,90	2,29	2,67	3,19	4,51
	<b>60</b>	1,87	2,25	2,63	3,12	4,37
	<b>100</b>	1,83	2,19	2,54	2,99	4,11
	<b>200</b>	1,80	2,14	2,47	2,89	3,92
	<b>1000</b>	1,78	2,11	2,42	2,82	3,78

## A.9 Continuação

<i>g.l.1</i>	<i>g.l.2</i>	<b>0,1</b>	<b>0,05</b>	<b>0,025</b>	<b>0,01</b>	<b>0,001</b>
<b>7</b>	<b>1</b>	58,91	236,77	948,20	5928,33	593185,42
	<b>2</b>	9,35	19,35	39,36	99,36	999,31
	<b>3</b>	5,27	8,89	14,62	27,67	131,61
	<b>4</b>	3,98	6,09	9,07	14,98	49,65
	<b>5</b>	3,37	4,88	6,85	10,46	28,17
	<b>6</b>	3,01	4,21	5,70	8,26	19,46
	<b>7</b>	2,78	3,79	4,99	6,99	15,02
	<b>8</b>	2,62	3,50	4,53	6,18	12,40
	<b>9</b>	2,51	3,29	4,20	5,61	10,70
	<b>10</b>	2,41	3,14	3,95	5,20	9,52
	<b>11</b>	2,34	3,01	3,76	4,89	8,65
	<b>12</b>	2,28	2,91	3,61	4,64	8,00
	<b>13</b>	2,23	2,83	3,48	4,44	7,49
	<b>14</b>	2,19	2,76	3,38	4,28	7,08
	<b>15</b>	2,16	2,71	3,29	4,14	6,74
	<b>16</b>	2,13	2,66	3,22	4,03	6,46
	<b>17</b>	2,10	2,61	3,16	3,93	6,22
	<b>18</b>	2,08	2,58	3,10	3,84	6,02
	<b>19</b>	2,06	2,54	3,05	3,77	5,85
	<b>20</b>	2,04	2,51	3,01	3,70	5,69
	<b>21</b>	2,02	2,49	2,97	3,64	5,56
	<b>22</b>	2,01	2,46	2,93	3,59	5,44
	<b>23</b>	1,99	2,44	2,90	3,54	5,33
	<b>24</b>	1,98	2,42	2,87	3,50	5,24
	<b>25</b>	1,97	2,40	2,85	3,46	5,15
	<b>26</b>	1,96	2,39	2,82	3,42	5,07
	<b>27</b>	1,95	2,37	2,80	3,39	5,00
	<b>28</b>	1,94	2,36	2,78	3,36	4,93
	<b>29</b>	1,93	2,35	2,76	3,33	4,87
	<b>30</b>	1,93	2,33	2,75	3,30	4,82
	<b>40</b>	1,87	2,25	2,62	3,12	4,44
	<b>50</b>	1,84	2,20	2,55	3,02	4,22
	<b>60</b>	1,82	2,17	2,51	2,95	4,09
	<b>100</b>	1,78	2,10	2,42	2,82	3,83
	<b>200</b>	1,75	2,06	2,35	2,73	3,65
	<b>1000</b>	1,72	2,02	2,30	2,66	3,51

## A.9 Continuação

<i>g.l.1</i>	<i>g.l.2</i>	<b>0,1</b>	<b>0,05</b>	<b>0,025</b>	<b>0,01</b>	<b>0,001</b>
<b>8</b>	<b>1</b>	59,44	238,88	956,64	5980,95	597953,80
	<b>2</b>	9,37	19,37	39,37	99,38	999,31
	<b>3</b>	5,25	8,85	14,54	27,49	130,62
	<b>4</b>	3,95	6,04	8,98	14,80	49,00
	<b>5</b>	3,34	4,82	6,76	10,29	27,65
	<b>6</b>	2,98	4,15	5,60	8,10	19,03
	<b>7</b>	2,75	3,73	4,90	6,84	14,63
	<b>8</b>	2,59	3,44	4,43	6,03	12,05
	<b>9</b>	2,47	3,23	4,10	5,47	10,37
	<b>10</b>	2,38	3,07	3,85	5,06	9,20
	<b>11</b>	2,30	2,95	3,66	4,74	8,35
	<b>12</b>	2,24	2,85	3,51	4,50	7,71
	<b>13</b>	2,20	2,77	3,39	4,30	7,21
	<b>14</b>	2,15	2,70	3,29	4,14	6,80
	<b>15</b>	2,12	2,64	3,20	4,00	6,47
	<b>16</b>	2,09	2,59	3,12	3,89	6,20
	<b>17</b>	2,06	2,55	3,06	3,79	5,96
	<b>18</b>	2,04	2,51	3,01	3,71	5,76
	<b>19</b>	2,02	2,48	2,96	3,63	5,59
	<b>20</b>	2,00	2,45	2,91	3,56	5,44
	<b>21</b>	1,98	2,42	2,87	3,51	5,31
	<b>22</b>	1,97	2,40	2,84	3,45	5,19
	<b>23</b>	1,95	2,37	2,81	3,41	5,09
	<b>24</b>	1,94	2,36	2,78	3,36	4,99
	<b>25</b>	1,93	2,34	2,75	3,32	4,91
	<b>26</b>	1,92	2,32	2,73	3,29	4,83
	<b>27</b>	1,91	2,31	2,71	3,26	4,76
	<b>28</b>	1,90	2,29	2,69	3,23	4,69
	<b>29</b>	1,89	2,28	2,67	3,20	4,64
	<b>30</b>	1,88	2,27	2,65	3,17	4,58
	<b>40</b>	1,83	2,18	2,53	2,99	4,21
	<b>50</b>	1,80	2,13	2,46	2,89	4,00
	<b>60</b>	1,77	2,10	2,41	2,82	3,86
	<b>100</b>	1,73	2,03	2,32	2,69	3,61
	<b>200</b>	1,70	1,98	2,26	2,60	3,43
	<b>1000</b>	1,68	1,95	2,20	2,53	3,30

## A.9 Continuação

<i>g.l.1</i>	<i>g.l.2</i>	<b>0,1</b>	<b>0,05</b>	<b>0,025</b>	<b>0,01</b>	<b>0,001</b>
<b>9</b>	<b>1</b>	59,86	240,54	963,28	6022,40	602245,33
	<b>2</b>	9,38	19,38	39,39	99,39	999,31
	<b>3</b>	5,24	8,81	14,47	27,34	129,86
	<b>4</b>	3,94	6,00	8,90	14,66	48,47
	<b>5</b>	3,32	4,77	6,68	10,16	27,24
	<b>6</b>	2,96	4,10	5,52	7,98	18,69
	<b>7</b>	2,72	3,68	4,82	6,72	14,33
	<b>8</b>	2,56	3,39	4,36	5,91	11,77
	<b>9</b>	2,44	3,18	4,03	5,35	10,11
	<b>10</b>	2,35	3,02	3,78	4,94	8,96
	<b>11</b>	2,27	2,90	3,59	4,63	8,12
	<b>12</b>	2,21	2,80	3,44	4,39	7,48
	<b>13</b>	2,16	2,71	3,31	4,19	6,98
	<b>14</b>	2,12	2,65	3,21	4,03	6,58
	<b>15</b>	2,09	2,59	3,12	3,89	6,26
	<b>16</b>	2,06	2,54	3,05	3,78	5,98
	<b>17</b>	2,03	2,49	2,98	3,68	5,75
	<b>18</b>	2,00	2,46	2,93	3,60	5,56
	<b>19</b>	1,98	2,42	2,88	3,52	5,39
	<b>20</b>	1,96	2,39	2,84	3,46	5,24
	<b>21</b>	1,95	2,37	2,80	3,40	5,11
	<b>22</b>	1,93	2,34	2,76	3,35	4,99
	<b>23</b>	1,92	2,32	2,73	3,30	4,89
	<b>24</b>	1,91	2,30	2,70	3,26	4,80
	<b>25</b>	1,89	2,28	2,68	3,22	4,71
	<b>26</b>	1,88	2,27	2,65	3,18	4,64
	<b>27</b>	1,87	2,25	2,63	3,15	4,57
	<b>28</b>	1,87	2,24	2,61	3,12	4,50
	<b>29</b>	1,86	2,22	2,59	3,09	4,45
	<b>30</b>	1,85	2,21	2,57	3,07	4,39
	<b>40</b>	1,79	2,12	2,45	2,89	4,02
	<b>50</b>	1,76	2,07	2,38	2,78	3,82
	<b>60</b>	1,74	2,04	2,33	2,72	3,69
	<b>100</b>	1,69	1,97	2,24	2,59	3,44
	<b>200</b>	1,66	1,93	2,18	2,50	3,26
	<b>1000</b>	1,64	1,89	2,13	2,43	3,13

## A.9 Continuação

<i>g.l.1</i>	<i>g.l.2</i>	<b>0,1</b>	<b>0,05</b>	<b>0,025</b>	<b>0,01</b>	<b>0,001</b>
<b>10</b>	<b>1</b>	60,19	241,88	968,63	6055,93	605583,19
	<b>2</b>	9,39	19,40	39,40	99,40	999,31
	<b>3</b>	5,23	8,79	14,42	27,23	129,22
	<b>4</b>	3,92	5,96	8,84	14,55	48,05
	<b>5</b>	3,30	4,74	6,62	10,05	26,91
	<b>6</b>	2,94	4,06	5,46	7,87	18,41
	<b>7</b>	2,70	3,64	4,76	6,62	14,08
	<b>8</b>	2,54	3,35	4,30	5,81	11,54
	<b>9</b>	2,42	3,14	3,96	5,26	9,89
	<b>10</b>	2,32	2,98	3,72	4,85	8,75
	<b>11</b>	2,25	2,85	3,53	4,54	7,92
	<b>12</b>	2,19	2,75	3,37	4,30	7,29
	<b>13</b>	2,14	2,67	3,25	4,10	6,80
	<b>14</b>	2,10	2,60	3,15	3,94	6,40
	<b>15</b>	2,06	2,54	3,06	3,80	6,08
	<b>16</b>	2,03	2,49	2,99	3,69	5,81
	<b>17</b>	2,00	2,45	2,92	3,59	5,58
	<b>18</b>	1,98	2,41	2,87	3,51	5,39
	<b>19</b>	1,96	2,38	2,82	3,43	5,22
	<b>20</b>	1,94	2,35	2,77	3,37	5,08
	<b>21</b>	1,92	2,32	2,73	3,31	4,95
	<b>22</b>	1,90	2,30	2,70	3,26	4,83
	<b>23</b>	1,89	2,27	2,67	3,21	4,73
	<b>24</b>	1,88	2,25	2,64	3,17	4,64
	<b>25</b>	1,87	2,24	2,61	3,13	4,56
	<b>26</b>	1,86	2,22	2,59	3,09	4,48
	<b>27</b>	1,85	2,20	2,57	3,06	4,41
	<b>28</b>	1,84	2,19	2,55	3,03	4,35
	<b>29</b>	1,83	2,18	2,53	3,00	4,29
	<b>30</b>	1,82	2,16	2,51	2,98	4,24
	<b>40</b>	1,76	2,08	2,39	2,80	3,87
	<b>50</b>	1,73	2,03	2,32	2,70	3,67
	<b>60</b>	1,71	1,99	2,27	2,63	3,54
	<b>100</b>	1,66	1,93	2,18	2,50	3,30
	<b>200</b>	1,63	1,88	2,11	2,41	3,12
	<b>1000</b>	1,61	1,84	2,06	2,34	2,99

## A.9 Continuação

<i>g.l.1</i>	<i>g.l.2</i>	<b>0,1</b>	<b>0,05</b>	<b>0,025</b>	<b>0,01</b>	<b>0,001</b>
<b>12</b>	<b>1</b>	60,71	243,90	976,72	6106,68	610351,56
	<b>2</b>	9,41	19,41	39,41	99,42	999,31
	<b>3</b>	5,22	8,74	14,34	27,05	128,32
	<b>4</b>	3,90	5,91	8,75	14,37	47,41
	<b>5</b>	3,27	4,68	6,52	9,89	26,42
	<b>6</b>	2,90	4,00	5,37	7,72	17,99
	<b>7</b>	2,67	3,57	4,67	6,47	13,71
	<b>8</b>	2,50	3,28	4,20	5,67	11,19
	<b>9</b>	2,38	3,07	3,87	5,11	9,57
	<b>10</b>	2,28	2,91	3,62	4,71	8,45
	<b>11</b>	2,21	2,79	3,43	4,40	7,63
	<b>12</b>	2,15	2,69	3,28	4,16	7,00
	<b>13</b>	2,10	2,60	3,15	3,96	6,52
	<b>14</b>	2,05	2,53	3,05	3,80	6,13
	<b>15</b>	2,02	2,48	2,96	3,67	5,81
	<b>16</b>	1,99	2,42	2,89	3,55	5,55
	<b>17</b>	1,96	2,38	2,82	3,46	5,32
	<b>18</b>	1,93	2,34	2,77	3,37	5,13
	<b>19</b>	1,91	2,31	2,72	3,30	4,97
	<b>20</b>	1,89	2,28	2,68	3,23	4,82
	<b>21</b>	1,87	2,25	2,64	3,17	4,70
	<b>22</b>	1,86	2,23	2,60	3,12	4,58
	<b>23</b>	1,84	2,20	2,57	3,07	4,48
	<b>24</b>	1,83	2,18	2,54	3,03	4,39
	<b>25</b>	1,82	2,16	2,51	2,99	4,31
	<b>26</b>	1,81	2,15	2,49	2,96	4,24
	<b>27</b>	1,80	2,13	2,47	2,93	4,17
	<b>28</b>	1,79	2,12	2,45	2,90	4,11
	<b>29</b>	1,78	2,10	2,43	2,87	4,05
	<b>30</b>	1,77	2,09	2,41	2,84	4,00
	<b>40</b>	1,71	2,00	2,29	2,66	3,64
	<b>50</b>	1,68	1,95	2,22	2,56	3,44
	<b>60</b>	1,66	1,92	2,17	2,50	3,32
	<b>100</b>	1,61	1,85	2,08	2,37	3,07
	<b>200</b>	1,58	1,80	2,01	2,27	2,90
	<b>1000</b>	1,55	1,76	1,96	2,20	2,77

## A.9 Continuação

<i>g.l.1</i>	<i>g.l.2</i>	<b>0,1</b>	<b>0,05</b>	<b>0,025</b>	<b>0,01</b>	<b>0,001</b>
<b>15</b>	<b>1</b>	61,22	245,95	984,87	6156,97	616073,61
	<b>2</b>	9,42	19,43	39,43	99,43	999,31
	<b>3</b>	5,20	8,70	14,25	26,87	127,36
	<b>4</b>	3,87	5,86	8,66	14,20	46,76
	<b>5</b>	3,24	4,62	6,43	9,72	25,91
	<b>6</b>	2,87	3,94	5,27	7,56	17,56
	<b>7</b>	2,63	3,51	4,57	6,31	13,32
	<b>8</b>	2,46	3,22	4,10	5,52	10,84
	<b>9</b>	2,34	3,01	3,77	4,96	9,24
	<b>10</b>	2,24	2,85	3,52	4,56	8,13
	<b>11</b>	2,17	2,72	3,33	4,25	7,32
	<b>12</b>	2,10	2,62	3,18	4,01	6,71
	<b>13</b>	2,05	2,53	3,05	3,82	6,23
	<b>14</b>	2,01	2,46	2,95	3,66	5,85
	<b>15</b>	1,97	2,40	2,86	3,52	5,54
	<b>16</b>	1,94	2,35	2,79	3,41	5,27
	<b>17</b>	1,91	2,31	2,72	3,31	5,05
	<b>18</b>	1,89	2,27	2,67	3,23	4,87
	<b>19</b>	1,86	2,23	2,62	3,15	4,70
	<b>20</b>	1,84	2,20	2,57	3,09	4,56
	<b>21</b>	1,83	2,18	2,53	3,03	4,44
	<b>22</b>	1,81	2,15	2,50	2,98	4,33
	<b>23</b>	1,80	2,13	2,47	2,93	4,23
	<b>24</b>	1,78	2,11	2,44	2,89	4,14
	<b>25</b>	1,77	2,09	2,41	2,85	4,06
	<b>26</b>	1,76	2,07	2,39	2,81	3,99
	<b>27</b>	1,75	2,06	2,36	2,78	3,92
	<b>28</b>	1,74	2,04	2,34	2,75	3,86
	<b>29</b>	1,73	2,03	2,32	2,73	3,80
	<b>30</b>	1,72	2,01	2,31	2,70	3,75
	<b>40</b>	1,66	1,92	2,18	2,52	3,40
	<b>50</b>	1,63	1,87	2,11	2,42	3,20
	<b>60</b>	1,60	1,84	2,06	2,35	3,08
	<b>100</b>	1,56	1,77	1,97	2,22	2,84
	<b>200</b>	1,52	1,72	1,90	2,13	2,67
	<b>1000</b>	1,49	1,68	1,85	2,06	2,54



## A.9 Continuação

<i>g.l.1</i>	<i>g.l.2</i>	<b>0,1</b>	<b>0,05</b>	<b>0,025</b>	<b>0,01</b>	<b>0,001</b>
<b>20</b>	<b>1</b>	61,74	248,02	993,08	6208,66	620841,98
	<b>2</b>	9,44	19,45	39,45	99,45	999,31
	<b>3</b>	5,18	8,66	14,17	26,69	126,43
	<b>4</b>	3,84	5,80	8,56	14,02	46,10
	<b>5</b>	3,21	4,56	6,33	9,55	25,39
	<b>6</b>	2,84	3,87	5,17	7,40	17,12
	<b>7</b>	2,59	3,44	4,47	6,16	12,93
	<b>8</b>	2,42	3,15	4,00	5,36	10,48
	<b>9</b>	2,30	2,94	3,67	4,81	8,90
	<b>10</b>	2,20	2,77	3,42	4,41	7,80
	<b>11</b>	2,12	2,65	3,23	4,10	7,01
	<b>12</b>	2,06	2,54	3,07	3,86	6,40
	<b>13</b>	2,01	2,46	2,95	3,66	5,93
	<b>14</b>	1,96	2,39	2,84	3,51	5,56
	<b>15</b>	1,92	2,33	2,76	3,37	5,25
	<b>16</b>	1,89	2,28	2,68	3,26	4,99
	<b>17</b>	1,86	2,23	2,62	3,16	4,78
	<b>18</b>	1,84	2,19	2,56	3,08	4,59
	<b>19</b>	1,81	2,16	2,51	3,00	4,43
	<b>20</b>	1,79	2,12	2,46	2,94	4,29
	<b>21</b>	1,78	2,10	2,42	2,88	4,17
	<b>22</b>	1,76	2,07	2,39	2,83	4,06
	<b>23</b>	1,74	2,05	2,36	2,78	3,96
	<b>24</b>	1,73	2,03	2,33	2,74	3,87
	<b>25</b>	1,72	2,01	2,30	2,70	3,79
	<b>26</b>	1,71	1,99	2,28	2,66	3,72
	<b>27</b>	1,70	1,97	2,25	2,63	3,66
	<b>28</b>	1,69	1,96	2,23	2,60	3,60
	<b>29</b>	1,68	1,94	2,21	2,57	3,54
	<b>30</b>	1,67	1,93	2,20	2,55	3,49
	<b>40</b>	1,61	1,84	2,07	2,37	3,15
	<b>50</b>	1,57	1,78	1,99	2,27	2,95
	<b>60</b>	1,54	1,75	1,94	2,20	2,83
	<b>100</b>	1,49	1,68	1,85	2,07	2,59
	<b>200</b>	1,46	1,62	1,78	1,97	2,42
	<b>1000</b>	1,43	1,58	1,72	1,90	2,30

## A.9 Continuação

<i>g.l.1</i>	<i>g.l.2</i>	<b>0,1</b>	<b>0,05</b>	<b>0,025</b>	<b>0,01</b>	<b>0,001</b>
<b>25</b>	<b>1</b>	62,05	249,26	998,09	6239,86	623703,00
	<b>2</b>	9,45	19,46	39,46	99,46	999,31
	<b>3</b>	5,17	8,63	14,12	26,58	125,84
	<b>4</b>	3,83	5,77	8,50	13,91	45,69
	<b>5</b>	3,19	4,52	6,27	9,45	25,08
	<b>6</b>	2,81	3,83	5,11	7,30	16,85
	<b>7</b>	2,57	3,40	4,40	6,06	12,69
	<b>8</b>	2,40	3,11	3,94	5,26	10,26
	<b>9</b>	2,27	2,89	3,60	4,71	8,69
	<b>10</b>	2,17	2,73	3,35	4,31	7,60
	<b>11</b>	2,10	2,60	3,16	4,01	6,81
	<b>12</b>	2,03	2,50	3,01	3,76	6,22
	<b>13</b>	1,98	2,41	2,88	3,57	5,75
	<b>14</b>	1,93	2,34	2,78	3,41	5,38
	<b>15</b>	1,89	2,28	2,69	3,28	5,07
	<b>16</b>	1,86	2,23	2,61	3,16	4,82
	<b>17</b>	1,83	2,18	2,55	3,07	4,60
	<b>18</b>	1,80	2,14	2,49	2,98	4,42
	<b>19</b>	1,78	2,11	2,44	2,91	4,26
	<b>20</b>	1,76	2,07	2,40	2,84	4,12
	<b>21</b>	1,74	2,05	2,36	2,79	4,00
	<b>22</b>	1,73	2,02	2,32	2,73	3,89
	<b>23</b>	1,71	2,00	2,29	2,69	3,79
	<b>24</b>	1,70	1,97	2,26	2,64	3,71
	<b>25</b>	1,68	1,96	2,23	2,60	3,63
	<b>26</b>	1,67	1,94	2,21	2,57	3,56
	<b>27</b>	1,66	1,92	2,18	2,54	3,49
	<b>28</b>	1,65	1,91	2,16	2,51	3,43
	<b>29</b>	1,64	1,89	2,14	2,48	3,38
	<b>30</b>	1,63	1,88	2,12	2,45	3,33
	<b>40</b>	1,57	1,78	1,99	2,27	2,98
	<b>50</b>	1,53	1,73	1,92	2,17	2,79
	<b>60</b>	1,50	1,69	1,87	2,10	2,67
	<b>100</b>	1,45	1,62	1,77	1,97	2,43
	<b>200</b>	1,41	1,56	1,70	1,87	2,26
	<b>1000</b>	1,38	1,52	1,64	1,79	2,14

## A.9 Continuação

<i>g.l.1</i>	<i>g.l.2</i>	<b>0,1</b>	<b>0,05</b>	<b>0,025</b>	<b>0,01</b>	<b>0,001</b>
<b>30</b>	<b>1</b>	62,26	250,10	1001,40	6260,35	626087,19
	<b>2</b>	9,46	19,46	39,46	99,47	999,31
	<b>3</b>	5,17	8,62	14,08	26,50	125,44
	<b>4</b>	3,82	5,75	8,46	13,84	45,43
	<b>5</b>	3,17	4,50	6,23	9,38	24,87
	<b>6</b>	2,80	3,81	5,07	7,23	16,67
	<b>7</b>	2,56	3,38	4,36	5,99	12,53
	<b>8</b>	2,38	3,08	3,89	5,20	10,11
	<b>9</b>	2,25	2,86	3,56	4,65	8,55
	<b>10</b>	2,16	2,70	3,31	4,25	7,47
	<b>11</b>	2,08	2,57	3,12	3,94	6,68
	<b>12</b>	2,01	2,47	2,96	3,70	6,09
	<b>13</b>	1,96	2,38	2,84	3,51	5,63
	<b>14</b>	1,91	2,31	2,73	3,35	5,25
	<b>15</b>	1,87	2,25	2,64	3,21	4,95
	<b>16</b>	1,84	2,19	2,57	3,10	4,70
	<b>17</b>	1,81	2,15	2,50	3,00	4,48
	<b>18</b>	1,78	2,11	2,44	2,92	4,30
	<b>19</b>	1,76	2,07	2,39	2,84	4,14
	<b>20</b>	1,74	2,04	2,35	2,78	4,00
	<b>21</b>	1,72	2,01	2,31	2,72	3,88
	<b>22</b>	1,70	1,98	2,27	2,67	3,78
	<b>23</b>	1,69	1,96	2,24	2,62	3,68
	<b>24</b>	1,67	1,94	2,21	2,58	3,59
	<b>25</b>	1,66	1,92	2,18	2,54	3,52
	<b>26</b>	1,65	1,90	2,16	2,50	3,44
	<b>27</b>	1,64	1,88	2,13	2,47	3,38
	<b>28</b>	1,63	1,87	2,11	2,44	3,32
	<b>29</b>	1,62	1,85	2,09	2,41	3,27
	<b>30</b>	1,61	1,84	2,07	2,39	3,22
	<b>40</b>	1,54	1,74	1,94	2,20	2,87
	<b>50</b>	1,50	1,69	1,87	2,10	2,68
	<b>60</b>	1,48	1,65	1,82	2,03	2,55
	<b>100</b>	1,42	1,57	1,71	1,89	2,32
	<b>200</b>	1,38	1,52	1,64	1,79	2,15
	<b>1000</b>	1,35	1,47	1,58	1,72	2,02

## A.9 Continuação

<i>g.l.1</i>	<i>g.l.2</i>	<b>0,1</b>	<b>0,05</b>	<b>0,025</b>	<b>0,01</b>	<b>0,001</b>
<b>40</b>	<b>1</b>	62,53	251,14	1005,60	6286,43	628471,37
	<b>2</b>	9,47	19,47	39,47	99,48	999,31
	<b>3</b>	5,16	8,59	14,04	26,41	124,97
	<b>4</b>	3,80	5,72	8,41	13,75	45,08
	<b>5</b>	3,16	4,46	6,18	9,29	24,60
	<b>6</b>	2,78	3,77	5,01	7,14	16,44
	<b>7</b>	2,54	3,34	4,31	5,91	12,33
	<b>8</b>	2,36	3,04	3,84	5,12	9,92
	<b>9</b>	2,23	2,83	3,51	4,57	8,37
	<b>10</b>	2,13	2,66	3,26	4,17	7,30
	<b>11</b>	2,05	2,53	3,06	3,86	6,52
	<b>12</b>	1,99	2,43	2,91	3,62	5,93
	<b>13</b>	1,93	2,34	2,78	3,43	5,47
	<b>14</b>	1,89	2,27	2,67	3,27	5,10
	<b>15</b>	1,85	2,20	2,59	3,13	4,80
	<b>16</b>	1,81	2,15	2,51	3,02	4,54
	<b>17</b>	1,78	2,10	2,44	2,92	4,33
	<b>18</b>	1,75	2,06	2,38	2,84	4,15
	<b>19</b>	1,73	2,03	2,33	2,76	3,99
	<b>20</b>	1,71	1,99	2,29	2,69	3,86
	<b>21</b>	1,69	1,96	2,25	2,64	3,74
	<b>22</b>	1,67	1,94	2,21	2,58	3,63
	<b>23</b>	1,66	1,91	2,18	2,54	3,53
	<b>24</b>	1,64	1,89	2,15	2,49	3,45
	<b>25</b>	1,63	1,87	2,12	2,45	3,37
	<b>26</b>	1,61	1,85	2,09	2,42	3,30
	<b>27</b>	1,60	1,84	2,07	2,38	3,23
	<b>28</b>	1,59	1,82	2,05	2,35	3,18
	<b>29</b>	1,58	1,81	2,03	2,33	3,12
	<b>30</b>	1,57	1,79	2,01	2,30	3,07
	<b>40</b>	1,51	1,69	1,88	2,11	2,73
	<b>50</b>	1,46	1,63	1,80	2,01	2,53
	<b>60</b>	1,44	1,59	1,74	1,94	2,41
	<b>100</b>	1,38	1,52	1,64	1,80	2,17
	<b>200</b>	1,34	1,46	1,56	1,69	2,00
	<b>1000</b>	1,30	1,41	1,50	1,61	1,87

## A.9 Continuação

<i>g.l.1</i>	<i>g.l.2</i>	<b>0,1</b>	<b>0,05</b>	<b>0,025</b>	<b>0,01</b>	<b>0,001</b>
<b>50</b>	<b>1</b>	62,69	251,77	1008,10	6302,26	630378,72
	<b>2</b>	9,47	19,48	39,48	99,48	999,31
	<b>3</b>	5,15	8,58	14,01	26,35	124,68
	<b>4</b>	3,80	5,70	8,38	13,69	44,88
	<b>5</b>	3,15	4,44	6,14	9,24	24,44
	<b>6</b>	2,77	3,75	4,98	7,09	16,31
	<b>7</b>	2,52	3,32	4,28	5,86	12,20
	<b>8</b>	2,35	3,02	3,81	5,07	9,80
	<b>9</b>	2,22	2,80	3,47	4,52	8,26
	<b>10</b>	2,12	2,64	3,22	4,12	7,19
	<b>11</b>	2,04	2,51	3,03	3,81	6,42
	<b>12</b>	1,97	2,40	2,87	3,57	5,83
	<b>13</b>	1,92	2,31	2,74	3,38	5,37
	<b>14</b>	1,87	2,24	2,64	3,22	5,00
	<b>15</b>	1,83	2,18	2,55	3,08	4,70
	<b>16</b>	1,79	2,12	2,47	2,97	4,45
	<b>17</b>	1,76	2,08	2,41	2,87	4,24
	<b>18</b>	1,74	2,04	2,35	2,78	4,06
	<b>19</b>	1,71	2,00	2,30	2,71	3,90
	<b>20</b>	1,69	1,97	2,25	2,64	3,77
	<b>21</b>	1,67	1,94	2,21	2,58	3,64
	<b>22</b>	1,65	1,91	2,17	2,53	3,54
	<b>23</b>	1,64	1,88	2,14	2,48	3,44
	<b>24</b>	1,62	1,86	2,11	2,44	3,36
	<b>25</b>	1,61	1,84	2,08	2,40	3,28
	<b>26</b>	1,59	1,82	2,05	2,36	3,21
	<b>27</b>	1,58	1,81	2,03	2,33	3,14
	<b>28</b>	1,57	1,79	2,01	2,30	3,09
	<b>29</b>	1,56	1,77	1,99	2,27	3,03
	<b>30</b>	1,55	1,76	1,97	2,25	2,98
	<b>40</b>	1,48	1,66	1,83	2,06	2,64
	<b>50</b>	1,44	1,60	1,75	1,95	2,44
	<b>60</b>	1,41	1,56	1,70	1,88	2,32
	<b>100</b>	1,35	1,48	1,59	1,74	2,08
	<b>200</b>	1,31	1,41	1,51	1,63	1,90
	<b>1000</b>	1,27	1,36	1,45	1,54	1,77

## A.9 Continuação

<i>g.l.1</i>	<i>g.l.2</i>	<b>0,1</b>	<b>0,05</b>	<b>0,025</b>	<b>0,01</b>	<b>0,001</b>
<b>60</b>	<b>1</b>	62,79	252,20	1009,79	6312,97	631332,40
	<b>2</b>	9,47	19,48	39,48	99,48	999,31
	<b>3</b>	5,15	8,57	13,99	26,32	124,45
	<b>4</b>	3,79	5,69	8,36	13,65	44,75
	<b>5</b>	3,14	4,43	6,12	9,20	24,33
	<b>6</b>	2,76	3,74	4,96	7,06	16,21
	<b>7</b>	2,51	3,30	4,25	5,82	12,12
	<b>8</b>	2,34	3,01	3,78	5,03	9,73
	<b>9</b>	2,21	2,79	3,45	4,48	8,19
	<b>10</b>	2,11	2,62	3,20	4,08	7,12
	<b>11</b>	2,03	2,49	3,00	3,78	6,35
	<b>12</b>	1,96	2,38	2,85	3,54	5,76
	<b>13</b>	1,90	2,30	2,72	3,34	5,30
	<b>14</b>	1,86	2,22	2,61	3,18	4,94
	<b>15</b>	1,82	2,16	2,52	3,05	4,64
	<b>16</b>	1,78	2,11	2,45	2,93	4,39
	<b>17</b>	1,75	2,06	2,38	2,83	4,18
	<b>18</b>	1,72	2,02	2,32	2,75	4,00
	<b>19</b>	1,70	1,98	2,27	2,67	3,84
	<b>20</b>	1,68	1,95	2,22	2,61	3,70
	<b>21</b>	1,66	1,92	2,18	2,55	3,58
	<b>22</b>	1,64	1,89	2,14	2,50	3,48
	<b>23</b>	1,62	1,86	2,11	2,45	3,38
	<b>24</b>	1,61	1,84	2,08	2,40	3,29
	<b>25</b>	1,59	1,82	2,05	2,36	3,22
	<b>26</b>	1,58	1,80	2,03	2,33	3,15
	<b>27</b>	1,57	1,79	2,00	2,29	3,08
	<b>28</b>	1,56	1,77	1,98	2,26	3,02
	<b>29</b>	1,55	1,75	1,96	2,23	2,97
	<b>30</b>	1,54	1,74	1,94	2,21	2,92
	<b>40</b>	1,47	1,64	1,80	2,02	2,57
	<b>50</b>	1,42	1,58	1,72	1,91	2,38
	<b>60</b>	1,40	1,53	1,67	1,84	2,25
	<b>100</b>	1,34	1,45	1,56	1,69	2,01
	<b>200</b>	1,29	1,39	1,47	1,58	1,83
	<b>1000</b>	1,25	1,33	1,41	1,50	1,69

## A.9 Continuação

<i>g.l.1</i>	<i>g.l.2</i>	<b>0,1</b>	<b>0,05</b>	<b>0,025</b>	<b>0,01</b>	<b>0,001</b>
<b>120</b>	<b>1</b>	63,06	253,25	1014,04	6339,51	634193,42
	<b>2</b>	9,48	19,49	39,49	99,49	999,31
	<b>3</b>	5,14	8,55	13,95	26,22	123,98
	<b>4</b>	3,78	5,66	8,31	13,56	44,40
	<b>5</b>	3,12	4,40	6,07	9,11	24,06
	<b>6</b>	2,74	3,70	4,90	6,97	15,98
	<b>7</b>	2,49	3,27	4,20	5,74	11,91
	<b>8</b>	2,32	2,97	3,73	4,95	9,53
	<b>9</b>	2,18	2,75	3,39	4,40	8,00
	<b>10</b>	2,08	2,58	3,14	4,00	6,94
	<b>11</b>	2,00	2,45	2,94	3,69	6,18
	<b>12</b>	1,93	2,34	2,79	3,45	5,59
	<b>13</b>	1,88	2,25	2,66	3,25	5,14
	<b>14</b>	1,83	2,18	2,55	3,09	4,77
	<b>15</b>	1,79	2,11	2,46	2,96	4,48
	<b>16</b>	1,75	2,06	2,38	2,84	4,23
	<b>17</b>	1,72	2,01	2,32	2,75	4,02
	<b>18</b>	1,69	1,97	2,26	2,66	3,84
	<b>19</b>	1,67	1,93	2,20	2,58	3,68
	<b>20</b>	1,64	1,90	2,16	2,52	3,54
	<b>21</b>	1,62	1,87	2,11	2,46	3,42
	<b>22</b>	1,60	1,84	2,08	2,40	3,32
	<b>23</b>	1,59	1,81	2,04	2,35	3,22
	<b>24</b>	1,57	1,79	2,01	2,31	3,14
	<b>25</b>	1,56	1,77	1,98	2,27	3,06
	<b>26</b>	1,54	1,75	1,95	2,23	2,99
	<b>27</b>	1,53	1,73	1,93	2,20	2,92
	<b>28</b>	1,52	1,71	1,91	2,17	2,86
	<b>29</b>	1,51	1,70	1,89	2,14	2,81
	<b>30</b>	1,50	1,68	1,87	2,11	2,76
	<b>40</b>	1,42	1,58	1,72	1,92	2,41
	<b>50</b>	1,38	1,51	1,64	1,80	2,21
	<b>60</b>	1,35	1,47	1,58	1,73	2,08
	<b>100</b>	1,28	1,38	1,46	1,57	1,83
	<b>200</b>	1,23	1,30	1,37	1,45	1,64
	<b>1000</b>	1,18	1,24	1,29	1,35	1,49

## A.9 Continuação

<i>g.l.1</i>	<i>g.l.2</i>	<b>0,1</b>	<b>0,05</b>	<b>0,025</b>	<b>0,01</b>	<b>0,001</b>
<b>1000</b>	<b>1</b>	63,30	254,19	1017,76	6362,80	636100,77
	<b>2</b>	9,49	19,49	39,50	99,50	999,31
	<b>3</b>	5,13	8,53	13,91	26,14	123,52
	<b>4</b>	3,76	5,63	8,26	13,47	44,09
	<b>5</b>	3,11	4,37	6,02	9,03	23,82
	<b>6</b>	2,72	3,67	4,86	6,89	15,77
	<b>7</b>	2,47	3,23	4,15	5,66	11,72
	<b>8</b>	2,30	2,93	3,68	4,87	9,36
	<b>9</b>	2,16	2,71	3,34	4,32	7,84
	<b>10</b>	2,06	2,54	3,09	3,92	6,78
	<b>11</b>	1,98	2,41	2,89	3,61	6,02
	<b>12</b>	1,91	2,30	2,73	3,37	5,44
	<b>13</b>	1,85	2,21	2,60	3,18	4,99
	<b>14</b>	1,80	2,14	2,50	3,02	4,62
	<b>15</b>	1,76	2,07	2,40	2,88	4,33
	<b>16</b>	1,72	2,02	2,32	2,76	4,08
	<b>17</b>	1,69	1,97	2,26	2,66	3,87
	<b>18</b>	1,66	1,92	2,20	2,58	3,69
	<b>19</b>	1,64	1,88	2,14	2,50	3,53
	<b>20</b>	1,61	1,85	2,09	2,43	3,40
	<b>21</b>	1,59	1,82	2,05	2,37	3,28
	<b>22</b>	1,57	1,79	2,01	2,32	3,17
	<b>23</b>	1,55	1,76	1,98	2,27	3,08
	<b>24</b>	1,54	1,74	1,94	2,22	2,99
	<b>25</b>	1,52	1,72	1,91	2,18	2,91
	<b>26</b>	1,51	1,70	1,89	2,14	2,84
	<b>27</b>	1,50	1,68	1,86	2,11	2,78
	<b>28</b>	1,48	1,66	1,84	2,08	2,72
	<b>29</b>	1,47	1,65	1,82	2,05	2,66
	<b>30</b>	1,46	1,63	1,80	2,02	2,61
	<b>40</b>	1,38	1,52	1,65	1,82	2,25
	<b>50</b>	1,33	1,45	1,56	1,70	2,05
	<b>60</b>	1,30	1,40	1,49	1,62	1,92
	<b>100</b>	1,22	1,30	1,36	1,45	1,64
	<b>200</b>	1,16	1,21	1,25	1,30	1,43
	<b>1000</b>	1,08	1,11	1,13	1,16	1,22



Tabela A.10: Estatística do teste de Kruskal-Wallis para pequenas amostras

Tamanho das Amostras	$W_{0.90}$	$W_{0.95}$	$W_{0.99}$
<b>2,2,2</b>	3,7143	4,5714	4,5714
<b>3,2,1</b>	3,8571	4,2857	4,2857
<b>3,2,2</b>	4,4643	4,5000	5,3571
<b>3,3,1</b>	4,0000	4,5714	5,1429
<b>3,3,2</b>	4,2500	5,1389	6,2500
<b>3,3,3</b>	4,6000	5,0667	6,4889
<b>4,2,1</b>	4,0179	4,8214	4,8214
<b>4,2,2</b>	4,1667	5,1250	6,0000
<b>4,3,1</b>	3,8889	5,0000	5,8333
<b>4,3,2</b>	4,4444	5,4000	6,3000
<b>4,3,3</b>	4,7000	5,7273	6,7091
<b>4,4,1</b>	4,0667	4,8667	6,1667
<b>4,4,2</b>	4,4455	5,2364	6,8727
<b>4,4,3</b>	4,7730	5,5758	7,1364
<b>4,4,4</b>	4,5000	5,6538	7,5385
<b>5,2,1</b>	4,0500	4,4500	5,2500
<b>5,2,2</b>	4,2933	5,0400	6,1333
<b>5,3,1</b>	3,8400	4,8711	6,4000
<b>5,3,2</b>	4,4946	5,1055	6,8218
<b>5,3,3</b>	4,4121	5,5152	6,9818
<b>5,4,1</b>	3,9600	4,8600	6,8400
<b>5,4,2</b>	4,5182	5,2682	7,1182
<b>5,4,3</b>	4,5231	5,6308	7,3949
<b>5,4,4</b>	4,6187	5,6176	7,7440
<b>5,5,1</b>	4,0364	4,9091	6,8364
<b>5,5,2</b>	4,5077	5,2462	7,2692
<b>5,5,3</b>	4,5363	5,6264	7,5429
<b>5,5,4</b>	4,5200	5,6429	7,7914
<b>5,5,5</b>	4,5000	5,6600	7,9800

Tabela A.11: Estatística do teste de Kolmogorov

<i>n</i>	<i>p</i> (Teste unilateral)				
	<b>0,900</b>	<b>0,950</b>	<b>0,975</b>	<b>0,990</b>	<b>0,995</b>
	<i>p</i> (Teste bilateral)				
	<b>0,800</b>	<b>0,900</b>	<b>0,950</b>	<b>0,980</b>	<b>0,990</b>
<b>1</b>	0,900	0,950	0,975	0,990	0,995
<b>2</b>	0,684	0,776	0,842	0,900	0,929
<b>3</b>	0,565	0,636	0,708	0,785	0,829
<b>4</b>	0,493	0,565	0,624	0,689	0,734
<b>5</b>	0,447	0,509	0,563	0,627	0,669
<b>6</b>	0,410	0,468	0,519	0,577	0,617
<b>7</b>	0,381	0,436	0,483	0,538	0,576
<b>8</b>	0,358	0,410	0,454	0,507	0,542
<b>9</b>	0,339	0,387	0,430	0,480	0,513
<b>10</b>	0,323	0,369	0,409	0,457	0,489
<b>11</b>	0,308	0,352	0,391	0,437	0,468
<b>12</b>	0,296	0,338	0,375	0,419	0,449
<b>13</b>	0,285	0,325	0,361	0,404	0,432
<b>14</b>	0,275	0,314	0,349	0,390	0,418
<b>15</b>	0,266	0,304	0,338	0,377	0,404
<b>16</b>	0,258	0,295	0,327	0,366	0,392
<b>17</b>	0,250	0,286	0,318	0,355	0,381
<b>18</b>	0,244	0,279	0,309	0,346	0,371
<b>19</b>	0,237	0,271	0,301	0,337	0,361
<b>20</b>	0,232	0,265	0,294	0,329	0,352
<b>21</b>	0,226	0,259	0,287	0,321	0,344
<b>22</b>	0,221	0,253	0,281	0,314	0,337
<b>23</b>	0,216	0,247	0,275	0,307	0,330
<b>24</b>	0,212	0,242	0,269	0,301	0,323
<b>25</b>	0,208	0,238	0,264	0,295	0,317
<b>26</b>	0,204	0,233	0,259	0,290	0,311
<b>27</b>	0,200	0,229	0,254	0,284	0,305
<b>28</b>	0,197	0,225	0,250	0,279	0,300
<b>29</b>	0,193	0,221	0,246	0,275	0,295
<b>30</b>	0,190	0,218	0,242	0,270	0,290
<b>31</b>	0,187	0,214	0,238	0,266	0,285
<b>32</b>	0,184	0,211	0,234	0,262	0,281
<b>33</b>	0,182	0,208	0,231	0,258	0,277
<b>34</b>	0,179	0,205	0,227	0,254	0,273
<b>35</b>	0,177	0,202	0,224	0,251	0,269
<b>36</b>	0,174	0,199	0,221	0,247	0,265

## A.11 Continuação

<i>n</i>	<i>p</i> (Teste unilateral)				
	<b>0,900</b>	<b>0,950</b>	<b>0,975</b>	<b>0,990</b>	<b>0,995</b>
	<i>p</i> (Teste bilateral)				
	<b>0,800</b>	<b>0,900</b>	<b>0,950</b>	<b>0,980</b>	<b>0,990</b>
<b>37</b>	0,172	0,196	0,218	0,244	0,262
<b>38</b>	0,170	0,194	0,215	0,241	0,258
<b>39</b>	0,168	0,191	0,213	0,238	0,255
<b>40</b>	0,165	0,189	0,210	0,235	0,252
<b>&gt;40</b>	$\frac{1,07}{\sqrt{n}}$	$\frac{1,22}{\sqrt{n}}$	$\frac{1,36}{\sqrt{n}}$	$\frac{1,52}{\sqrt{n}}$	$\frac{1,63}{\sqrt{n}}$

Tabela A.12: Estatística do teste de Lilliefors (normal)

<i>n</i>	<i>p</i>				
	<b>0,80</b>	<b>0,85</b>	<b>0,90</b>	<b>0,95</b>	<b>0,99</b>
<b>4</b>	0,300	0,319	0,352	0,381	0,417
<b>5</b>	0,285	0,299	0,315	0,337	0,405
<b>6</b>	0,265	0,277	0,294	0,319	0,364
<b>7</b>	0,247	0,258	0,276	0,300	0,348
<b>8</b>	0,233	0,244	0,261	0,285	0,331
<b>9</b>	0,223	0,233	0,249	0,271	0,311
<b>10</b>	0,215	0,224	0,239	0,258	0,294
<b>11</b>	0,206	0,217	0,230	0,249	0,284
<b>12</b>	0,199	0,212	0,223	0,242	0,275
<b>13</b>	0,190	0,202	0,214	0,234	0,268
<b>14</b>	0,183	0,194	0,207	0,227	0,261
<b>15</b>	0,177	0,187	0,201	0,220	0,257
<b>16</b>	0,173	0,182	0,195	0,213	0,250
<b>17</b>	0,169	0,177	0,189	0,206	0,245
<b>18</b>	0,166	0,173	0,184	0,200	0,239
<b>19</b>	0,163	0,169	0,179	0,195	0,235
<b>20</b>	0,160	0,166	0,174	0,190	0,231
<b>25</b>	0,142	0,147	0,158	0,173	0,200
<b>30</b>	0,131	0,136	0,144	0,161	0,187
<b>&gt;30</b>	$\frac{0,736}{\sqrt{n}}$	$\frac{0,768}{\sqrt{n}}$	$\frac{0,805}{\sqrt{n}}$	$\frac{0,886}{\sqrt{n}}$	$\frac{1,031}{\sqrt{n}}$

Tabela A.13: Estatística do teste de Lilliefors (Exponencial)

$n$	$p$										
	0,050	0,100	0,200	0,300	0,500	0,700	0,800	0,900	0,950	0,990	0,999
2	0,3127	0,3200	0,3337	0,3617	0,4337	0,5034	0,5507	0,5934	0,6133	0,6284	0,6317
3	0,2299	0,2544	0,2899	0,3166	0,3645	0,4122	0,4508	0,5111	0,5508	0,6003	0,6296
4	0,2072	0,2281	0,2545	0,2766	0,3163	0,3685	0,4007	0,4442	0,4844	0,5574	0,6215
5	0,1884	0,2052	0,2290	0,2483	0,2877	0,3317	0,3603	0,4045	0,4420	0,5127	0,5814
6	0,1726	0,1882	0,2102	0,2290	0,2645	0,3045	0,3320	0,3732	0,4085	0,4748	0,5497
7	0,1604	0,1750	0,1961	0,3126	0,2458	0,2838	0,3098	0,3481	0,3811	0,4459	0,5185
8	0,1506	0,1646	0,1845	0,2006	0,2309	0,2671	0,2914	0,3274	0,3590	0,4208	0,4913
9	0,1426	0,1561	0,1746	0,1897	0,2186	0,2529	0,2758	0,3101	0,3404	0,3995	0,4679
10	0,1359	0,1486	0,1661	0,1805	0,2082	0,2407	0,2626	0,2955	0,3244	0,3813	0,4473
12	0,1249	0,1364	0,1524	0,1657	0,1912	0,2209	0,2411	0,2714	0,2981	0,3511	0,4132
14	0,1162	0,1268	0,1418	0,1542	0,1778	0,2054	0,2242	0,2525	0,2774	0,3272	0,3858
16	0,1091	0,1191	0,1332	0,1448	0,1669	0,1929	0,2105	0,2371	0,2606	0,3076	0,3632
18	0,1032	0,1127	0,1260	0,1369	0,1578	0,1824	0,1990	0,2242	0,2465	0,2911	0,3441
20	0,0982	0,1073	0,1199	0,1303	0,1501	0,1735	0,1893	0,2132	0,2345	0,2771	0,3277
22	0,0939	0,1025	0,1146	0,1245	0,1434	0,1657	0,1809	0,2038	0,2241	0,2649	0,3135
24	0,0901	0,0984	0,1099	0,1195	0,1376	0,1590	0,1735	0,1954	0,2150	0,2542	0,3010
26	0,0868	0,0947	0,1058	0,1150	0,1324	0,1530	0,1670	0,1881	0,2069	0,2447	0,2899
28	0,0838	0,0914	0,1021	0,1110	0,1278	0,1477	0,1611	0,1815	0,1997	0,2362	0,2799
30	0,0811	0,0885	0,0988	0,1074	0,1236	0,1428	0,1559	0,1756	0,1932	0,2286	0,2709
35	0,0754	0,0822	0,0918	0,0997	0,1148	0,1326	0,1447	0,1630	0,1793	0,2123	0,2517
40	0,0707	0,0771	0,0861	0,0935	0,1077	0,1243	0,1356	0,1528	0,1681	0,1990	0,2361
45	0,0668	0,0729	0,0814	0,0884	0,1017	0,1174	0,1281	0,1443	0,1588	0,1880	0,2231
50	0,0636	0,0693	0,0774	0,0840	0,0966	0,1116	0,1217	0,1371	0,1509	0,1787	0,2121
60	0,0582	0,0635	0,0708	0,0769	0,0885	0,1021	0,1114	0,1255	0,1381	0,1635	0,1943
70	0,0541	0,0589	0,0658	0,0714	0,0821	0,0946	0,1033	0,1164	0,1281	0,1517	
80	0,0507	0,0553	0,0616	0,0669	0,0769	0,0887	0,0968	0,1090	0,1200	0,1421	
90	0,0479	0,0522	0,0582	0,0632	0,0726	0,0838	0,0914	0,1029	0,1132	0,1341	
100	0,0455	0,0496	0,0553	0,0600	0,0690	0,0796	0,0868	0,0977	0,1075	0,1274	
>100	$\frac{0,4550}{\sqrt{n}}$	$\frac{0,4959}{\sqrt{n}}$	$\frac{0,5530}{\sqrt{n}}$	$\frac{0,6000}{\sqrt{n}}$	$\frac{0,6898}{\sqrt{n}}$	$\frac{0,7957}{\sqrt{n}}$	$\frac{0,8678}{\sqrt{n}}$	$\frac{0,9773}{\sqrt{n}}$	$\frac{1,0753}{\sqrt{n}}$	$\frac{1,2743}{\sqrt{n}}$	

Tabela A.14: Estatística do teste de Smirnov para duas amostras de tamanhos iguais a  $n$ 

$n$	$p$ (Teste unilateral)				
	0,900	0,950	0,975	0,990	0,995
	$p$ (Teste bilateral)				
	0,800	0,900	0,950	0,980	0,990
<b>3</b>	2/3	2/3			
<b>4</b>	3/4	3/4	3/4		
<b>5</b>	3/5	3/5	4/5	4/5	4/5
<b>6</b>	3/6	4/6	4/6	5/6	5/6
<b>7</b>	4/7	4/7	5/7	5/7	5/7
<b>8</b>	4/8	4/8	5/8	5/8	6/8
<b>9</b>	4/9	5/9	5/9	6/9	6/9
<b>10</b>	4/10	5/10	6/10	6/10	7/10
<b>11</b>	5/11	5/11	6/11	7/11	7/11
<b>12</b>	5/12	5/12	6/12	7/12	7/12
<b>13</b>	5/13	6/13	6/13	7/13	8/13
<b>14</b>	5/14	6/14	7/14	7/14	8/14
<b>15</b>	5/15	6/15	7/15	8/15	8/15
<b>16</b>	6/16	6/16	7/16	8/16	9/16
<b>17</b>	6/17	7/17	7/17	8/17	9/17
<b>18</b>	6/18	7/18	8/18	9/18	9/19
<b>19</b>	6/19	7/19	8/19	9/19	9/19
<b>20</b>	6/20	7/20	8/20	9/20	10/20
<b>21</b>	6/21	7/21	8/21	9/21	10/21
<b>22</b>	7/22	8/22	8/22	10/22	10/22
<b>23</b>	7/23	8/23	9/23	10/23	10/23
<b>24</b>	7/24	8/24	9/24	10/24	11/24
<b>25</b>	7/25	8/25	9/25	10/25	11/25
<b>26</b>	7/26	8/26	9/26	10/26	11/26
<b>27</b>	7/27	8/27	9/27	11/27	11/27
<b>28</b>	8/28	9/28	10/28	11/28	12/28
<b>29</b>	8/29	9/29	10/29	11/29	12/29
<b>30</b>	8/30	9/30	10/30	11/30	12/30
<b>31</b>	8/31	9/31	10/31	11/31	12/31
<b>32</b>	8/32	9/32	10/32	12/32	12/32
<b>34</b>	8/34	10/34	11/34	12/34	13/34
<b>36</b>	9/36	10/36	11/36	12/36	13/36
<b>38</b>	9/38	10/38	11/38	13/38	14/38
<b>40</b>	9/40	10/40	12/40	13/40	14/40

## A.14 Continuação

$n$	$p$ (Teste unilateral)				
	<b>0,900</b>	<b>0,950</b>	<b>0,975</b>	<b>0,990</b>	<b>0,995</b>
	$p$ (Teste bilateral)				
	<b>0,800</b>	<b>0,900</b>	<b>0,950</b>	<b>0,980</b>	<b>0,990</b>
<b>&gt;40</b>	$\frac{1,52}{\sqrt{n}}$	$\frac{1,73}{\sqrt{n}}$	$\frac{1,92}{\sqrt{n}}$	$\frac{2,15}{\sqrt{n}}$	$\frac{2,30}{\sqrt{n}}$

Tabela A.15: Estatística do teste de Smirnov para amostras de tamanhos diferentes

<i>n</i>	<i>m</i>	<i>p</i> (Teste unilateral)				
		<b>0,90</b>	<b>0,95</b>	<b>0,975</b>	<b>0,99</b>	<b>0,995</b>
<i>n</i>	<i>m</i>	<i>p</i> (Teste bilateral)				
		<b>0,80</b>	<b>0,90</b>	<b>0,95</b>	<b>0,98</b>	<b>0,99</b>
<b>1</b>	<b>9</b>	17/18				
	<b>10</b>	9/10				
<b>2</b>	<b>3</b>	5/6				
	<b>4</b>	3/4				
	<b>5</b>	4/5	4/5			
	<b>6</b>	5/6	5/6			
	<b>7</b>	5/7	6/7			
<b>3</b>	<b>8</b>	3/4	7/8	7/8		
	<b>9</b>	7/9	8/9	8/9		
	<b>10</b>	7/10	4/5	9/10		
	<b>4</b>	3/4	3/4			
	<b>5</b>	2/3	4/5	4/5		
<b>4</b>	<b>6</b>	2/3	2/3	5/6		
	<b>7</b>	2/3	5/7	6/7	6/7	
	<b>8</b>	5/8	3/4	3/4	7/8	
	<b>9</b>	2/3	2/3	7/9	8/9	8/9
	<b>10</b>	3/5	7/10	4/5	9/10	9/10
<b>5</b>	<b>12</b>	7/12	2/3	3/4	5/6	11/12
	<b>5</b>	3/5	3/4	4/5	4/5	
	<b>6</b>	7/12	2/3	3/4	5/6	5/6
	<b>7</b>	17/28	5/7	3/4	6/7	6/7
	<b>8</b>	5/8	5/8	3/4	7/8	7/8
<b>6</b>	<b>9</b>	5/9	2/3	3/4	7/9	8/9
	<b>10</b>	11/20	13/20	7/10	4/5	4/5
	<b>12</b>	7/12	2/3	2/3	3/4	5/6
	<b>16</b>	9/16	5/8	11/16	3/4	13/16
	<b>6</b>	3/5	2/3	2/3	5/6	5/6
<b>7</b>	<b>7</b>	4/7	23/35	5/7	29/35	6/7
	<b>8</b>	11/20	5/8	27/40	4/5	4/5
	<b>9</b>	5/9	3/5	31/45	7/9	4/5
	<b>10</b>	1/2	3/5	7/10	7/10	4/5
	<b>15</b>	8/15	3/5	2/3	11/15	11/15
<b>8</b>	<b>20</b>	1/2	11/20	3/5	7/10	3/4
	<b>7</b>	23/42	4/7	29/42	5/7	5/6
<b>9</b>	<b>8</b>	1/2	7/12	2/3	3/4	3/4



## A.15 Continuação

<i>n</i>	<i>m</i>	<i>p</i> (Teste unilateral)				
		<b>0,90</b>	<b>0,95</b>	<b>0,975</b>	<b>0,99</b>	<b>0,995</b>
		<i>p</i> (Teste bilateral)				
		<b>0,80</b>	<b>0,90</b>	<b>0,95</b>	<b>0,98</b>	<b>0,99</b>
	<b>9</b>	1/2	5/9	2/3	13/18	7/9
	<b>10</b>	1/2	17/30	19/30	7/10	11/15
	<b>12</b>	1/2	7/12	7/12	2/3	3/4
	<b>18</b>	4/9	5/9	11/18	2/3	13/18
	<b>24</b>	11/24	1/2	7/12	5/8	2/3
<b>7</b>	<b>8</b>	27/56	33/56	5/8	41/56	3/4
	<b>9</b>	31/63	5/9	40/63	5/7	47/63
	<b>10</b>	33/70	39/70	43/70	7/10	5/7
	<b>14</b>	3/7	1/2	4/7	9/14	5/7
	<b>28</b>	3/7	13/28	15/28	17/28	9/14
<b>8</b>	<b>9</b>	4/9	13/24	4/8	2/3	3/4
	<b>10</b>	19/40	21/40	23/40	27/40	7/10
	<b>12</b>	11/24	1/2	7/12	5/8	2/3
	<b>16</b>	7/16	1/2	9/16	5/8	5/8
	<b>32</b>	13/32	7/16	1/2	9/16	19/32
<b>9</b>	<b>10</b>	7/15	1/2	26/45	2/3	31/45
	<b>12</b>	4/9	1/2	5/9	11/18	2/3
	<b>15</b>	19/45	22/45	8/15	3/5	29/45
	<b>18</b>	7/18	4/9	1/2	5/9	11/18
	<b>36</b>	13/36	5/12	17/36	19/36	5/9
<b>10</b>	<b>15</b>	2/5	7/15	1/2	17/30	19/30
	<b>20</b>	2/5	9/20	1/2	11/20	3/5
	<b>40</b>	7/20	2/5	9/20	1/2	
<b>12</b>	<b>15</b>	23/60	9/20	1/2	11/20	7/12
	<b>16</b>	3/8	7/16	23/48	13/24	7/12
	<b>18</b>	13/36	5/12	17/36	19/36	5/9
	<b>20</b>	11/30	5/12	7/15	31/60	17/30
<b>15</b>	<b>20</b>	7/20	2/5	13/30	29/60	31/60
<b>16</b>	<b>20</b>	27/80	31/80	17/40	19/40	41/80
<i>n</i> e <i>m</i> grandes		$1.07\sqrt{\frac{m+n}{mn}}$	$1.22\sqrt{\frac{m+n}{mn}}$	$1.36\sqrt{\frac{m+n}{mn}}$	$1.52\sqrt{\frac{m+n}{mn}}$	$1.63\sqrt{\frac{m+n}{mn}}$

Tabela A.16: Estatística do teste de Smirnov para k-amostras

$k$	$n$	$p$				
		0,90	0,95	0,975	0,99	0,995
<b>2</b>	<b>2</b>					
	<b>3</b>	2	2			
	<b>4</b>	3	3	3		
	<b>5</b>	3	3	4	4	4
	<b>6</b>	3	4	4	5	5
	<b>7</b>	4	4	5	5	5
	<b>8</b>	4	4	5	5	6
	<b>9</b>	4	5	5	6	6
	<b>10</b>	4	5	6	6	7
	<b>12</b>	5	5	6	7	7
	<b>14</b>	5	6	7	7	8
	<b>16</b>	6	6	7	8	9
	<b>18</b>	6	7	8	9	9
	<b>20</b>	6	7	8	9	10
	<b>25</b>	7	8	9	10	11
	<b>30</b>	8	9	10	11	12
	<b>35</b>	8	10	11	12	13
	<b>40</b>	9	10	12	13	14
	<b>45</b>	10	11	12	14	15
	<b>50</b>	10	12	13	15	16
	<b>&gt;50</b>	$\frac{1,52}{\sqrt{(n)}}$	$\frac{1,73}{\sqrt{(n)}}$	$\frac{1,92}{\sqrt{(n)}}$	$\frac{2,15}{\sqrt{(n)}}$	$\frac{2,30}{\sqrt{(n)}}$

## A.16 Continuação

$k$	$n$	$p$				
		0,90	0,95	0,975	0,99	0,995
<b>3</b>	<b>2</b>					
	<b>3</b>	2				
	<b>4</b>	3	3			
	<b>5</b>	3	4	4	4	
	<b>6</b>	4	4	5	5	5
	<b>7</b>	4	5	5	5	6
	<b>8</b>	4	5	5	6	6
	<b>9</b>	5	5	6	6	7
	<b>10</b>	5	6	6	7	7
	<b>12</b>	5	6	7	7	8
	<b>14</b>	6	7	7	8	8
	<b>16</b>	6	7	8	9	9
	<b>18</b>	7	8	8	9	10
	<b>20</b>	7	8	9	10	10
	<b>25</b>	8	9	10	11	12
	<b>30</b>	9	10	11	12	13
	<b>35</b>	10	11	12	13	14
	<b>40</b>	10	12	13	14	15
	<b>45</b>	11	12	14	15	16
	<b>50</b>	12	13	14	16	17
	<b>&gt;50</b>	$\frac{1,73}{\sqrt{(n)}}$	$\frac{1,92}{\sqrt{(n)}}$	$\frac{2,09}{\sqrt{(n)}}$	$\frac{2,30}{\sqrt{(n)}}$	$\frac{2,45}{\sqrt{(n)}}$

A.16 Continuação

<i>k</i>	<i>n</i>	<i>p</i>				
		0,90	0,95	0,975	0,99	0,995
4	2					
	3					
	4	3	3			
	5	4	4	4		
	6	4	4	5	5	5
	7	4	5	5	6	6
	8	5	5	6	6	6
	9	5	6	6	6	7
	10	5	6	6	7	7
	12	6	6	7	8	8
	14	6	7	8	8	9
	16	7	8	8	9	9
	18	7	8	9	9	10
	20	8	8	9	10	11
	25	9	9	10	11	12
	30	10	10	11	12	13
	35	10	10	12	14	14
	40	11	11	13	15	15
	45	12	12	14	15	16
	50	13	13	15	16	17
	>50	$\frac{1,85}{\sqrt{(n)}}$	$\frac{2,02}{\sqrt{(n)}}$	$\frac{2,19}{\sqrt{(n)}}$	$\frac{2,39}{\sqrt{(n)}}$	$\frac{2,53}{\sqrt{(n)}}$

## A.16 Continuação

$k$	$n$	$p$				
		0,90	0,95	0,975	0,99	0,995
5	2					
	3					
	4	3				
	5	4	4	4		
	6	4	5	5	5	5
	7	5	5	5	6	6
	8	5	5	6	6	6
	9	5	6	6	7	7
	10	6	6	6	7	7
	12	6	7	7	8	8
	14	7	7	8	8	9
	16	7	8	8	9	10
	18	8	8	9	10	10
	20	8	9	9	10	11
	25	9	10	11	12	12
	30	10	11	12	13	14
	35	11	12	13	14	15
	40	12	13	14	15	16
	45	12	13	15	16	17
	50	13	14	15	17	18
	>50	$\frac{1,92}{\sqrt{(n)}}$	$\frac{2,09}{\sqrt{(n)}}$	$\frac{2,25}{\sqrt{(n)}}$	$\frac{2,45}{\sqrt{(n)}}$	$\frac{2,59}{\sqrt{(n)}}$

A.16 Continuação

$k$	$n$	$p$				
		0,90	0,95	0,975	0,99	0,995
<b>6</b>	<b>2</b>					
	<b>3</b>					
	<b>4</b>	3				
	<b>5</b>	4	4	4		
	<b>6</b>	4	5	5	5	
	<b>7</b>	5	5	5	6	6
	<b>8</b>	5	5	6	6	7
	<b>9</b>	5	6	6	7	7
	<b>10</b>	6	6	7	7	8
	<b>12</b>	6	7	7	8	8
	<b>14</b>	7	7	8	9	9
	<b>16</b>	7	8	9	9	10
	<b>18</b>	8	9	9	10	10
	<b>20</b>	8	9	10	10	11
	<b>25</b>	9	10	11	12	12
	<b>30</b>	10	11	12	13	14
	<b>35</b>	11	12	13	14	15
	<b>40</b>	12	13	14	15	16
	<b>45</b>	13	14	15	16	17
	<b>50</b>	13	15	16	17	18
	<b>&gt;50</b>	$\frac{1,97}{\sqrt{(n)}}$	$\frac{2,14}{\sqrt{(n)}}$	$\frac{2,30}{\sqrt{(n)}}$	$\frac{2,49}{\sqrt{(n)}}$	$\frac{2,63}{\sqrt{(n)}}$

## A.16 Continuação

<i>k</i>	<i>n</i>	<i>p</i>				
		0,90	0,95	0,975	0,99	0,995
<b>7</b>	<b>2</b>					
	<b>3</b>					
	<b>4</b>	3				
	<b>5</b>	4	4	4		
	<b>6</b>	4	5	5	5	
	<b>7</b>	5	5	5	6	6
	<b>8</b>	5	6	6	6	7
	<b>9</b>	5	6	6	7	7
	<b>10</b>	6	6	7	7	8
	<b>12</b>	6	7	7	8	8
	<b>14</b>	7	8	8	9	9
	<b>16</b>	8	8	9	9	10
	<b>18</b>	8	9	9	10	11
	<b>20</b>	8	9	10	11	11
	<b>25</b>	10	10	11	12	13
	<b>30</b>	11	11	12	13	14
	<b>35</b>	11	12	13	14	15
	<b>40</b>	12	13	14	15	16
	<b>45</b>	13	14	15	16	17
	<b>50</b>	14	15	16	17	18
	<b>&gt;50</b>	$\frac{2,02}{\sqrt{(n)}}$	$\frac{2,18}{\sqrt{(n)}}$	$\frac{2,34}{\sqrt{(n)}}$	$\frac{2,53}{\sqrt{(n)}}$	$\frac{2,66}{\sqrt{(n)}}$

A.16 Continuação

<i>k</i>	<i>n</i>	<i>p</i>				
		0,90	0,95	0,975	0,99	0,995
<b>8</b>	<b>2</b>					
	<b>3</b>					
	<b>4</b>	3				
	<b>5</b>	4	4			
	<b>6</b>	4	5	5	5	
	<b>7</b>	5	5	6	6	6
	<b>8</b>	5	6	6	6	7
	<b>9</b>	6	6	6	7	7
	<b>10</b>	6	6	7	7	8
	<b>12</b>	7	7	8	8	9
	<b>14</b>	7	8	8	9	9
	<b>16</b>	8	8	9	10	10
	<b>18</b>	8	9	9	10	11
	<b>20</b>	9	9	10	11	11
	<b>25</b>	10	11	11	12	13
	<b>30</b>	11	12	12	13	14
	<b>35</b>	12	13	13	15	15
	<b>40</b>	12	13	14	16	16
	<b>45</b>	13	14	15	17	17
	<b>50</b>	14	15	16	17	18
	<b>&gt;50</b>	$\frac{2,05}{\sqrt{(n)}}$	$\frac{2,22}{\sqrt{(n)}}$	$\frac{2,37}{\sqrt{(n)}}$	$\frac{2,55}{\sqrt{(n)}}$	$\frac{2,69}{\sqrt{(n)}}$



## A.16 Continuação

$k$	$n$	$p$				
		0,90	0,95	0,975	0,99	0,995
<b>9</b>	<b>2</b>					
	<b>3</b>					
	<b>4</b>					
	<b>5</b>	4	4			
	<b>6</b>	5	5	5	5	
	<b>7</b>	5	5	6	6	6
	<b>8</b>	5	6	6	6	7
	<b>9</b>	6	6	6	7	7
	<b>10</b>	6	6	7	7	8
	<b>12</b>	7	7	8	8	9
	<b>14</b>	7	8	8	9	9
	<b>16</b>	8	8	9	10	10
	<b>18</b>	8	9	10	10	11
	<b>20</b>	9	9	10	11	11
	<b>25</b>	10	11	11	12	13
	<b>30</b>	11	12	13	14	14
	<b>35</b>	12	13	14	15	15
	<b>40</b>	13	14	15	16	17
	<b>45</b>	13	15	16	17	18
	<b>50</b>	14	15	16	18	19
	<b>&gt;50</b>	$\frac{2,09}{\sqrt{(n)}}$	$\frac{2,25}{\sqrt{(n)}}$	$\frac{2,40}{\sqrt{(n)}}$	$\frac{2,58}{\sqrt{(n)}}$	$\frac{2,72}{\sqrt{(n)}}$

A.16 Continuação

$k$	$n$	$p$				
		0,90	0,95	0,975	0,99	0,995
10	2					
	3					
	4					
	5	4	4			
	6	5	5	5	5	
	7	5	5	6	6	6
	8	5	6	6	7	7
	9	6	6	7	7	7
	10	6	7	7	7	8
	12	7	7	8	8	9
	14	7	8	8	9	9
	16	8	8	9	10	10
	18	8	9	10	10	11
	20	9	10	10	11	12
	25	10	11	12	12	13
	30	11	12	13	14	14
	35	12	13	14	15	16
	40	13	14	15	16	17
	45	14	15	16	17	18
	50	14	16	17	18	19
	>50	$\frac{2,11}{\sqrt{(n)}}$	$\frac{2,27}{\sqrt{(n)}}$	$\frac{2,42}{\sqrt{(n)}}$	$\frac{2,61}{\sqrt{(n)}}$	$\frac{2,74}{\sqrt{(n)}}$

Tabela A.17: Estatística do teste de Spearman

$n$	0,900	0,950	0,975	0,990	0,995	0,999
4	0,8000	0,8000				
5	0,7000	0,8000	0,9000	0,9000		
6	0,6000	0,7714	0,8286	0,8857	0,9429	
7	0,5357	0,6786	0,7450	0,8571	0,8929	0,9643
8	0,5000	0,6190	0,7143	0,8095	0,8571	0,9286
9	0,4667	0,5833	0,6833	0,7667	0,8167	0,9000
10	0,4424	0,5515	0,6364	0,7333	0,7818	0,8667
11	0,4182	0,5273	0,6091	0,7000	0,7455	0,8364
12	0,3986	0,4965	0,5804	0,6713	0,7273	0,8182
13	0,3791	0,4780	0,5549	0,6429	0,6978	0,7912
14	0,3626	0,4593	0,5341	0,6220	0,6747	0,7670
15	0,3500	0,4429	0,5179	0,6000	0,6536	0,7464
16	0,3382	0,4265	0,5000	0,5824	0,6324	0,7265
17	0,3260	0,4118	0,4853	0,5637	0,6152	0,7083
18	0,3148	0,3994	0,4716	0,5480	0,5975	0,6904
19	0,3070	0,3895	0,4579	0,5333	0,5825	0,6737
20	0,2977	0,3789	0,4451	0,5203	0,5684	0,6586
21	0,2909	0,3688	0,4351	0,5078	0,5545	0,6455
22	0,2829	0,3597	0,4241	0,4963	0,5426	0,6318
23	0,2767	0,3518	0,4150	0,4852	0,5306	0,6186
24	0,2704	0,3435	0,4061	0,4748	0,5200	0,6070
25	0,2646	0,3362	0,3977	0,4654	0,5100	0,5962
26	0,2588	0,3299	0,3894	0,4564	0,5002	0,5856
27	0,2540	0,3236	0,3822	0,4481	0,4915	0,5757
28	0,2490	0,3175	0,3749	0,4401	0,4828	0,5660
29	0,2443	0,3113	0,3685	0,4320	0,4744	0,5567
30	0,2400	0,3059	0,3620	0,4251	0,4665	0,5479
$>30$	$w_p = \frac{z_p}{\sqrt{n-1}}$					

onde  $z_p$  é o ponto crítico, com área  $p$  à direita, obtido da distribuição normal padronizada

Tabela A.18: Limite inferior crítico no teste dos 'Runs'  
( $\alpha = 0.5$ )

$\begin{smallmatrix} n_1 \\ \downarrow \\ n_2 \end{smallmatrix} \rightarrow$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
2											2	2	2	2	2	2	2	2	2
3					2	2	2	2	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3	3
4				2	2	2	3	3	3	3	3	3	3	3	4	4	4	4	4
5			2	2	3	3	3	3	3	4	4	4	4	4	4	4	5	5	5
6		2	2	3	3	3	3	4	4	4	4	5	5	5	5	5	5	6	6
7		2	2	3	3	3	4	4	5	5	5	5	5	6	6	6	6	6	6
8		2	3	3	3	4	4	5	5	5	6	6	6	6	6	7	7	7	7
9		2	3	3	4	4	5	5	5	6	6	6	7	7	7	7	8	8	8
10		2	3	3	4	5	5	5	6	6	7	7	7	7	8	8	8	8	9
11		2	3	4	4	5	5	6	6	7	7	7	8	8	8	9	9	9	9
12	2	2	3	4	4	5	6	6	7	8	8	9	9	9	9	9	9	10	10
13	2	2	3	4	5	5	6	6	7	7	8	8	9	9	9	10	10	10	10
14	2	2	3	4	5	5	6	7	7	8	8	8	8	8	10	10	10	11	11
15	2	3	3	4	5	6	6	7	7	8	8	9	9	10	10	11	11	11	12
16	2	3	4	4	5	6	6	7	8	8	9	9	10	10	11	11	11	12	12
17	2	3	4	4	5	6	7	7	8	9	9	10	10	11	11	11	12	12	12
18	2	3	4	5	5	6	7	8	8	9	9	10	10	11	11	12	12	13	13
19	2	3	4	5	6	6	7	8	8	9	10	10	11	11	12	12	13	13	13
20	2	3	4	5	6	6	7	8	9	9	10	10	11	12	12	13	13	13	14

Tabela A.19: Limite superior crítico no teste dos 'Runs'  
 $(\alpha = 0.5)$

$\begin{smallmatrix} n_1 \\ \downarrow \\ n_2 \end{smallmatrix} \rightarrow$	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
4		9	9														
5	9	10	10	11	11												
6	9	10	11	12	12	13	13	13	13								
7		11	12	13	13	14	14	14	14	15	15	15					
8		11	12	13	14	14	15	15	16	16	16	16	17	17	17	17	17
9			13	14	14	15	16	16	16	17	17	18	18	18	18	18	18
10			13	14	15	16	16	17	17	18	18	18	19	19	19	20	20
11			13	14	15	16	17	17	18	19	19	19	20	20	20	21	21
12			13	14	16	16	17	18	19	19	20	20	21	21	21	22	22
13				15	16	17	18	19	19	20	20	21	21	22	22	23	23
14				15	16	17	18	19	20	20	21	22	22	23	23	23	24
15				15	16	18	18	19	20	21	22	22	23	23	24	24	25
16					17	18	19	20	21	21	22	23	23	24	25	25	25
17					17	18	19	20	21	22	23	23	24	25	25	26	26
18					17	18	19	20	21	22	23	24	25	25	26	26	27
19					17	18	20	21	22	23	23	24	25	26	26	27	27
20					17	18	20	21	22	23	24	25	25	26	27	27	28

Tabela A.20: Valores Críticos da estatística de Durbin-Watson ( $\alpha = 0.05$ )

$n$	$p = 1$		$p = 2$		$p = 3$		$p = 4$		$p = 5$	
	$d_L$	$d_U$	$d_L$	$d_U$	$d_L$	$d_U$	$d_L$	$d_U$	$d_L$	$d_U$
<b>15</b>	1,08	1,36	0,95	1,54	0,82	1,75	0,69	1,97	0,56	2,21
<b>16</b>	1,10	1,37	0,98	1,54	0,86	1,73	0,74	1,93	0,62	2,15
<b>17</b>	1,13	1,38	1,02	1,54	0,90	1,71	0,78	1,90	0,67	2,10
<b>18</b>	1,16	1,39	1,05	1,53	0,93	1,69	0,82	1,87	0,71	2,06
<b>19</b>	1,18	1,40	1,08	1,53	0,97	1,68	0,86	1,85	0,75	2,02
<b>20</b>	1,20	1,41	1,10	1,54	1,00	1,68	0,90	1,83	0,79	1,99
<b>21</b>	1,22	1,42	1,13	1,54	1,03	1,67	0,93	1,81	0,83	1,96
<b>22</b>	1,24	1,43	1,15	1,54	1,05	1,66	0,96	1,80	0,86	1,94
<b>23</b>	1,26	1,44	1,17	1,54	1,08	1,66	0,99	1,79	0,90	1,92
<b>24</b>	1,27	1,45	1,19	1,55	1,10	1,66	1,01	1,78	0,93	1,90
<b>25</b>	1,29	1,45	1,21	1,55	1,12	1,66	1,04	1,77	0,95	1,89
<b>26</b>	1,30	1,46	1,22	1,55	1,14	1,65	1,06	1,76	0,98	1,88
<b>27</b>	1,32	1,47	1,24	1,56	1,16	1,65	1,08	1,76	1,01	1,86
<b>28</b>	1,33	1,48	1,26	1,56	1,18	1,65	1,10	1,75	1,03	1,85
<b>29</b>	1,34	1,48	1,27	1,56	1,20	1,65	1,12	1,74	1,05	1,84
<b>30</b>	1,35	1,49	1,28	1,57	1,21	1,65	1,14	1,74	1,07	1,83
<b>31</b>	1,36	1,50	1,30	1,57	1,23	1,65	1,16	1,74	1,09	1,83
<b>32</b>	1,37	1,50	1,31	1,57	1,24	1,65	1,18	1,73	1,11	1,82
<b>33</b>	1,38	1,51	1,32	1,58	1,26	1,65	1,19	1,73	1,13	1,81
<b>34</b>	1,39	1,51	1,33	1,58	1,27	1,65	1,21	1,73	1,15	1,81
<b>35</b>	1,40	1,52	1,34	1,58	1,28	1,65	1,22	1,73	1,16	1,80
<b>36</b>	1,41	1,52	1,35	1,59	1,29	1,65	1,24	1,73	1,18	1,80
<b>37</b>	1,42	1,53	1,36	1,59	1,31	1,66	1,25	1,72	1,19	1,80
<b>38</b>	1,43	1,54	1,37	1,59	1,32	1,66	1,26	1,72	1,21	1,79
<b>39</b>	1,43	1,54	1,38	1,60	1,33	1,66	1,27	1,72	1,22	1,79
<b>40</b>	1,44	1,54	1,39	1,60	1,34	1,66	1,29	1,72	1,23	1,79
<b>45</b>	1,48	1,57	1,43	1,62	1,38	1,67	1,34	1,72	1,29	1,78
<b>50</b>	1,50	1,59	1,46	1,63	1,42	1,67	1,38	1,72	1,34	1,77
<b>55</b>	1,53	1,60	1,49	1,64	1,45	1,68	1,41	1,72	1,38	1,77
<b>60</b>	1,55	1,62	1,51	1,65	1,48	1,69	1,44	1,73	1,41	1,77
<b>65</b>	1,57	1,63	1,54	1,66	1,50	1,70	1,47	1,73	1,44	1,77
<b>70</b>	1,58	1,64	1,55	1,67	1,52	1,70	1,49	1,74	1,46	1,77
<b>75</b>	1,60	1,65	1,57	1,68	1,54	1,71	1,51	1,74	1,49	1,77
<b>80</b>	1,61	1,66	1,59	1,69	1,56	1,72	1,53	1,74	1,51	1,77
<b>85</b>	1,62	1,67	1,60	1,70	1,57	1,72	1,55	1,75	1,52	1,77
<b>90</b>	1,63	1,68	1,61	1,70	1,59	1,73	1,57	1,75	1,54	1,78
<b>95</b>	1,64	1,69	1,62	1,71	1,60	1,73	1,58	1,75	1,56	1,78

## A.20 Continuação

$n$	$p = 1$		$p = 2$		$p = 3$		$p = 4$		$p = 5$	
	$d_L$	$d_U$	$d_L$	$d_U$	$d_L$	$d_U$	$d_L$	$d_U$	$d_L$	$d_U$
<b>100</b>	1,65	1,69	1,63	1,73	1,61	1,74	1,59	1,76	1,57	1,78





# Apêndice B

## Quadrados latinos

$3 \times 3$

A	B	C
B	C	A
C	A	B

$4 \times 4$

1				2				3				4			
A	B	C	D	A	B	C	D	A	B	C	D	A	B	C	D
B	A	D	C	B	C	D	A	B	D	A	C	B	A	D	C
C	D	B	A	C	D	A	B	C	A	D	B	C	D	A	B
D	C	A	B	D	A	B	C	D	C	B	A	D	C	B	A

$5 \times 5$

A	B	C	D	E
B	A	E	C	D
C	D	A	E	B
D	E	B	A	C
E	C	D	B	A

$6 \times 6$

A	B	C	D	E	F
B	F	D	C	A	E
C	D	E	F	B	A
D	A	F	E	C	B
E	C	A	B	F	D
F	E	B	A	D	C

$7 \times 7$ 

A	B	C	D	E	F	G
B	C	D	E	F	G	A
C	D	E	F	G	A	B
D	E	F	G	A	B	C
E	F	G	A	B	C	D
F	G	A	B	C	D	E
G	A	B	C	D	E	F

 $8 \times 8$ 

A	B	C	D	E	F	G	H
B	C	D	E	F	G	H	A
C	D	E	F	G	H	A	B
D	E	F	G	H	A	B	C
E	F	G	H	A	B	C	D
F	G	H	A	B	C	D	E
G	H	A	B	C	D	E	F
H	A	B	C	D	E	F	G

 $9 \times 9$ 

A	B	C	D	E	F	G	H	I
B	C	D	E	F	G	H	I	A
C	D	E	F	G	H	I	A	B
D	E	F	G	H	I	A	B	C
E	F	G	H	I	A	B	C	D
F	G	H	I	A	B	C	D	E
G	H	I	A	B	C	D	E	F
H	I	A	B	C	D	E	F	G
I	A	B	C	D	E	F	G	H

 $10 \times 10$ 

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
B	C	D	E	F	G	H	I	J	A
C	D	E	F	G	H	I	J	A	B
D	E	F	G	H	I	J	A	B	C
E	F	G	H	I	J	A	B	C	D
F	G	H	I	J	A	B	C	D	E
G	H	I	J	A	B	C	D	E	F
H	I	J	A	B	C	D	E	F	G
I	J	A	B	C	D	E	F	G	H
J	A	B	C	D	E	F	G	H	I

$11 \times 11$ 

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	A
C	D	E	F	G	H	I	J	K	A	B
D	E	F	G	H	I	J	K	A	B	C
E	F	G	H	I	J	K	A	B	C	D
F	G	H	I	J	K	A	B	C	D	E
G	H	I	J	K	A	B	C	D	E	F
H	I	J	K	A	B	C	D	E	F	G
I	J	K	A	B	C	D	E	F	G	H
J	K	A	B	C	D	E	F	G	H	I
K	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J

 $12 \times 12$ 

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	A
C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	A	B
D	E	F	G	H	I	J	K	L	A	B	C
E	F	G	H	I	J	K	L	A	B	C	D
F	G	H	I	J	K	L	A	B	C	D	E
G	H	I	J	K	L	A	B	C	D	E	F
H	I	J	K	L	A	B	C	D	E	F	G
I	J	K	L	A	B	C	D	E	F	G	H
J	K	L	A	B	C	D	E	F	G	H	I
K	L	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
L	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K



# Apêndice C

## Quadrados greco-latinos

$3 \times 3$

A <sub>1</sub>	B <sub>3</sub>	C <sub>2</sub>
B <sub>2</sub>	C <sub>1</sub>	A <sub>3</sub>
C <sub>3</sub>	A <sub>2</sub>	B <sub>1</sub>

$4 \times 4$

A <sub>1</sub>	B <sub>3</sub>	C <sub>4</sub>	D <sub>2</sub>
B <sub>2</sub>	A <sub>4</sub>	D <sub>3</sub>	C <sub>1</sub>
C <sub>3</sub>	D <sub>1</sub>	A <sub>2</sub>	B <sub>4</sub>
D <sub>4</sub>	C <sub>2</sub>	B <sub>1</sub>	A <sub>3</sub>

$5 \times 5$

A <sub>1</sub>	B <sub>3</sub>	C <sub>5</sub>	D <sub>2</sub>	E <sub>4</sub>
B <sub>2</sub>	C <sub>4</sub>	D <sub>1</sub>	E <sub>3</sub>	A <sub>5</sub>
C <sub>3</sub>	D <sub>5</sub>	E <sub>2</sub>	A <sub>4</sub>	B <sub>1</sub>
D <sub>4</sub>	E <sub>1</sub>	A <sub>3</sub>	B <sub>5</sub>	C <sub>2</sub>
E <sub>5</sub>	A <sub>2</sub>	B <sub>4</sub>	C <sub>1</sub>	D <sub>3</sub>

$7 \times 7$

A <sub>1</sub>	B <sub>5</sub>	C <sub>2</sub>	D <sub>6</sub>	E <sub>3</sub>	F <sub>7</sub>	G <sub>4</sub>
B <sub>2</sub>	C <sub>6</sub>	D <sub>3</sub>	E <sub>7</sub>	F <sub>4</sub>	G <sub>1</sub>	A <sub>5</sub>
C <sub>3</sub>	D <sub>7</sub>	E <sub>4</sub>	F <sub>1</sub>	G <sub>5</sub>	A <sub>2</sub>	B <sub>6</sub>
D <sub>4</sub>	E <sub>1</sub>	F <sub>5</sub>	G <sub>2</sub>	A <sub>6</sub>	B <sub>3</sub>	C <sub>7</sub>
E <sub>5</sub>	F <sub>2</sub>	G <sub>6</sub>	A <sub>3</sub>	B <sub>7</sub>	C <sub>4</sub>	D <sub>1</sub>
F <sub>6</sub>	G <sub>3</sub>	A <sub>7</sub>	B <sub>4</sub>	C <sub>1</sub>	D <sub>5</sub>	E <sub>2</sub>
G <sub>7</sub>	A <sub>4</sub>	B <sub>1</sub>	C <sub>5</sub>	D <sub>2</sub>	E <sub>6</sub>	F <sub>3</sub>

$8 \times 8$ 

A <sub>1</sub>	B <sub>5</sub>	C <sub>2</sub>	D <sub>3</sub>	E <sub>7</sub>	F <sub>4</sub>	G <sub>8</sub>	H <sub>6</sub>
B <sub>2</sub>	A <sub>8</sub>	G <sub>1</sub>	F <sub>7</sub>	H <sub>3</sub>	D <sub>6</sub>	C <sub>5</sub>	E <sub>4</sub>
C <sub>3</sub>	G <sub>4</sub>	A <sub>7</sub>	E <sub>1</sub>	D <sub>2</sub>	H <sub>5</sub>	B <sub>6</sub>	F <sub>8</sub>
D <sub>4</sub>	F <sub>3</sub>	E <sub>6</sub>	A <sub>5</sub>	C <sub>8</sub>	B <sub>1</sub>	H <sub>7</sub>	G <sub>2</sub>
E <sub>5</sub>	H <sub>1</sub>	D <sub>8</sub>	C <sub>4</sub>	A <sub>6</sub>	G <sub>3</sub>	F <sub>2</sub>	B <sub>7</sub>
F <sub>6</sub>	D <sub>7</sub>	H <sub>4</sub>	B <sub>8</sub>	G <sub>5</sub>	A <sub>2</sub>	E <sub>3</sub>	C <sub>1</sub>
G <sub>7</sub>	C <sub>6</sub>	B <sub>3</sub>	H <sub>2</sub>	F <sub>1</sub>	E <sub>8</sub>	A <sub>4</sub>	D <sub>5</sub>
H <sub>8</sub>	E <sub>2</sub>	F <sub>5</sub>	G <sub>6</sub>	B <sub>4</sub>	C <sub>7</sub>	D <sub>1</sub>	A <sub>3</sub>

 $9 \times 9$ 

A <sub>1</sub>	B <sub>3</sub>	C <sub>2</sub>	D <sub>7</sub>	E <sub>9</sub>	F <sub>8</sub>	G <sub>4</sub>	H <sub>6</sub>	I <sub>5</sub>
B <sub>2</sub>	C <sub>1</sub>	A <sub>3</sub>	E <sub>8</sub>	F <sub>7</sub>	D <sub>9</sub>	H <sub>5</sub>	I <sub>4</sub>	G <sub>6</sub>
C <sub>3</sub>	A <sub>2</sub>	B <sub>1</sub>	F <sub>9</sub>	D <sub>8</sub>	E <sub>7</sub>	I <sub>6</sub>	G <sub>5</sub>	H <sub>4</sub>
D <sub>4</sub>	E <sub>6</sub>	F <sub>5</sub>	G <sub>1</sub>	H <sub>3</sub>	I <sub>2</sub>	A <sub>7</sub>	B <sub>9</sub>	C <sub>8</sub>
E <sub>5</sub>	F <sub>4</sub>	D <sub>6</sub>	H <sub>2</sub>	I <sub>1</sub>	G <sub>3</sub>	B <sub>8</sub>	C <sub>7</sub>	A <sub>9</sub>
F <sub>6</sub>	D <sub>5</sub>	E <sub>4</sub>	I <sub>3</sub>	G <sub>2</sub>	H <sub>1</sub>	C <sub>9</sub>	A <sub>8</sub>	B <sub>7</sub>
G <sub>7</sub>	H <sub>9</sub>	I <sub>8</sub>	A <sub>4</sub>	B <sub>6</sub>	C <sub>5</sub>	D <sub>1</sub>	E <sub>3</sub>	F <sub>2</sub>
H <sub>8</sub>	I <sub>7</sub>	G <sub>9</sub>	B <sub>5</sub>	C <sub>4</sub>	A <sub>6</sub>	E <sub>2</sub>	F <sub>1</sub>	D <sub>3</sub>
I <sub>9</sub>	G <sub>8</sub>	H <sub>7</sub>	C <sub>6</sub>	A <sub>5</sub>	B <sub>4</sub>	F <sub>3</sub>	D <sub>2</sub>	E <sub>1</sub>

 $11 \times 11$ 

A <sub>1</sub>	B <sub>7</sub>	C <sub>2</sub>	D <sub>8</sub>	E <sub>3</sub>	F <sub>9</sub>	G <sub>4</sub>	H <sub>10</sub>	I <sub>5</sub>	J <sub>11</sub>	K <sub>6</sub>
B <sub>2</sub>	C <sub>8</sub>	D <sub>3</sub>	E <sub>9</sub>	F <sub>4</sub>	G <sub>10</sub>	H <sub>5</sub>	I <sub>11</sub>	J <sub>6</sub>	K <sub>1</sub>	A <sub>7</sub>
C <sub>3</sub>	D <sub>9</sub>	E <sub>4</sub>	F <sub>10</sub>	G <sub>5</sub>	H <sub>11</sub>	I <sub>6</sub>	J <sub>1</sub>	K <sub>7</sub>	A <sub>2</sub>	B <sub>8</sub>
D <sub>4</sub>	E <sub>10</sub>	F <sub>5</sub>	G <sub>11</sub>	H <sub>6</sub>	I <sub>1</sub>	J <sub>7</sub>	K <sub>2</sub>	A <sub>8</sub>	B <sub>3</sub>	C <sub>9</sub>
E <sub>5</sub>	F <sub>11</sub>	G <sub>6</sub>	H <sub>1</sub>	I <sub>7</sub>	J <sub>2</sub>	K <sub>8</sub>	A <sub>3</sub>	B <sub>9</sub>	C <sub>4</sub>	D <sub>10</sub>
F <sub>6</sub>	G <sub>1</sub>	H <sub>7</sub>	I <sub>2</sub>	J <sub>8</sub>	K <sub>3</sub>	A <sub>9</sub>	B <sub>4</sub>	C <sub>10</sub>	D <sub>5</sub>	E <sub>11</sub>
G <sub>7</sub>	H <sub>2</sub>	I <sub>8</sub>	J <sub>3</sub>	K <sub>9</sub>	A <sub>4</sub>	B <sub>10</sub>	C <sub>5</sub>	D <sub>11</sub>	E <sub>6</sub>	F <sub>1</sub>
H <sub>8</sub>	I <sub>3</sub>	J <sub>9</sub>	K <sub>4</sub>	A <sub>10</sub>	B <sub>5</sub>	C <sub>11</sub>	D <sub>6</sub>	E <sub>1</sub>	F <sub>7</sub>	G <sub>2</sub>
I <sub>9</sub>	J <sub>4</sub>	K <sub>10</sub>	A <sub>5</sub>	B <sub>11</sub>	C <sub>6</sub>	D <sub>1</sub>	E <sub>7</sub>	F <sub>2</sub>	G <sub>8</sub>	H <sub>3</sub>
J <sub>10</sub>	K <sub>5</sub>	A <sub>11</sub>	B <sub>6</sub>	C <sub>1</sub>	D <sub>7</sub>	E <sub>2</sub>	F <sub>8</sub>	G <sub>3</sub>	H <sub>9</sub>	I <sub>4</sub>
K <sub>11</sub>	A <sub>6</sub>	B <sub>1</sub>	C <sub>7</sub>	D <sub>2</sub>	E <sub>8</sub>	F <sub>3</sub>	G <sub>9</sub>	H <sub>4</sub>	I <sub>10</sub>	J <sub>5</sub>

12 × 12											
A <sub>1</sub>	B <sub>12</sub>	C <sub>6</sub>	D <sub>7</sub>	I <sub>5</sub>	J <sub>4</sub>	K <sub>10</sub>	L <sub>11</sub>	E <sub>9</sub>	F <sub>8</sub>	G <sub>2</sub>	H <sub>3</sub>
B <sub>2</sub>	A <sub>11</sub>	D <sub>5</sub>	C <sub>8</sub>	J <sub>6</sub>	I <sub>3</sub>	L <sub>9</sub>	K <sub>12</sub>	F <sub>10</sub>	E <sub>7</sub>	H <sub>1</sub>	G <sub>4</sub>
C <sub>3</sub>	D <sub>10</sub>	A <sub>8</sub>	B <sub>5</sub>	K <sub>7</sub>	L <sub>2</sub>	I <sub>12</sub>	J <sub>9</sub>	G <sub>11</sub>	H <sub>6</sub>	E <sub>4</sub>	F <sub>1</sub>
D <sub>4</sub>	C <sub>9</sub>	B <sub>L</sub>	A <sub>6</sub>	L <sub>8</sub>	K <sub>1</sub>	J <sub>11</sub>	I <sub>10</sub>	H <sub>12</sub>	G <sub>5</sub>	F <sub>3</sub>	E <sub>2</sub>
E <sub>5</sub>	F <sub>4</sub>	G <sub>10</sub>	H <sub>11</sub>	A <sub>9</sub>	B <sub>8</sub>	C <sub>2</sub>	D <sub>3</sub>	I <sub>1</sub>	J <sub>12</sub>	K <sub>6</sub>	L <sub>7</sub>
F <sub>6</sub>	E <sub>3</sub>	H <sub>9</sub>	G <sub>12</sub>	B <sub>10</sub>	A <sub>7</sub>	D <sub>1</sub>	C <sub>4</sub>	J <sub>2</sub>	I <sub>11</sub>	L <sub>5</sub>	K <sub>8</sub>
G <sub>7</sub>	H <sub>2</sub>	E <sub>12</sub>	F <sub>9</sub>	C <sub>11</sub>	D <sub>6</sub>	A <sub>4</sub>	B <sub>1</sub>	K <sub>3</sub>	L <sub>10</sub>	I <sub>8</sub>	J <sub>5</sub>
H <sub>8</sub>	G <sub>1</sub>	F <sub>11</sub>	E <sub>10</sub>	D <sub>12</sub>	C <sub>5</sub>	B <sub>3</sub>	A <sub>2</sub>	L <sub>4</sub>	K <sub>9</sub>	J <sub>7</sub>	I <sub>6</sub>
I <sub>9</sub>	J <sub>8</sub>	K <sub>2</sub>	L <sub>3</sub>	E <sub>1</sub>	F <sub>12</sub>	G <sub>6</sub>	H <sub>7</sub>	A <sub>5</sub>	B <sub>4</sub>	C <sub>10</sub>	D <sub>11</sub>
J <sub>10</sub>	I <sub>7</sub>	L <sub>1</sub>	K <sub>4</sub>	F <sub>2</sub>	E <sub>11</sub>	H <sub>5</sub>	G <sub>8</sub>	B <sub>6</sub>	A <sub>3</sub>	D <sub>9</sub>	C <sub>12</sub>
K <sub>11</sub>	L <sub>6</sub>	I <sub>4</sub>	J <sub>1</sub>	G <sub>3</sub>	H <sub>10</sub>	E <sub>8</sub>	F <sub>5</sub>	C <sub>7</sub>	D <sub>2</sub>	A <sub>12</sub>	B <sub>9</sub>
L <sub>12</sub>	K <sub>5</sub>	J <sub>3</sub>	I <sub>2</sub>	H <sub>4</sub>	G <sub>9</sub>	F <sub>7</sub>	E <sub>6</sub>	D <sub>8</sub>	C <sub>1</sub>	B <sub>11</sub>	A <sub>10</sub>





# Bibliografia

- [1] W.J. CONOVER. *Practical Nonparametric Statistics*. John Wiley and Sons.
- [2] D.H. SANDERS R.J. ENG e A.F. MURPH. *Statistics. A Fresh Approach*. McGraw-Hill Int. Ed., 1985.
- [3] R.V. HOGG e A.T. CRAIG. *Introduction to Mathematical Statistics*. Macmillan Publ. Co. Inc., 3 edition, 1970.
- [4] D.S. MOORE e G.P. McCABE. *Introduction to the Practice of Statistics*. W.H Freeman and Company, 1989.
- [5] W.E. BILES e J.J. SWAIN. *Optimization and Industrial Experimentation*. John Wiley and Sons, 1980.
- [6] RUI C. GUIMARÃES e JOSÉ A. S. CABRAL. *Estatística*. Mc Graw-Hill de Portugal, 1997.
- [7] W. HUNTER e J.S. HUNTER. *An introduction to design, data analysis and model building*. John Wiley and Sons, G.E.P. BOX.
- [8] J.E. FREUND e R.E. WALPOLE. *Mathematical Statistics*. Prentice-Hall Inc., 3 edition, 1980.
- [9] T.H. WONNACOTT e R.J. WONNACOTT. *Introdução à Estatística*. Livros Técnicos e Cient. Ed.
- [10] P.G. HOEL. *Introduction to Mathematical Statistics*. John Wiley and Sons.
- [11] P.L. MEYER. *Probabilidades. Aplicações à Estatística*. Livros Técnicos e Cient. Ed.
- [12] D.S. MOORE. *Statistics, Concepts and Controversies*. W.H. Freeman and Company, 1979.
- [13] B.J.F. MURTEIRA. *Probabilidades e Estatística*, volume I e II. McGraw-Hill Portugal.